

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФГАОУ ВО "Новосибирский национальный
исследовательский государственный университет"**

Факультет естественных наук

УТВЕРЖДАЮ



Декан ФЕН НГУ, профессор

_____ Резников В.А.

«29» августа 2014 г.

**Физика (термодинамика и статистическая
физика) для химиков**

**Модульная программа лекционного курса,
семинаров, коллоквиумов и самостоятельной работы
студентов**

Курс 3–й, V семестр
Учебно-методический комплекс

Новосибирск 2014

Учебно-методический комплекс предназначен для студентов III курса факультета естественных наук, направление «химия». В состав пособия включены: программа курса лекций, структура курса и правила ИКИ, программа коллоквиумов по термодинамике и статистической физике, методические указания к выполнению заданий. Кроме того, приведен набор задач для самостоятельной работы студентов с использованием учебной литературы и персонального компьютера и даны примеры вариантов контрольных работ, коллоквиумов и задач, предлагавшихся на экзамене за прошлые годы.

Составители

проф. Пуртов П. А., доц. Замураев В. П.

УМК подготовлен в рамках реализации
Программы развития НИУ-НГУ»

© Новосибирский государственный
университет, 2014

Содержание

Аннотация рабочей программы	5
1. Цели освоения дисциплины	7
2. Место дисциплины в структуре ООП	8
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины	8
4. Структура и содержание дисциплины	10
Программа курса лекций	
I. Классическая постулативная термодинамика (пп. 1-4)	11
II. Статистический подход к описанию сложных систем. Статистические распределения (пп. 5-7)	16
III. Микроканоническое распределение и его приложения. Статистическое определение энтропии (пп. 8-11)	18
IV. Каноническое распределение Гиббса и его приложения (пп. 12-17)	20
V. Явления переноса (пп. 18-19)	21
VI. Тожественность частиц и квантовые статистики (пп. 20-22)	21
5. Образовательные технологии	22
6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины	23
Рекомендованная литература к теоретическому курсу	24
Правила ИКИ	25
Перечень коллоквиумов	28
Часть 1. Термодинамика	28
Часть 2. Распределение Максвелла	29
Часть 3. Микроканонический ансамбль	30
Часть 4. Распределение Гиббса. Распределение Больцмана	31
Часть 5. Статистическая сумма. Термодинамические функции. Теплоемкость	32
Часть 6. Явления переноса	34
Учебно-методическое обеспечение дисциплины	35
Образцы вопросов для подготовки к экзамену	35
Примеры задач на контрольных работах и на экзаменах	37
Первая контрольная работа	37
Решение первой контрольной работы	39
Вторая контрольная работа	48
Решение второй контрольной работы	48

Экзамен	56
Решение экзаменационной контрольной работы	58
Переекзаменовка	68
Решение задач переекзаменовки	71
Вторая переекзаменовка	80
Решение задач второй переекзаменовки	82
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	88
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины	88

Аннотация рабочей программы

Дисциплина «Физика (термодинамика и статистическая физика)» является частью математического и естественнонаучного цикла ООП (базовая часть) по направлению подготовки «020100 ХИМИЯ», квалификация (степень) «бакалавр». Дисциплина реализуется на Факультете естественных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ) кафедрой Общей физики.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с явлениями, описываемыми в рамках термодинамики и с использованием статистического подхода, с областями их экспериментального и технического применения, в том числе и в смежных областях знания и приборостроения и иного промышленного производства (в химии, медицине, биологии и т. д.).

Дисциплина нацелена на формирование у выпускника общекультурных компетенций: ОК-6, ОК-7, ОК-8, ОК-9, ОК-13, ОК-14.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, семинарские занятия, контрольные работы, коллоквиумы, домашние задания, консультации, сдача экзаменов, самостоятельная работа студента.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

Текущий контроль. Прохождение студентами курса проходит с использованием системы ИКИ (индивидуального кумулятивного индекса). В течение семестра студенты проходят следующие контрольные точки: пишут две контрольные работы, сдают 6 коллоквиумов, готовят и сдают шесть домашних заданий. Домашние задания нацелены на то, чтобы привить студенту навыки самостоятельного изучения физических явлений. Кроме того, преподаватель оценивает уровень подготовки студента к каждому семинарскому занятию. Все контрольные точки оцениваются баллами, и к концу семестра каждый студент набирает некоторую сумму баллов, которая при преодолении заранее определенного барьера (см. стр. 24 и далее) может привести к получению им итоговой оценки «автоматом» (от «удовлетворительно» до «отлично»). Не прохождение обязательной контрольной точки студентом является причиной недопуска к экзамену, и как следствие, его не аттестации по всему курсу.

Итоговый контроль. Итоговую оценку за учебный семестр студент может получить на письменном экзамене в конце семестра, где он имеет возможность либо повысить оценку, полученную им «автоматом», либо получить любую положительную (или неудовлетворительную) оценку в случае отсутствия у него «оценки-автомата» по результатам системы ИКИ.

Общая трудоемкость дисциплины «Физика» (за четыре семестра)

составляет 18 зачетных единиц. Всего 648 академических часов. Программой дисциплины «Физика (термодинамика и статистическая физика)» предусмотрены 51 час лекций, 34 часа семинаров, 20 часов прохождения контрольных точек в течение семестра (включая домашние задания), 35 часов самостоятельной работы и 4 часа на экзамен, итого 144 часа, 4 зачетных единицы.

1. Цели освоения дисциплины

Курс «Физика (термодинамика и статистическая физика)» является одним из разделов четырех семестрового курса общей физики для студентов специальности «Химия» ФЕН НГУ. Задачами этого большого курса являются: овладение химиками фундаментальными основами части естествознания, отнесенными к изучаемому разделу физики; подготовка к восприятию последующих общих и специальных курсов, требующих знаний физики. Исходя из этих задач, в своем построении курс «Физика (термодинамика и статистическая физика)» опирается на классическую учебную литературу с выверенными подходами.

На лекциях даются основные представления о явлениях, описываемых в рамках классической постулативной термодинамики и с использованием статистического подхода, об областях их экспериментального и технического применения, в том числе и в смежных областях знания и приборостроения и иного промышленного производства (в химии, медицине, биологии и т. д.). На семинарских занятиях студенты учатся использовать методологию предмета для решения различных задач теоретического плана, для выработки у студентов умения формулировать постановку задач, их физическое и математическое описание и последующее решение. В курсе лекций приводятся данные о физических свойствах изучаемых систем и явлений, что позволяет студенту составить представление об общих принципах их влияния на процессы в твердых телах, электрохимии, органической и неорганической химии, включая экологические аспекты.

Основной целью освоения дисциплины является изучение студентами основ классической постулативной термодинамики и физического обоснования основных термодинамических принципов в рамках статистического подхода, умение пользоваться ими и на этой основе – понимания студентами сложных физических задач и проблем.

- По окончании изучения указанной дисциплины студент должен
- **иметь представление о применении термодинамики в физике и химии, ориентироваться в соответствующей учебной и научной литературе;**
 - **знать основы классической постулативной термодинамики и обоснование основных термодинамических принципов в рамках статистического подхода, знать методы решения задач;**
 - **уметь применять знания термодинамики для решения задач.**

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Физика (термодинамика и статистическая физика)» является частью математического и естественнонаучного цикла ООП, базовая часть, по направлению подготовки «020100 ХИМИЯ», уровень подготовки – «бакалавр».

Дисциплина «Физика (термодинамика и статистическая физика)» опирается на следующие дисциплины данной ООП:

- основные главы элементарной физики;
- математический анализ;
- высшая алгебра;
- теория вероятности и математическая статистика;
- физика (механика);
- физика (электродинамика);
- физика (квантовая механика);
- практикум по физической оптике;
- химическая термодинамика;
- основы компьютерной грамотности (навыки обращения с ПК).

Результаты освоения дисциплины «Физика (термодинамика и статистическая физика)» используются в следующих дисциплинах данной ООП:

- химическая термодинамика;
- строение вещества;
- химия твердого тела;
- общая химическая технология;
- химическая кинетика.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Физика (термодинамика и статистическая физика)»:

- **общекультурные компетенции:**
 - использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (**ОК-6**);
 - умение работать с компьютерами на уровне пользователя и способность применять навыки работы с компьютером как в социальной сфере, так и в области познавательной и профессиональной деятельности (**ОК-7**);

- способность понимать сущность и значение информации в развитии современного информационного общества, сознавать опасности и угрозы, возникающие в этом процессе, соблюдать основные требования информационной безопасности, в том числе защиты государственной тайны (ОК-8);
- владение основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, навыки работы с компьютером как средством управления информацией (ОК-9);
- настойчивость в достижении цели с учетом моральных и правовых норм и обязанностей (ОК-13);
- умение работать в коллективе, готовность к сотрудничеству с коллегами, способность к разрешению конфликтов и социальной адаптации (ОК-14).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- иметь представление о наиболее известных явлениях, описываемых в рамках классической постулативной термодинамики и с использованием статистического подхода;
- знать понятия и законы, определяющие термодинамические процессы в сплошных и разреженных средах;
- уметь предсказывать и объяснять наиболее вероятные направления развития процессов с применением современных физико-химических методов.
- быть готовым к педагогической деятельности в общеобразовательных учреждениях.

4. Структура и содержание дисциплины

Программой дисциплины «Физика (термодинамика и статистическая физика)» предусмотрены 51 час лекций, 34 часа семинаров, 20 часов прохождения контрольных точек, 35 часов самостоятельной работы и 4 часа на экзамен, итого 144 часа, 4 зачетных единицы.

№ п/п	Наименование разделов и тем	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)						Формы текущего контроля успеваемости
		Лекция	Семинары	Контр. работа	Коллоквиумы	Самост. работа	Экзамен	
1	Классическая постулативная термодинамика	12	10		2	4		Коллоквиум
2	Статистический подход к описанию сложных систем. Статистические распределения	6	6		2	3		Коллоквиум
3	Микроканоническое распределение и его приложения. Статистическое определение энтропии	8	4	4	2	2		Коллоквиум Контрольная работа
4	Каноническое распределение Гиббса и его приложения	12	10		4	4		Коллоквиум Коллоквиум
5	Явления переноса	7	4		2	4		Коллоквиум
6	Тождественность частиц и квантовые статистики	6		4				Контрольная работа
						18	4	Экзамен
	Итого за курс	51	34	8	12	35	4	
	Всего	144						

Программа курса лекций

1. Предмет и задачи термодинамики и статистической физики. Термодинамика и статистическая физика занимаются изучением физических процессов, происходящих в макроскопических системах, т.е. в телах, содержащих огромное число микрочастиц. Термодинамический и статистический методы. Термодинамический метод не опирается ни на какие модельные представления об атомно-молекулярной структуре вещества, его задачей является установление связей между непосредственно измеряемыми величинами (давление, объем, температура, концентрация раствора, напряженность поля и т.д.). Основную задачу статистического метода можно сформулировать так: зная законы поведения частиц, из которых построена система, установить законы поведения макроскопического количества вещества. Термодинамические системы бывают *изолированными, замкнутыми и открытыми*.

Общее начало термодинамики формулируется так: *Изолированная термодинамическая система с течением времени всегда приходит в состояние равновесия и никогда самопроизвольно выйти из него не может*. Процесс перехода к равновесию называется процессом *релаксации*. Состояние термодинамической системы задается с помощью ряда параметров, которые бывают внутренние и внешние. Параметры не бывают независимыми, а связаны одним или несколькими уравнениями, которые называются *уравнениями состояния*. Различают термические уравнения состояния и калорические. Например, уравнение состояния идеального газа имеет вид: $pV=RT$. Это термическое уравнение. Кроме этого в термодинамике вводятся специальные функции, переменными в которых являются эти самые параметры. Такие функции называются *функциями состояния или термодинамическими функциями*.

Равновесные и неравновесные процессы. Если на любом этапе процесса значения всех параметров успевают выравниваться, то такой процесс будет представлять собой цепочку очень близких друг к другу равновесных состояний. Такие достаточно медленные процессы называются *равновесными или квазистатическими*. В других ситуациях процессы будут неравновесными. Все реальные процессы являются неравновесными и могут лишь в большей или меньшей степени приближаться к равновесным. Равновесный процесс может быть обращен во времени, и при обратном процессе система пройдет через те же равновесные состояния. В связи с этим равновесные процессы называют *обратимыми*. Неравновесные процессы необратимы.

Нулевое начало термодинамики (принцип температуры) формулируется так: состояние системы в условиях термодинамического равновесия однозначно определяется заданием внешних параметров и температуры. Температура является мерой интенсивности теплового движения (в термодинамике температура определяется лишь на качественном уровне).

Первое начало термодинамики является законом сохранения энергии. Внутренняя энергия U системы является однозначной функцией ее состояния и изменяется только под влиянием внешних воздействий,

$$U = U(N, T, V)$$

$$dU = \delta Q - \delta A.$$

Здесь δQ – подведенное к системе тепло, а δA – совершенная системой работа. Подведенное тепло и совершенная работа не являются функциями состояния и зависят от процесса

Теплоемкость, ее зависимость от пути. Теплоемкость определяется формулой

$$c = \frac{\delta Q}{dT},$$

она также зависит от процесса, т.е. от пути перехода из одного состояния в другое. Примерами являются теплоемкости при постоянном давлении и при постоянном объеме, c_p и c_v . Они определяются соотношениями

$$c_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p, \quad c_v = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_v.$$

Для идеального газа теплоемкости связаны уравнением Майера, $c_p - c_v = R$.

Адиабатическим процессом называется процесс без теплообмена. Уравнение равновесного адиабатического процесса для идеального газа имеет такой вид

$$pV^\gamma = const,$$

где $\gamma = c_p / c_v$ называется показателем адиабаты.

Энтальпия идеального газа определяется соотношениями

$$dS = \frac{\delta Q}{T},$$

$$S = c_V \ln(pV^\gamma) + const$$

Для идеального газа первое начало термодинамики может быть записано в виде (уравнение Гиббса)

$$dU = TdS - pdV.$$

2. Второе начало термодинамики выражает постулат о существовании энтропии, как функции состояния термодинамической системы. Энтропия обладает следующими свойствами:

А). Энтропия является экстенсивной величиной, т.е. полная энтропия системы является суммой энтропий отдельных частей.

Б). Полное изменение энтропии dS состоит из ее производства $d_i S$, которое происходит из-за изменений внутри системы и потока энтропии $d_e S$, который возникает за счет взаимодействия с внешней средой

$$dS = d_i S + d_e S.$$

В). Производство энтропии $d_i S$, связанное с изменениями внутри системы, всегда неотрицательно

$$d_i S \geq 0.$$

Производство энтропии $d_i S$ равно нулю, когда в системе протекают только равновесные (обратимые) процессы и положительно во всех остальных случаях. Для равновесного процесса в замкнутой системе $TdS = \delta Q$ и первое начало термодинамики для любой замкнутой системы записывается в виде

$$dU = TdS - pdV.$$

Циклическими являются такие равновесные процессы, когда система после ряда изменений возвращается в исходное состояние. Циклические

процессы реализуются в тепловых машинах. Коэффициент полезного действия тепловой машины η определяется соотношением

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – подведенное к системе тепло, Q_2 – отведенное от системы тепло, $A = Q_1 - Q_2$ – работа. Циклический процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, называется *циклом Карно*. Этот цикл содержит один нагреватель и один холодильник. Теорема Карно. Коэффициент полезного действия цикла Карно зависит только от температур нагревателя и холодильника и определяется выражением

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Различные формулировки второго начала термодинамики. Существует много других формулировок второго начала термодинамики. Приведем следующие:

А). Невозможна самопроизвольная передача тепла от тела менее нагретого к телу более нагретому.

Б). Невозможно существование вечного двигателя второго рода, т.е. такой тепловой машины, которая бы превращала все подведенное тепло в работу ($\eta = 1$). Можно показать эквивалентность различных формулировок второго начала термодинамики.

3. Связь между термическим и калорическим уравнениями состояния (*соотношение Максвелла*) имеет вид

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p$$

Зная $S = S(U, V)$ можно определить температуру и давление

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U = \frac{p}{T}$$

Эти соотношения оказываются полезными при установлении связи термодинамики со статистической физикой.

Для открытой системы уравнение Гиббса обобщается

$$dU = TdS - pdV + \mu dN,$$

где μ – химический потенциал. Для многокомпонентной системы

$$dU = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i.$$

При решении конкретных задач в термодинамике используется метод термодинамических потенциалов. Наиболее распространены (кроме внутренней энергии) следующие потенциалы: энтальпия H , свободная энергия Гельмгольца F , свободная энергия Гиббса (потенциал Гиббса) G . Эти потенциалы определены соотношениями

$$H = U + pV$$

$$dH = TdS + Vdp + \mu dN$$

$$F = U - TS$$

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN$$

$$G = U + pV - TS$$

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN.$$

4. Общие условия термодинамического равновесия. Установление равновесия в изолированной системе. При установлении равновесия в изолированной системе энтропия растет, а в равновесии достигает максимума.

Установление равновесия при $T = const.$, $V = const.$, $N_i = const$ сопровождается установлением минимума свободной энергии Гельмгольца. Установление равновесия при $T = const.$, $p = const.$, $N_i = const$ сопровождается установлением минимума свободной энергии Гиббса.

Пусть в системе протекает химическая реакция, описываемая стехиометрическим уравнением $\sum_i \nu_i C_i = 0$ (ν_i – стехиометрические коэффициенты, C_i – вещества, участвующие в реакции). Уравнение Гиббса в этом случае записывается так

$$dU = TdS - pdV - Ad\xi,$$

где $A = -\sum_i \nu_i \mu_i$ – сродство химической реакции, а ξ – химическая переменная. Общее условие равновесия в химической реакции можно записать так

$$A = -\sum_i \nu_i \mu_i = 0.$$

Для описания неравновесных процессов вводится понятие *производства энтропии*. Это количество энтропии, которое производится в системе в единицу времени, $p = \frac{d_i S}{dt}$. Производство энтропии при химических реакциях определяется выражением

$$p = \frac{Aw}{T},$$

где $w = \frac{d\xi}{dt}$ – скорость химической реакции.

Третье начало термодинамики определяет начало отчета энтропии. По мере приближения температуры к абсолютному нулю энтропия всякой равновесной системы перестает зависеть от каких-либо термодинамических параметров и в пределе при $T = 0$ приобретает одну и ту же величину для всех систем, которую можно принять равной нулю.

5. Математический аппарат статистической физики опирается на теорию вероятности. Напомним некоторые формулы этой теории. Для вероятности и среднего значения имеем

$$dW(x) = \rho(x)dx,$$

$$\langle F(x) \rangle = \int F(x)\rho(x)dx.$$

Вероятность любого из ряда независимых событий есть

$$W = \int_a^b \rho(x)dx.$$

Плотность вероятности реализации двух независимых событий определяется произведением

$$\rho(x, y) = \rho_1(x)\rho_2(y).$$

Распределение молекул по скоростям для идеального газа (распределение Максвелла) в декартовых координатах (одномерное и трехмерное) имеет вид

$$dW(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x,$$

$$dW(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z.$$

Давление, средняя энергия молекул и температура идеального газа связаны между собой соотношениями

$$p = nkT, \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT.$$

Распределение Максвелла в сферических координатах имеет вид

$$dW(v, \theta, \varphi) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \sin\theta d\theta d\varphi,$$

$$dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv.$$

Среднее значение скорости молекул в идеальном газе равно $\langle v \rangle = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} nkT$, а плотность потока на стенку связана со средней скоростью формулой

$$j = \frac{n\langle v \rangle}{4}.$$

6. *Биномиальное распределение* представляет определенный физический интерес. В качестве примера рассмотрим распределение по

ориентациям системы спинов. Пусть имеется N спинов $1/2$. Вероятность проекции спина вверх равна p , а вниз $-q$. Тогда вероятность того, что n спинов ориентировано вверх, а остальные вниз равна

$$W(N,n) = C_N^n p^n q^{N-n} = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n q^{N-n}.$$

Если $p=q=1/2$, $N \gg 1$, $|n - N/2| \ll N$, то биномиальное распределение переходит в гауссово распределение

$$W(N,n) = \left(\frac{2}{\pi N} \right)^{1/2} e^{-2(n-N/2)^2/N}.$$

7. Экспоненциальное распределение также представляет определенный интерес. В качестве примера рассмотрим распределение по длинам и временам свободного пробега молекул в идеальном газе. Если τ – среднее время пролета молекулы без столкновения, то $p(t) = \exp(-t/\tau)$ – вероятность молекуле пролететь, не сталкиваясь в течение времени t . Вероятность молекуле пролететь расстояние l без столкновений равна $\exp(-l/\lambda)$, где λ – средняя длина свободного пробега.

8. Свойство флуктуаций в системах их большого числа частиц. Мерой флуктуация физической величины L в системе из N частиц является *среднеквадратичное отклонение*, которое еще называют среднеквадратичной флуктуацией:

$$\langle (\Delta L)^2 \rangle = \langle (L - \langle L \rangle)^2 \rangle.$$

Величина относительной флуктуации уменьшается с ростом числа частиц в системе обратно пропорционально квадратному корню из N ,

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta L)^2 \rangle}}{\langle L \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

В системе содержащей огромное (макроскопическое) число частиц роль флуктуаций обычно мала.

Системы и ансамбли. Фазовое пространство, конфигурационное подпространство, μ -пространство. Для полного описания системы из N частиц надо задать $3N$ координат и $3N$ импульсов. Тем самым задается $6N$ - мерное пространство, которое называют *фазовым пространством* или Γ -пространством. Ансамбль задается числом изображающих систем $dW(p,q)=\rho(p,q)dpdq$ (функция распределения), приходящихся на элемент объема фазового пространства. Временное усреднение и усреднение по ансамблю. Наблюдаемое среднее значение физической величины F может быть определено двумя способами: усреднением по времени и усреднением по ансамблю

$$\langle F \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt,$$

$$\langle F \rangle = \int F(p,q) \rho(p,q) dpdq.$$

Постулируется эквивалентность этих усреднений.

Функция распределения $\rho(p,q)$ постоянна вдоль фазовых траекторий системы. Это есть *теорема Лиувилля*. Математическая запись выглядит так

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0.$$

9. Микроканонический ансамбль. Принцип равной вероятности всех допустимых классических состояний системы. *Замкнутая система описывается ансамблем, характеризующемся равной вероятностью реализации всех изображающих систем.* Это основной постулат статистической физики. Соответствующий ансамбль называется *микроканоническим*. Фазовый объем равновесного состояния. Функция распределения для микроканонического ансамбля имеет вид

$$dW(p,q) = \frac{1}{\Delta\Gamma_{кл}} dpdq,$$

где $\Delta\Gamma_{кл} = \int dpdq$ – величина полного классического фазового объема.

Микроканоническое распределение можно записать так: вероятность микросостояния с энергией E_k , лежащей в интервале от E до $E+\Delta E$, равна

$$dW = \begin{cases} \text{const} \cdot d\Gamma & \text{при } E_k \in (E, E+\Delta E) \\ 0 & \text{при } E_k \notin (E, E+\Delta E) \end{cases}$$

Эту же вероятность записывают так

$$W(E_k) = A \delta(E - E_k)$$

где A – нормировочная постоянная.

10. Зная классический фазовый объем, можно определить квантовый фазовый объем $\Delta\Gamma$

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta\Gamma_{кл}}{(2\pi\hbar)^{3N} N!}$$

Квантовый фазовый объем есть *число микросостояний системы*. Для характеристики фазового объема используют величину

$$S = k \ln \Delta\Gamma,$$

где k – постоянная Больцмана. Она носит название *энтропии* и совпадает с энтропией, определенной в термодинамике. Энтропия равновесного состояния. Энтропия как среднее значение логарифма вероятности. Энтропия системы спинов 1/2. Энтропия равновесного состояния системы спинов 1/2. Энтропия идеального газа.

11. Применения микроканонического ансамбля к описанию равновесия. Тепловое равновесие. Температура. Механическое равновесие. Давление. Равновесие при переменном числе частиц. Химический потенциал. Химический потенциал идеального газа. Стандартное значение химического потенциала. Основное термодинамическое равенство. Основное термодинамическое неравенство.

12. Канонический ансамбль. Функция распределения Гиббса. Распределения Максвелла и Больцмана как частные случаи распределения Гиббса. Барометрическая формула. Частицы со спином 1/2 во внешнем магнитном поле. Дипольный момент во внешнем электрическом поле. Закон Кюри.

13. Термодинамические функции канонического ансамбля. Энтропия. Свободная энергия Гельмгольца. Связь энергии со статистической суммой. Вычисления S и p . Статистическая сумма идеального одноатомного газа. Энергия, свободная энергия Гельмгольца и энтропия идеального газа.

14. Гармонический осциллятор в термостате. Статсумма в классическом и квантовом рассмотрении. Энергия квантового осциллятора, теплоемкость C_V . Вымораживание колебательных степеней свободы. Характеристическая температура вымораживания. Энтропия квантового осциллятора, ее зависимость от температуры. Классический и квантовый ротатор. Статистические суммы. Энергия и теплоемкость. Характеристическая температура вымораживания вращательной степени свободы. Волчок. Энергия и теплоемкость - классическое рассмотрение. Внутреннее вращение молекул.

15. Квантовые поправки к статистической сумме вращательного движения - число симметрии и число спиновых состояний. Ортоводород и параводород. Статистическая сумма молекулы. Степени свободы. Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы.

16. Газ Ван-дер-Ваальса. Статистическая сумма. Конфигурационный интеграл, его оценка. Уравнение состояния газа Ван-дер-Ваальса.

17. Большое каноническое распределение. Большая статистическая сумма. Среднее число частиц в системе. Изотермически - изобарический ансамбль.

18. Молекулярно-кинетические явления. Релаксация. Роль столкновений молекул в установлении равновесия в газе. Среднее число столкновений в единицу времени. Константа скорости бимолекулярной химической реакции.

19. Явления переноса. Коэффициенты вязкости, диффузии, теплопроводности в газе и конденсированной среде. Уравнения диффузии и теплопроводности. Движение диффузионного фронта. Соотношение Эйнштейна $x^2 \sim Dt$.

20. Логические погрешности учета тождественности частиц в классических статистиках. Вывод распределения Гиббса с помощью большого канонического распределения. Квантовые распределения для идеального газа, статистики Бозе – Эйнштейна и Ферми-Дирака. Критерий вырожденности идеального газа.

21. Электронный газ в металле. Функция распределения, ее вид при абсолютном нуле и при $T > 0$. Максимальная и средняя энергия электронов при абсолютном нуле. Температура вырождения электронного газа. Свободные электроны. Оценка теплоемкости электронного газа. Фото- и термоэлектронная эмиссия.

22. Фотонный газ, его свойства в полости. Химический потенциал фотонного газа. Условие равновесия фотонного газа в полости.

Поглощательная и излучательная способность твердого тела, их связь с плотностью энергии фотонов. Абсолютно черное тело. Формула Планка. Формула Вина и закон Релея-Джинса. Равнораспределение по степеням свободы. Термодинамические функции излучения.

5. Образовательные технологии

Виды/формы образовательных технологий. Отличительной особенностью курса является применение в нем модульно-рейтинговой системы (см. аннотацию), при реализации которой постоянно контролируется уровень знаний студента. Наличие обязательных для итоговой аттестации студента контрольных точек принуждает к активной работе студента в течение всего семестра. Для того чтобы заинтересовать студента в подготовке к каждому семинарскому занятию, каждое семинарское занятия часто начинается с экспресс – миниконтрольной работы, результат которой может существенным образом повлиять на итоговую оценку студента. Обратная связь обеспечивается тем, что лектор ведет одну из семинарских групп, и может оперативно скорректировать лекционный курс в зависимости от полученных на семинарском занятии и при прохождении контрольных точек результатов в усвоении материала. Семинарские занятия происходят в форме дискуссии преподавателя со студентами (аналог «круглого стола», преподавателю в котором отводится роль ведущего), в ходе которых каждый из участников – студенты или преподаватель имеют право задавать вопросы и участвовать в выработке альтернативных решений разбираемых задач. Таким образом, на семинарских занятиях реализуется интерактивная форма обучения.

Важной формой обучения являются коллоквиумы, проводимые в форме беседы преподавателя со студентом, в которую при желании может вмешиваться любой студент семинарской группы. Здесь (а не только на семинарских занятиях) студент может получить ответы на все интересующие его вопросы по предмету.

Следует отметить, что практически все преподаватели, участвующие в курсе «Физика (термодинамика и статистическая физика)» являются профессиональными исследователями в области физики и химии.

Преподаватели, участвующие в проведении курса, регулярно готовят и издают учебно-методические пособия, посвященные различным разделам курса. Эти пособия размещаются и в электронном виде на сайте Факультета естественных наук.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Использование модульной системы и индивидуального кумулятивного индекса (ИКИ) успеваемости в курсе «Физика (термодинамика и статистическая физика)» дает возможность студенту проявить максимальную самостоятельность и инициативность в учебном процессе, а преподавателям – объективно оценить знания студента.

В рамках этой системы студент может маневрировать и находить оптимальный путь формирования собственного рейтинга. Она позволяет студенту получить навыки работы с учебными пособиями, монографиями и справочной литературой по термодинамике и статистической физике, выработать самостоятельный научно-исследовательский подход к решению задач и физико-химических проблем и в конечном итоге достичь желаемого профессионального уровня. Успешная работа по предлагаемой системе предполагает интенсивное сотрудничество преподавателей и студентов, которые должны четко представлять заданные «правила игры» и действовать в соответствии с ними.

Система ИКИ (индивидуальный кумулятивный индекс) предусматривает прохождение контрольных точек (коллоквиумов, контрольных работ и домашних заданий), при этом набранные баллы суммируются. Система ИКИ построена таким образом, что текущий контроль охватывает все разделы курса. Поэтому итоговая аттестация не предусматривает обязательного итогового экзамена – любую положительную итоговую оценку за курс в целом можно получить «автоматом», набрав соответствующее количество баллов в семестре. Студент, не набравший достаточного количества баллов для получения «оценки-автомата» или желающий ее повысить, сдает письменные экзамены, которые проводятся во время экзаменационной сессии.

Все контрольные точки являются обязательными. Их прохождение – необходимое условие для получения «оценки-автомата» и (или) допуска на экзамен.

Каждая обязательная контрольная точка проходит строго в установленный срок, который указан в Программе семинаров. При прохождении контрольной точки за пределами установленного срока (без уважительной причины) она принимается со «штрафом», т. е. вводится коэффициент 0.5 на каждый набранный сверх 50 % балл.

Студент имеет право на апелляцию по каждой контрольной работе в течение 7 дней со дня ее проведения (при условии, что работа находится у преподавателя). Все вопросы, связанные с изменением суммы баллов,

решаются преподавателем, проверившим задачу, а в спорных случаях – лектором. По истечению срока апелляции по данной контрольной точке баллы за нее не могут быть изменены.

Контрольные точки, не пройденные в срок по уважительной причине (при наличии медицинской справки), принимаются в течение недели после окончания действия справки без штрафа, а далее (в течение одной следующей недели) – со штрафом (см. выше). Все контрольные точки, не пройденные в срок (без уважительной причины), в виде исключения могут быть сданы в течение двух недель за пределами установленного срока (со штрафом).

Работа студента на семинарах оценивается преподавателем, ведущим семинары, по теме текущего семинара, поэтому студенту следует заранее проработать материал к семинару. Студент может получить баллы за быстрое и правильное решение задач на семинаре (по усмотрению преподавателя). Суммарное количество баллов за этот пункт выставляется преподавателем в конце семестра.

Рекомендованная литература к теоретическому курсу

а) основная литература:

1. Пуртов П. А., Замураев В. П. Учебно-методический комплекс. Физика. Термодинамика и статистическая физика. Новосибирск, НГУ, 2011.
2. Толкачев В. А. Термодинамика и статистическая физика. Новосибирск: НГУ, 1996.
3. Пуртов П. А., Анищик С. В., Багрянский В. А., Большаков Б. В., Вязовкин В. Л., Стась Д. В. Задачи по термодинамике и статистической физике. Новосибирск: НГУ, 2005.
4. Замураев В.П., Калинина А.П. Задачи по молекулярной физике : учеб. пособие. -Новосибирск: Изд - во НГУ, 2012.
5. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями по термодинамике и молекулярной физике. Новосибирск: НГУ, 2008.
6. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями по молекулярной физике: ч.1.Элементы статистической физики: учеб. пособие. Новосибирск: Изд - во НГУ, 2013.
7. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями по молекулярной физике: учеб. пособие: ч.2. Элементы физической кинетики: Новосибирск: Изд - во НГУ, 2014.
8. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями по молекулярной физике: учеб. пособие: ч. 3-4. Термодинамика. Новосибирск: Изд - во НГУ, 2014.
9. Замураев В. П., Калинина А. П. Типовые методы решения задач по термодинамике и статистической физике: учеб. - метод. пособие.

Новосибирск: Изд - во НГУ, 2014.

10. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями контрольных работ по термодинамике и статистической физике: учеб. пособие. Новосибирск: Изд - во НГУ, 2014.

б) дополнительная литература:

1. Базаров И. П. Термодинамика. Высшая школа, М. 1976.

2. Киттель Ч. Статистическая термодинамика. Наука, М. 1977.

3. Левич В. Г. Введение в статистическую физику. М.: Гос. изд-во. техн.-теорет. лит., 1956.

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Наука, М. 1979.

5. Оришич Т. И., Филиппова Л. Г. Сборник задач с решениями по термодинамике и статистической физике. Новосибирск: НГУ, 1993.

Правила ИКИ

Текущий контроль

Для текущего контроля учебным планом предусмотрена сдача в течение семестра каждым из студентом шести домашних заданий по разделам курса. Сдача заданий проводится в форме коллоквиумов. Студент на каждом коллоквиуме должен представить решения задач соответствующего домашнего задания и в письменном виде ответить на теоретический вопрос и решить две задачи. За каждое задание студент может получить до **200** баллов. В середине семестра проводится контрольная работа, в которой студентам предлагается решить пять задач, относящихся к первой половине курса. Стоимость первой контрольной — **700** баллов. В конце семестра проводится вторая контрольная работа, в которой студентам предлагается ответить на три теоретических вопроса и решить пять задач из второй половины курса. Теоретическая часть второй контрольной оценивается в **400** баллов, решение задач в **700** баллов. Выполнение этих работ является обязательным для всех студентов, а результаты текущего контроля служат основанием для выставления оценок в ведомость контрольной недели на факультете. Если сумма набранных в семестре баллов превышает **2700** баллов из **3000** возможных, то студенту выставляется оценка **«отлично»** без экзамена. Для получения оценки **«хорошо»** без экзамена необходимо набрать более **2100** баллов, и при этом не менее **130** баллов в ответах на теоретические вопросы. Для получения оценки **«удовлетворительно»** без экзамена необходимо набрать в семестре не менее **1500** баллов и преодолеть порог в **130** баллов в ответах на теоретические вопросы.

Контрольные точки	Баллы
К1 (Коллоквиум 1): Термодинамика	200
К2 (Коллоквиум 2): Распределение Максвелла	200
К3 (Коллоквиум 3): Микроканонический ансамбль	200
КР1 (Контрольная работа 1): Термодинамика. Распределение Максвелла	700
К4 (Коллоквиум 4): Распределение Гиббса. Распределение Больцмана	200
К5 (Коллоквиум 5): Статистическая сумма. Термодинамические функции. Теплоемкость	200
К6 (Коллоквиум 6): Явления переноса	200
КР2 (Контрольная работа 2, теория + задачи): Распределение Гиббса. Распределение Больцмана. Статистическая сумма. Термодинамические функции. Теплоемкость. Явления переноса	400+700
Работа на семинарах	100
ИТОГО	3000

При выполнении домашних заданий надлежит придерживаться следующих сокращений:

- килограмм – кг;
- грамм – г;
- метр – м;
- сантиметр – см;
- микрон – мкм;
- секунда – с;
- градусы Цельсия – °С;
- градусы Кельвина – °К;
- джоуль – Дж;
- калория – кал;
- физическая атмосфера – атм.

Итоговый контроль

Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен письменный экзамен из трех вопросов по теоретическому материалу стоимостью в **400** баллов и решению шести задач, которые оцениваются в **1100** баллов. Оценка выставляется по сумме баллов набранных на экзамене и в семестре. Если сумма превышает 2700 баллов, то студент претендует на оценку «отлично». Для получения оценки «хорошо»

необходимо набрать более **2100** баллов, а для оценки «**удовлетворительно**» — **1500** баллов. Кроме суммы набранных баллов учитывается результат, полученный непосредственно на экзамене. Если в теоретической части экзамена набрано менее **130** баллов и/или за решение задач получено менее **250** баллов или сумма баллов за теорию и решение задач менее **450**, то полученные на экзамене баллы не включаются в общую сумму и оценка, полученная в семестре, остается без изменений. Для получения оценки «**отлично**» кроме набора требуемой суммы баллов необходимо на экзамене набрать при решении задач не менее **600** баллов, а сумму баллов за теорию и решение задач – не менее **900**. Для получения оценки «**хорошо**» необходимо на экзамене набрать при решении задач не менее **400** баллов, а сумму баллов за теорию и решение задач – не менее **670**.

Перечень коллоквиумов

Примерные контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы (в объеме часов, предусмотренных образовательным стандартом и рабочим учебным планом данной дисциплины).

Задание 1.

Термодинамика

Вопросы к коллоквиуму.

1. Первое начало термодинамики. Теплоемкость, ее зависимость от пути. C_p и C_v , их связь.

2. Уравнение равновесного адиабатического процесса для идеального газа. Свойства адиабаты и изотермы на PV -диаграмме.

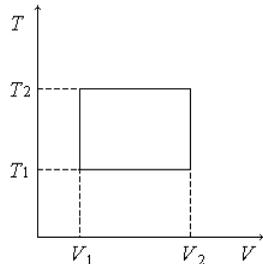
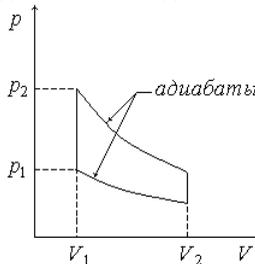
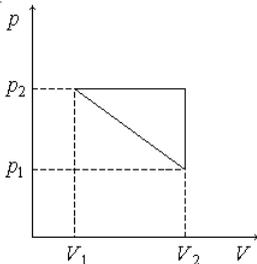
3. Цикл Карно. Теорема Карно. Термодинамическое определение энтропии.

4. Основное термодинамическое равенство. Основное термодинамическое неравенство.

5. Связь между термическим и калорическим уравнениями состояния.

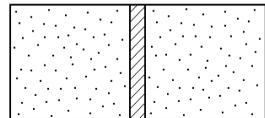
6. Общие условия термодинамического равновесия. Установление равновесия в изолированной системе. Установление равновесия при $T = const.$, $V = const.$, $N_i = const.$; при $T = const.$, $P = const.$, $N_i = const.$

1.1. Определить КПД циклов, изображенных на диаграммах, если рабочим телом является одноатомный идеальный газ.



1.2. Нагревается или охлаждается газ, если он расширяется по закону $pV^2 = const$? Найти теплоемкость процесса.

1.3. Найти частоту малых колебаний поршня в цилиндре с идеальным газом, считая процесс изотермическим. Указать качественно критерий изотермичности и квазиравновесности. В положении равновесия давления в правых и левых половинах и их объемы одинаковы и равны p и V .



1.4. Цилиндрический, горизонтально расположенный сосуд посередине перегороден теплонепроницаемым подвижным поршнем. Слева и справа от поршня в сосуде находится по одному моллю одного и того же идеального одноатомного газа. Начальная температура газа слева и справа равна T_0 . Газ, находящийся слева, квазиравновесно нагрели. Найти установившиеся температуры в левой и правой частях сосуда и количество подведенного тепла, если объем газа в правой части сосуда уменьшился в два раза.

1.5. Моль одноатомного идеального газа находится в цилиндрическом сосуде с подвижным поршнем. Начальные объем и давление газа равны V_0 и p_0 . Газ адиабатически расширяется до объема V_1 . Какое количество теплоты нужно сообщить газу, чтобы он нагрелся до начальной температуры, если последний процесс проводить при постоянном давлении. Найти конечный объем, занимаемый газом, и работу, которую он совершил.

1.6. Моль газа Ван-дер-Ваальса расширили в изотермических условиях от V_1 до V_2 . Температура газа равна T . Найти: а) количество подведенного к газу тепла, б) изменение внутренней энергии, в) изменение энтальпии.

1.7. Учитывая соотношение $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$, получить выражение

для изменения энтропии 1 моля неидеального газа, подчиняющегося уравнению состояния $p(V-B) = RT$. Начальные объем и температура V_1 и T_1 , конечные – V_2 и T_2 . $C_V = a + bT$.

1.8. Сосуд объемом V_0 , заполненный аргоном при температуре T_0 и давлении p_0 , привели в тепловой контакт с медной пластиной, имеющей температуру T_1 . Теплоемкость пластины равна C . Найти установившуюся температуру и изменение энтропии, если газ поддерживается при постоянном давлении. Система (сосуд + пластина) теплоизолирована, теплоемкостью сосуда и термическим расширением меди пренебречь.

Задание 2.

Распределение Максвелла

Вопросы к коллоквиуму.

1. Вывод распределения Максвелла.
2. Средние значения скорости V_x и $|V|$ в равновесном газе.
3. Средние значения квадрата скорости и кинетической энергии в равновесном газе.
4. Поток частиц. Давление и температура идеального газа.

2.1. Частицы массы m вылетают из точечного источника. Вероятность обнаружить частицу летящей со скоростью v под углом θ к оси z задается выражением:

$$dW(v,\theta) = A \exp(-mv^2/2kT) v^3 \cos\theta \sin\theta dv d\theta, \text{ где } 0 \leq v \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi/4.$$

Найти: 1) нормировочный коэффициент A ,

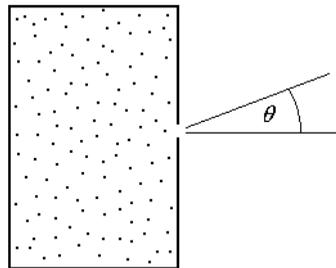
2) среднее значение $p^2 = p_x^2 + p_y^2$.

2.2. Пленки некоторых нерастворимых органических кислот и спиртов на воде можно моделировать идеальным двумерным газом. Написать распределение по скоростям в таком газе в декартовых и полярных координатах. Определить среднюю энергию одной молекулы.

2.3. Найти число молекул, соударяющихся со стенкой сосуда единичной площади за единицу времени в интервале углов $\theta \div \theta + d\theta$.

2.4. При какой температуре число молекул азота, имеющих скорость в интервале 1000 м/с - 1010 м/с, максимально?

2.5. Сосуд объема V , в котором находится одноатомный газ при температуре T , помещен в вакуум. В стенке сосуда имеется маленькое отверстие площадью s . Определить:



1) среднюю кинетическую энергию вылетающих молекул,

2) закон изменения давления в сосуде, если газ поддерживается при постоянной температуре,

3) когда отверстие можно считать "маленьким"?

4) требуется ли подвод или отвод тепла для того, чтобы поддерживать газ при постоянной температуре?

2.6. В боковой стенке сосуда с идеальным газом (масса – m , концентрация – n , температура – T) имеется отверстие площади s , закрытое заслонкой. В момент времени $t = 0$ заслонку открывают на короткое время τ . Найти функцию распределения вылетевших частиц по x в момент времени $t \gg \tau$. Как меняется со временем их средняя координата? x направлено от сосуда.

Задание 3.

Микроканонический ансамбль

Вопросы к коллоквиуму.

1. Теорема Лиувилля. Функция распределения микроканонического ансамбля.

2. Число микросостояний системы. Энтропия системы спинов с $s = 1/2$.
3. Энтропия и химический потенциал идеального газа.
4. Тепловое равновесие. Равенство температур частей системы, как следствие микроканонического распределения.
5. Основное термодинамическое равенство.

3.1. Определить и начертить фазовую траекторию для затухающего гармонического осциллятора.

3.2. Даны N спинов $S = 1$. Найти распределение спинов по их суммарной проекции на ось квантования. Рассмотреть случаи $N = 1, 2, 3, 4$. Найти энтропию системы.

3.3. Даны 2 осциллятора с частотами ω и суммарной энергией $4\hbar\omega$. Найти вероятность того, что вся энергия колебательного возбуждения сосредоточена на одном осцилляторе. Найти энтропию системы.

3.4. Частицы движутся в одномерном потенциальном ящике. Насколько изменится энтропия, если ширину ямы увеличить вдвое?

3.5. Найти плотность состояний одного, двух и трех одномерных гармонических осцилляторов с одинаковыми частотами в случае, если осцилляторы обмениваются энергией.

3.6. Найти плотность состояний с данной энергией для частиц газа, для которых энергия связана с импульсом соотношением $E = cp$. c - константа.

Задание 4.

Распределение Гиббса. Распределение Больцмана.

Вопросы к коллоквиуму.

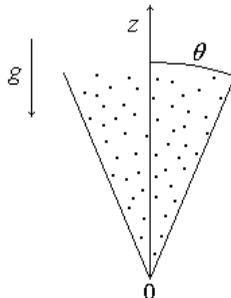
1. Распределение Гиббса (вывод).
2. Распределения Максвелла и Больцмана как частные случаи распределения Гиббса. Барометрическая формула.
3. Частицы со спином $1/2$ в магнитном поле. Закон Кюри.
4. Дипольный момент во внешнем электрическом поле. Закон Кюри.

4.1. Даны молекулы с 12 колебательными степенями свободы с одинаковыми частотами $\omega = 10^{14}$ рад/сек. Сравнить число невозбужденных молекул и молекул с энергией возбуждения $\hbar\omega$ при комнатной температуре.

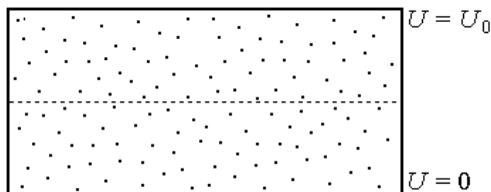
4.2. Система состоит из невзаимодействующих частиц. Каждая частица может находиться в трех невырожденных состояниях, энергии которых равны $0, E, 2E$. Определить температуру системы, если во втором состоянии находится $2/7$ всего количества частиц.

4.3. Система состоит из двух спинов $1/2$. Энергия взаимодействия спинов $E = (a/2) \cdot [S(S+1) - 3/2]$, где S – значение суммарного спина. Найти заселенность состояний системы с $S = 0$ и $S = 1$ при температуре T .

4.4. Газ находится в коническом сосуде бесконечной высоты в однородном поле тяжести при температуре T . Определить среднюю энергию одной молекулы и теплоемкость газа.



4.5. Газ находится в сосуде, изображенном на рисунке. Посередине сосуда происходит скачок потенциала: в одной половине потенциальная энергия равна U_0 , а в другой нулю. Определить среднюю энергию и теплоемкость газа (задача является классическим аналогом двухуровневой системы).



4.6. Газ находится в цилиндрическом сосуде высотой H и радиуса R в однородном поле тяжести при температуре T . Масса одной молекулы газа равна m . В верхней половине боковой стенки цилиндра имеется очень узкая щель высоты $H/2$ и ширины l . Найти число частиц, вылетающих через щель из сосуда за одну секунду, если количество молекул в сосуде поддерживается постоянным и равным N . Газ во время процесса истечения остается в равновесии.

4.7. Рассчитать центр тяжести столба газа высотой H в поле тяжести Земли. Ускорение земного тяготения и температуру считать постоянными.

Задание 5.

Статистическая сумма. Термодинамические функции. Теплоемкость.

Вопросы к коллоквиуму.

1. Статистическая сумма идеального одноатомного газа. Внутренняя энергия, свободная энергия Гельмгольца и энтропия идеального газа.

2. Гармонический осциллятор и его статистическая сумма в классическом и квантовом рассмотрении. Вымораживание колебательных степеней свободы и их вклад в теплоемкость C_V .

3. Классический и квантовый ротатор в термостате. Температура вымораживания.

4. Энергия и теплоемкость на одну степень свободы. Теорема о равномерном распределении.

5.1. Двумерный гармонический квантовый осциллятор обладает уровнями энергии $E = \hbar\omega(n+1)$ с кратностью вырождения $g = n + 1$. Определить статистическую сумму для системы N таких не взаимодействующих осцилляторов.

5.2. Энергетические уровни некоторой системы расположены так: невырожденное основное состояние и зона со сплошным спектром, отстоящая от основного состояния на δ . Плотность уровней в зоне постоянна и равна ε . Найти вероятность системе находится в зоне и среднюю энергию системы при температуре T .

5.3. По поверхности диска свободно движутся молекулы, находящиеся в поле притяжения некоторого центра, расположенного в середине диска. Потенциальная энергия молекул равна αr^2 , где r – расстояние до центра. Радиус диска R настолько велик, что $\alpha R^2 \gg kT$. Температура – T . Число молекул – N . Найти свободную энергию молекул, энергию и теплоемкость.

5.4. В закрытом сосуде находится 1 моль идеального газа трехатомных нелинейных молекул ABC. Под действием света происходит полная диссоциация молекул ABC: $ABC \rightarrow A + BC$. Найти суммарную теплоемкость газа в сосуде до и после воздействия света. Температура газа намного превышает характеристические колебательные температуры молекул ABC и BC.

5.5. Основное электронное состояние атомарного фтора 2P расщеплено спин-орбитальным взаимодействием на два состояния: $^2P_{3/2}$ ($g = 4$) и $^2P_{1/2}$ ($g = 2$). Расщепление равно 404 см^{-1} . Определить населенность верхнего состояния и теплоемкость атомарного фтора при 300 К .

5.6. Определить теплоемкость газообразного молекулярного брома при $T = 600 \text{ К}$, считая его идеальным газом. Необходимые данные взять из справочника. Каковы вклады поступательного, вращательного и колебательного движения в теплоемкость?

5.7. Найти энергию, которую необходимо затратить на полную диссоциацию на атомы 1 моля молекулярного кислорода при постоянных температуре и давлении. Энергия разрыва связи равна ε . Колебания O_2 не возбуждены. Температура равна T . Число Авогадро – N_A .

5.8. Статистическая сумма неидеального газа из N молекул, находящегося в объеме V при температуре T , имеет вид: $Z = A(VT^{3/2}/N)^N \cdot (1 + N^2(C/T - B)/N)$, где A, B, C – константы. Найти давление газа.

Задание 6.

Явления переноса.

Вопросы к коллоквиуму.

1. Распределение по длинам и временам свободного пробега молекул в максвелловском газе.
2. Коэффициенты:
 - а) вязкости,
 - б) диффузии,
 - в) теплопроводностив квазиравновесном почти идеальном газе.
3. Биномиальное распределение. Соотношение Эйнштейна $x^2 \sim Dt$.

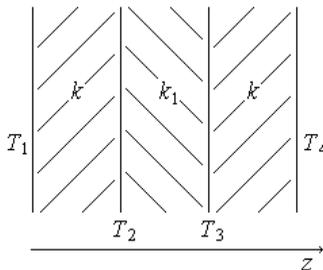
6.1. Оценить число столкновений в секунду одной молекулы азота при $p = 1$ атм, $T = 300$ К, а также длину свободного пробега и коэффициент диффузии.

6.2. Идет перенос тепла между двумя плоскими стенками, находящимися при температурах T_1 и T_2 . Расстояние между стенками - d . Длина свободного пробега - λ . $\lambda \gg d$. Плотность газа n . Оценить максимальный поток тепла.

6.3. Диск подвешен горизонтально в газе на упругой нити. Под ним на расстоянии d находится такой же диск, который приводят во вращение с угловой частотой ω . Определить, на какой угол φ повернется верхний диск. Модуль кручения нити f ($M = f\varphi$, где M – момент сил). Радиус дисков

R . Плотность газа n . Масса молекулы m , средняя скорость \bar{V} . $d \ll \lambda$, где λ – длина свободного пробега.

6.4. Три широких пластины, толщиной d каждая, сложены, как показано на рисунке.



Коэффициенты теплопроводности равны k , k_1 , k . Свободные поверхности пластин поддерживаются при температурах T_1 и T_4 . Найти

температуры T_2 и T_3 в местах контакта разнородных пластин. Нарисовать график зависимости температуры от координаты z , если $T_4 > T_1$ и $k_1 > k$.

6.5. По очень длинной нити с радиусом a , с электрическим сопротивлением на единицу длины ρ течет ток I . Коаксиально нити расположена длинная тонкая труба с радиусом R , стенка которой поддерживается при температуре T_0 . Между стенкой и нитью находится газ. Найти установившуюся температуру у поверхности нити.

6.6. Найти распределение температуры в пространстве между двумя концентрическими сферами с радиусами R_1 и R_2 , заполненным проводящим тепло однородным веществом, если температуры обеих сфер постоянны и равны T_1 и T_2 . Теплопроводность вещества от температуры не зависит.

Учебно-методическое обеспечение дисциплины

Образцы вопросов для подготовки к экзамену

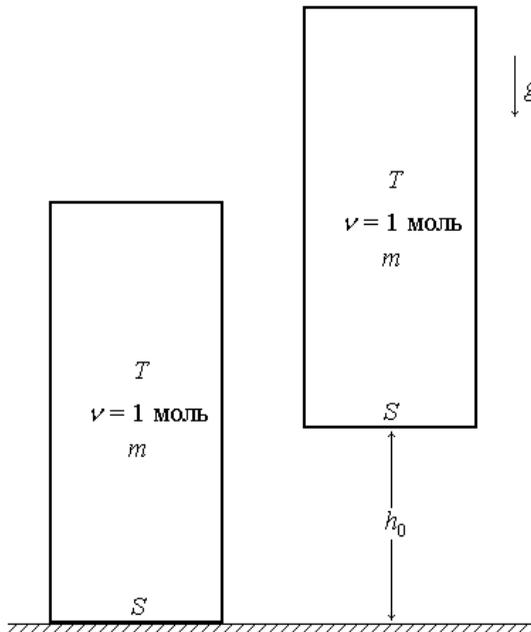
1. Первое начало термодинамики. Теплоемкость, ее зависимость от пути. C_p и C_v , их связь.
2. Уравнение равновесного адиабатического процесса для идеального газа. Свойства адиабаты и изотермы на PV -диаграмме.
3. Цикл Карно. Теорема Карно. Термодинамическое определение энтропии.
4. Основное термодинамическое равенство. Основное термодинамическое неравенство.
5. Связь между термическим и калорическим уравнениями состояния.
6. Общие условия термодинамического равновесия. Установление равновесия в изолированной системе. Установление равновесия при $T = const$, $V = const$, $N_i = const$; при $T = const$, $p = const$, $N_i = const$.
7. Вывод распределения Максвелла.
8. Средние значения скорости V_x и $|V|$ в равновесном газе.
9. Средние значения квадрата скорости и кинетической энергии в равновесном газе.
10. Поток частиц. Давление и температура идеального газа.
11. Теорема Лиувилля. Функция распределения микроканонического ансамбля.
12. Число микросостояний системы. Энтропия системы спинов с $s = 1/2$.
13. Энтропия и химический потенциал идеального газа.
14. Тепловое равновесие. Равенство температур частей системы, как следствие микроканонического распределения.

15. Основное термодинамическое равенство.
16. Распределение Гиббса (вывод).
17. Распределения Максвелла и Больцмана как частные случаи распределения Гиббса. Барометрическая формула.
18. Частицы со спином $1/2$ в магнитном поле. Закон Кюри.
19. Дипольный момент во внешнем электрическом поле. Закон Кюри.
20. Статистическая сумма идеального одноатомного газа. Внутренняя энергия, свободная энергия Гельмгольца и энтропия идеального газа.
21. Гармонический осциллятор и его статистическая сумма в классическом и квантовом рассмотрении. Вымораживание колебательных степеней свободы и их вклад в теплоёмкость C_V .
22. Классический и квантовый ротатор в термостате. Температура вымораживания.
23. Энергия и теплоёмкость на одну степень свободы. Теорема о равнораспределении.
24. Распределение по длинам и временам свободного пробега молекул в максвелловском газе.
25. Коэффициенты: а) вязкости, б) диффузии, в) теплопроводности в квазиравновесном почти идеальном газе.
26. Биномиальное распределение. Соотношение Эйнштейна $\chi^2 \sim Dt$.

Примеры задач на контрольных работах и на экзаменах

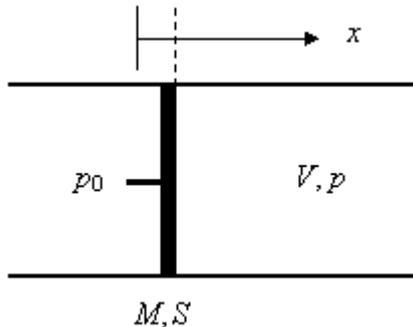
Первая контрольная работа

1. (100 б.) Два одинаковых очень высоких сосуда установлены вертикально так, что основание одного находится выше основания другого на величину h_0 . В каждом сосуде находится один моль идеального газа с массой молекул m . Сколько газа нужно добавить в один из сосудов, чтобы потенциальные энергии газов сравнялись? Температура газов поддерживается одинаковой и постоянной. Ускорение свободного падения g не зависит от высоты.

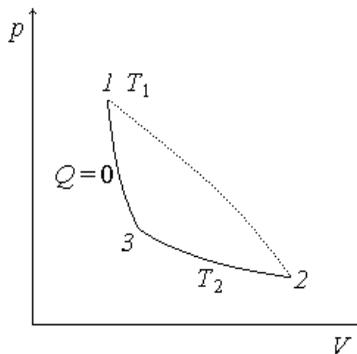


2. (120 б.) С одним молем идеального газа происходит равновесный процесс, при котором произведение плотности числа частиц n на среднюю абсолютную скорость молекулярного движения $\langle v \rangle$ остается постоянным. Известна молярная теплоемкость при постоянном объеме c_V . Найти молярную теплоемкость газа в этом процессе.

3. (140 б.) В горизонтальном, закрытом с одного конца цилиндре площади S находится подвижный поршень массы M . Закрытая часть цилиндра заполнена идеальным газом с показателем адиабаты γ . Вне цилиндра поддерживается постоянное давление p_0 . В положении равновесия объем газа в цилиндре равен V_0 . Считая процесс в газе адиабатическим, найти период малых колебаний поршня.

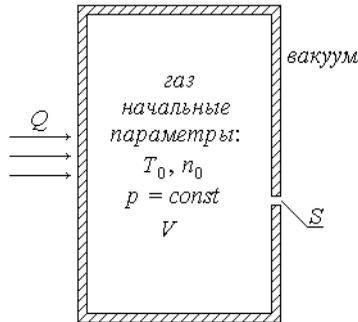


4. (160 б.) Идеальный одноатомный газ в количестве ν молей, имеющий температуру T_1 , расширяется без подвода теплоты в необратимом процессе $1-2$. В результате его температура становится равной T_2 . Затем газ квазистатически сжимается: сначала изотермически ($2-3$), а затем адиабатически ($3-1$), возвращаясь в исходное состояние. В процессе сжатия затрачивается работа A . Найти изменение энтропии при расширении.



5. (180 б.) В сосуде объемом V , содержащем газ, проделано небольшое отверстие площадью S . Снаружи сосуда поддерживается вакуум.

Начальная температура газа T_0 , его плотность n_0 . Сосуд подогревают таким образом, что в нем все время поддерживается постоянное давление газа. За какое время газ покинет сосуд?



Решение первой контрольной работы

1. Очевидно меньше потенциальная энергия газа в том сосуде, который расположен ниже. Именно в этот сосуд необходимо добавить некоторое количество газа (пусть добавка составит $\Delta \nu$ молей), чтобы значения потенциальной энергии в двух сосудах сравнялись.

Потенциальная энергия частицы массы m на высоте h равна

$$u = mgh.$$

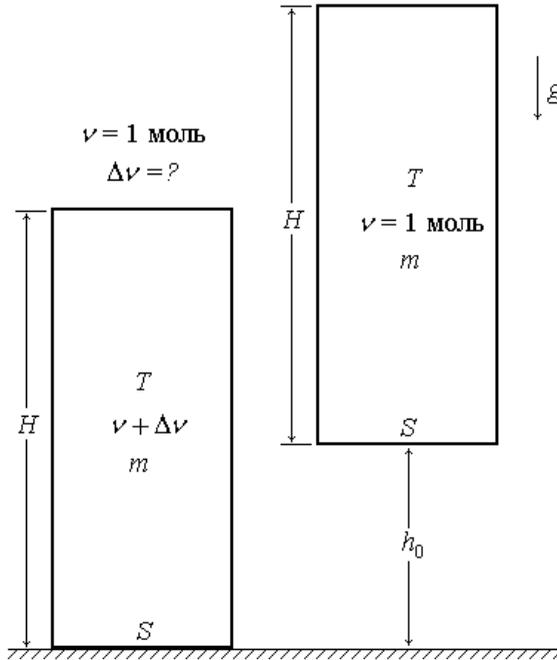
Распределение молекул газа по высоте определяется распределением Больцмана

$$dW = \frac{1}{Z} \exp(-mgh / kT),$$

где Z – статистическая сумма. Она находится из условия нормировки. Для левого, более низко расположенного сосуда она равна:

$$Z_1 = \int_0^{\infty} \exp(-mgh / kT) S dh = \frac{kT}{mg} S.$$

Здесь предполагается, что сосуды имеют очень большую высоту H .



Аналогично для другого сосуда статистическая сумма равна

$$Z_2 = \int_{h_0}^{\infty} \exp(-mgh / kT) S dh = \frac{kT}{mg} S \exp(-mgh_0 / kT).$$

Зная статистическую сумму, можно по формуле

$$U = \nu RT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$$

вычислить энергию газа.

Потенциальная энергия газа в левом сосуде равна

$$U_1 = (\nu + \Delta\nu)RT.$$

В правом сосуде потенциальная энергия равна

$$U_2 = \nu RT \left(1 + \frac{mgh_0}{kT} \right).$$

Из условия равенства энергий после добавки порции газа в левый сосуд находим число добавленных молей

$$U_1 = U_2 \Rightarrow (\nu + \Delta\nu)RT = \nu RT \left(1 + \frac{mgh_0}{kT} \right) \Rightarrow \Delta\nu = \nu \frac{mgh_0}{kT}.$$

2. Абсолютная средняя скорость молекулярного движения $\langle v \rangle$ для идеального газа равна

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

По условию задачи

$$n \cdot \langle v \rangle = \text{const.}$$

Отсюда следует, что

$$n\sqrt{T} = \text{const}$$

или (с учетом того, что концентрация атомов $n = N_A/V$, где N_A – число Авогадро, V – молярный объем),

$$V = A\sqrt{T} \quad (A - \text{постоянная}).$$

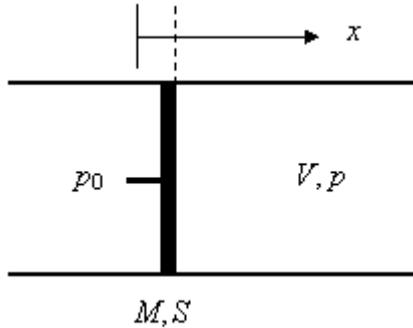
Теплоемкость идеального газа в рассматриваемом процессе равна

$$C = C_V + p \frac{dV}{dT} = C_V + p \frac{A}{2\sqrt{T}} = C_V + p \frac{V}{2T} = C_V + \frac{R}{2}.$$

3. При отклонении от положения равновесия, в котором координату x будем полагать равной нулю, на поршень действует направленная вдоль оси x сила

$$F_x = (p_0 - p) S,$$

где p – давление в закрытой части цилиндра.



Эта сила является геометрической суммой сил, действующих на поршень с обеих сторон. Так как давление газа всегда направлено по внутренней нормали к поверхности объема, внутри которого заключен газ, то сила, вызванная давлением p_0 , сонаправлена оси x , а сила, вызванная давлением p , имеет направление, противоположное оси x . Учитывая адиабатичность процесса в замкнутой части объема, можно записать следующее соотношение:

$$p_0 V_0^\gamma = p V^\gamma,$$

где V – объем закрытой части цилиндра.

Так как $V = V_0 - Sx$, то

$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 - Sx} \right)^\gamma.$$

Учитывая малость колебаний поршня и разлагая p в ряд Тейлора по степеням x , получаем:

$$p = p_0(1 + \gamma Sx/V_0);$$

$$p_0 - p = -p_0 \gamma Sx/V_0.$$

Тогда второй закон Ньютона для поршня имеет вид:

$$Mx + \frac{p_0 S x}{V_0} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{p_0 S x}{M V_0} = 0 \Leftrightarrow x + \omega^2 x = 0.$$

Отсюда находим частоту колебаний поршня

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0 S^2}{M V_0}},$$

и соответствующий период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{S} \sqrt{\frac{M V_0}{p_0}}.$$

4. Согласно второму началу термодинамики энтропия – функция состояния. Это означает, что изменение энтропии при переходе системы из одного равновесного состояния в другое (также равновесное) не зависит от процесса. Является ли процесс перехода равновесным, или процесс неравновесный, результат один и тот же: разность значений энтропии в конечном и начальном состояниях одинакова. Из этого следует, что при вычислении изменения энтропии реальный процесс может быть заменен на любой подходящий равновесный процесс или на несколько равновесных процессов. Необходимость такой замены связана с математической формулировкой второго начала:

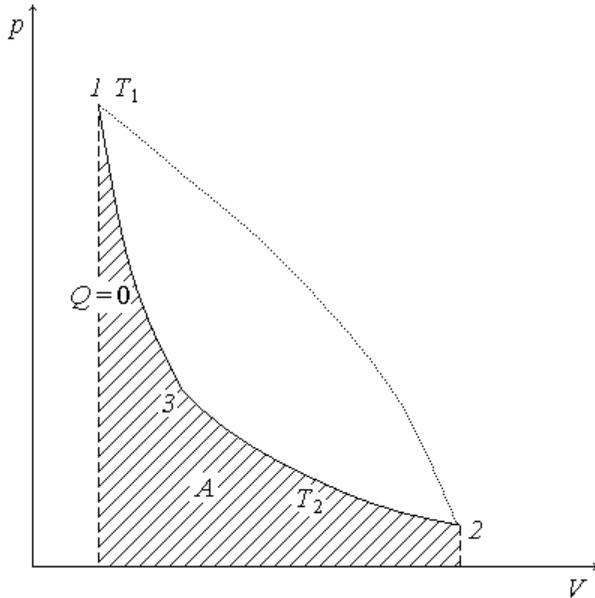
$$\Delta S = S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{dQ}{T_e},$$

где T_e – температура теплового резервуара, из которого система получает порцию теплоты dQ . Строгое неравенство имеет место для неравновесных процессов; равенство выполняется только в случае равновесных процессов. Следовательно, вычислить разность значений энтропии в конечном и начальном состояниях системы можно, рассматривая лишь равновесные процессы.

В данной задаче переход из состояния 1 в состояние 2 неравновесный. Заменяем его на следующий равновесный процесс: вначале газ адиабатически расширяется – путь перехода (1-3), а затем происходит

изотермическое расширение газа – путь (3-2). Тогда искомое изменение энтропии равно

$$\Delta S = \Delta S_{13} + \Delta S_{32}.$$



При адиабатическом расширении газа его энтропия не изменяется:

$$\Delta S_{13} = 0.$$

В изотермическом процессе 3-2 изменение энтропии равно

$$\Delta S_{32} = \int_3^2 \frac{dQ}{T} = \frac{Q_{32}}{T_2}.$$

По условию рассматривается идеальный газ. Его внутренняя энергия – функция только температуры. Поэтому согласно первому началу термодинамики подводимая к газу теплота в изотермическом процессе идет на работу газа:

$$Q_{32} = A_{32}.$$

Задана работа по сжатию газа при переходе из состояния 2 в состояние 1. Численно она равна работе газа в результате равновесного перехода 1-3-2. Работа A_{32} равна разности всей работы и работы при адиабатическом расширении:

$$A_{32} = A - A_{13}.$$

Работа ν адиабатическом процессе совершается за счет внутренней энергии:

$$A_{13} = -\Delta U_{13} = U_1 - U_3.$$

Для идеального газа имеем

$$U_1 - U_3 = \nu c_V (T_1 - T_2).$$

(Точка 3 лежит на изотерме с температурой T_2 .)

Таким образом, находим

$$Q_{32} = A - \nu c_V (T_1 - T_2).$$

Искомое изменение энтропии равно

$$\Delta S = \frac{A}{T_2} - \nu c_V \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right).$$

5. Будем считать, что сосуд тонкостенный. Тогда частицы будут вылетать через малое отверстие в стенке сосуда в полусферу. Распределение их по направлениям будет изотропным. В этом случае плотность потока частиц через малое отверстие определяется по формуле

$$j = \frac{1}{4} n \bar{v},$$

где n – плотность числа частиц газа в сосуде (она меняется с течением времени из-за вылета частиц из сосуда); \bar{v} – средняя скорость теплового движения частиц в сосуде. Последняя величина определяется по формуле

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Поскольку давление в сосуде поддерживается постоянным а плотность числа частиц с течением времени уменьшается, то температура газа в сосуде увеличивается. Это следует из термического уравнения состояния для идеального газа

$$p = nkT.$$

Записывая это уравнение в начальный момент времени

$$p = n_0 k T_0$$

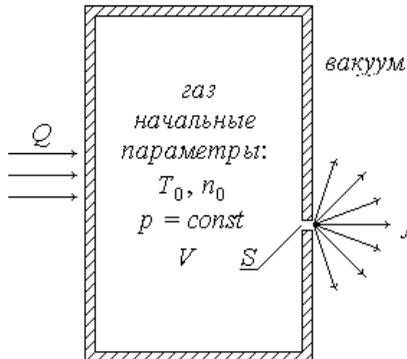
и деля одно уравнение на другое, найдем

$$T = T_0 \frac{n_0}{n}.$$

Исключим температуру из выражения для средней скорости теплового движения частиц и получим

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT_0}{\pi m} \frac{n_0}{n}} = \bar{v}_0 \sqrt{\frac{n_0}{n}}.$$

Здесь \bar{v}_0 – средняя скорость теплового движения частиц в сосуде в начальный момент времени.



В результате выражение для плотности потока частиц примет вид:

$$j = \frac{1}{4} \bar{v}_0 \sqrt{nn_0} = j_0 \sqrt{\frac{n}{n_0}},$$

где j_0 – плотность потока частиц в начальный момент времени.

Составим балансовое уравнение (фактически закон сохранения массы):

$$V \frac{dn}{dt} = -jS = -j_0 \sqrt{\frac{n}{n_0}} S,$$

Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение решается с помощью метода разделения переменных:

$$\frac{dn}{\sqrt{n}} = -\frac{j_0 S}{V \sqrt{n_0}} dt.$$

Начальное условие:

$$n = n_0 \text{ при } t = 0.$$

Интегрирование дает

$$\sqrt{n} - \sqrt{n_0} = -\frac{j_0 S}{2V \sqrt{n_0}} t.$$

Отсюда можно найти зависимость от времени плотности числа частиц в сосуде:

$$n = n_0 \left(1 - \frac{j_0 S}{2V n_0} t \right)^2.$$

Время, за которое газ вылетит из сосуда, равно

$$t = \frac{2Vn_0}{j_0 S} = \frac{8V}{\bar{v}_0 S}.$$

Вторая контрольная работа

1. (100 б.) На какой высоте содержание водорода в воздухе удваивается по сравнению с содержанием углекислого газа? Среднюю по высоте температуру считать равной 20 °С.

2. (120 б.) Квантовая система из N неподвижных двухуровневых частиц с разностью энергий между уровнями ε имеет при $\varepsilon \gg kT$ следующее значение средней энергии

$$\langle \varepsilon \rangle = 3N\varepsilon \exp(-\varepsilon / kT).$$

Чему равно вырождение верхнего уровня, если нижний уровень двукратно вырожден?

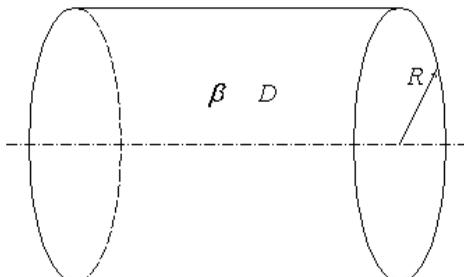
$$\begin{array}{l} \text{-----} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon \\ \quad \quad \quad \quad g_2 = g \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{-----} \quad \varepsilon_1 = 0 \\ \quad \quad \quad \quad g_1 = 2 \end{array}$$

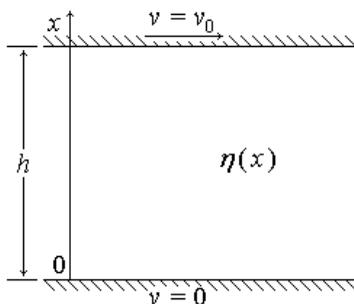
3. (150 б.) В закрытом сосуде находится один моль двухатомного газа. При повышении температуры доля диссоциировавших на атомы молекул равна $\alpha(T)$. Энергия диссоциации молекулы равна ε_0 . Определить теплоемкость газа при температуре T . Температура значительно превышает характеристическую температуру колебаний.

4. (160 б.) Длинное цилиндрическое тело радиуса R находится в вакууме. Внутри тела равномерно по его объему выделяется газ. Количество газа, выделяемого за единицу времени в единице объема, постоянно и равно β . Коэффициент диффузии газа в материале тела равен

D. Найти стационарное распределение газа в теле. Чему равна концентрация газа на оси цилиндрического тела?



5. (170 б.) Одна пластина покоится, другая движется параллельно ей со скоростью v_0 . Между пластинами находится вязкая неоднородная жидкость с коэффициентом вязкости $\eta(x)$, обратно пропорциональным x , где x – расстояние от первой пластины. Найти, как скорость жидкости зависит от x в стационарном случае. Расстояние между пластинами h .



Решение второй контрольной работы

1. В соответствии с распределением Больцмана концентрация молекул водорода и углекислого газа меняется с высотой по формуле

$$n_i = n_{i0} \exp(-\mu_i g h / RT),$$

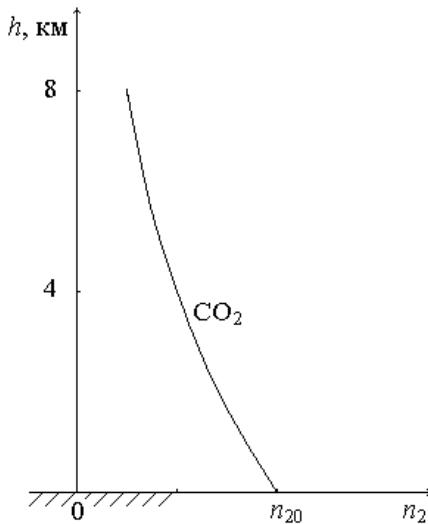
где $i = 1, 2$ (соответственно для H_2 с $\mu_1 = 2$ и CO_2 с $\mu_2 = 44$).

Изменение относительного содержания H_2 и CO_2 с высотой будет определяться равенством

$$n_1/n_2 = n_{10}/n_{20} \exp((\mu_2 - \mu_1)gh/RT),$$

откуда находим $h = RT \ln 2 / (\mu_2 - \mu_1) g \approx 4$ км.

Комментарий. Молярные массы углекислого газа и водорода различаются в 22 раза. Это сказывается на характере изменения концентрации этих газов с высотой.



Поведение концентрации CO_2 показано на рисунке. Каждые примерно 4 км концентрация этого газа падает в два раза. Концентрация H_2 уменьшается в два раза на 80-ти км. Поэтому изменение относительного содержания в атмосфере углекислого газа и водорода связано с более быстрым падением концентрации углекислого газа.

2. Квантовая система из N неподвижных двухуровневых частиц обладает средней энергией

$$\bar{E} = 3N\varepsilon \exp(-\varepsilon / kT).$$

Среднее значение энергии, приходящейся на одну частицу, равно

$$\bar{\varepsilon} = 3\varepsilon \exp(-\varepsilon / kT).$$

По определению среднего имеем

$$\bar{\varepsilon} = \sum_i \varepsilon_i W_i = \varepsilon_1 W_1 + \varepsilon_2 W_2 = \varepsilon W_2,$$

так как энергия первого уровня равна нулю $\varepsilon_1 = 0$, а энергия второго уровня имеет значение ε .

Вероятность обнаружить частицу на втором уровне энергии определяется распределением Гиббса:

$$W_2 = \frac{g \exp(-\varepsilon / kT)}{2 + g \exp(-\varepsilon / kT)}.$$

С учетом неравенства $\varepsilon \gg kT$ распределение принимает вид:

$$W_2 \approx \frac{1}{2} g \exp(-\varepsilon / kT).$$

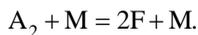
В результате средняя энергия частицы равна

$$\bar{\varepsilon} \approx \frac{1}{2} \varepsilon g \exp(-\varepsilon / kT).$$

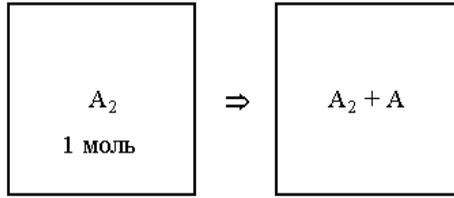
Сравнение двух выражений для средней энергии дает равенство, из которого находим статистический вес g (вырождение) второго уровня:

$$\frac{1}{2} \varepsilon g \exp(-\varepsilon / kT) = 3\varepsilon \exp(-\varepsilon / kT) \Rightarrow g = 6.$$

3. В сосуде при температуре T происходит реакция диссоциации:



Пусть ν_1 – число молей атомов A , возникших в результате диссоциации молекул A_2 ; ν_2 – число молей непродиссоциировавших молекул.



По условию задачи первоначально в объеме находился один моль газа. Поэтому будет выполняться равенство:

$$v_1 / 2 + v_2 = 1.$$

Степень диссоциации определяется как доля числа продиссоциировавших молекул от общего числа молекул:

$$\alpha = \frac{v_1 / 2}{v_1 / 2 + v_2}.$$

Из двух равенств находим

$$v_1 = 2\alpha, \quad v_2 = 1 - \alpha.$$

Энергия смеси одноатомного и двухатомного газов равна

$$u = v_2 \frac{7}{2} RT + v_1 \frac{3}{2} RT + \frac{v_1}{2} N_A \varepsilon_0 = \frac{1}{2} (7 - \alpha) RT + \alpha N_A \varepsilon_0.$$

Здесь учтено, что согласно закону равнораспределения энергии по степеням свободы на каждую поступательную и вращательную степень свободы молекулы приходится энергия $kT/2$, а на колебательную степень свободы – энергия kT . Атом, имея три поступательные степени свободы, обладает энергией $3kT/2$. Двухатомная молекула имеет три поступательные степени свободы, две вращательные и одну колебательную. Причем колебательное движение молекулы возбуждено, так как температура газа много выше характеристической температуры колебаний. Поэтому энергия молекулы равна $7kT/2$.

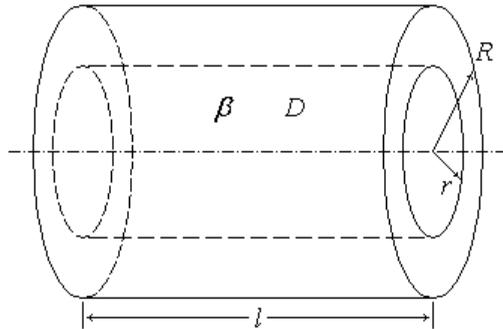
Таким образом, теплоемкость газа в объеме равна

$$C_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{2} (7 - \alpha) R + \frac{d\alpha}{dT} (N_A \varepsilon_0 - RT/2).$$

4. Будем считать, что газ только диффундирует. Тогда его концентрация будет удовлетворять уравнению

$$\partial n / \partial t = D \Delta n + \beta,$$

где Δ – лапласиан. В стационарном случае производная по времени равна нулю. Задача обладает осевой симметрией. Кроме того, тело длинное ($l \gg R$) и можно не учитывать зависимость концентрации газа от координаты вдоль оси тела.



В результате уравнение упрощается и принимает вид

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dn}{dr} \right) + \beta = 0,$$

где r – радиус цилиндрической системы координат.

Данное уравнение можно получить несложным образом, и не зная общего уравнения для концентрации газа. Необходимо лишь написать балансовое уравнение, выделив цилиндрический объем произвольного радиуса $r < R$: сколько газа выделится в выделенном объеме, столько же газа покинет этот объем. Напишем балансовое уравнение:

$$\beta \pi r^2 l = -j 2\pi r l,$$

где плотность диффузионного потока газовой примеси j определяется законом Фика:

$$j = -D \frac{dn}{dr}.$$

Подстановка этого выражения для плотности потока газовой примеси и последующее дифференцирование его по r дают необходимое для решения задачи уравнение. Решение данного уравнения должно удовлетворять граничным условиям:

$$r = 0 \quad |dn/dr| < \infty,$$

$$r = R \quad n = 0.$$

Однократное интегрирование дает

$$r \frac{dn}{dr} = -\frac{\beta r^2}{2D} + A.$$

С учетом первого граничного условия постоянная $A = 0$ и уравнение сводится к виду

$$\frac{dn}{dr} = -\frac{\beta r}{2D}.$$

Последующее интегрирование с учетом второго граничного условия дает распределение концентрации газа в теле

$$n = \frac{\beta}{4D} (R^2 - r^2).$$

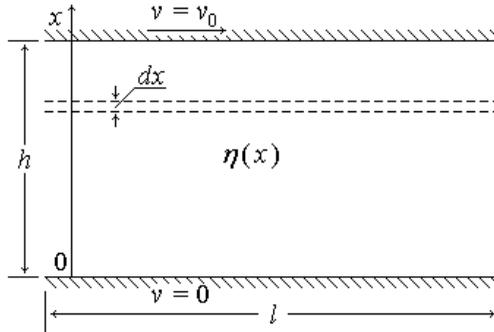
На оси цилиндрического тела концентрация газа равна

$$n = \frac{\beta}{4D} R^2.$$

5. Считаем, что канал, образуемый пластинами, длинный $l \gg h$, так что течение, возникающее в канале под действием движения второй (верхней) пластины, будет одномерным, направленным в ту же сторону, куда движется верхняя пластина. Кроме того, будем считать, давление на входе в канал и выходе из него одно и то же. Единственные движущие силы в рассматриваемой задаче – это силы вязкого трения. В таком случае при стационарном течении напряжение трения τ между слоями жидкости (сила на единицу площади в касательном направлении) не зависит от

координаты x . Это можно показать и непосредственно, выделив элемент объема жидкости длиной l и толщиной dx и рассмотрев проекцию сил, действующих на этот объем жидкости, на направление движения:

$$\tau(x+dx)l - \tau(x)l = 0 \Rightarrow \tau(x+dx) = \tau(x) \Rightarrow \tau(x) = \text{const.}$$



Как следует из элементарной кинетической теории явлений переноса, напряжение трения связано с изменением скорости движения жидкости:

$$\tau(x) = -\eta \frac{du}{dx}.$$

Здесь u – скорость движения жидкости вдоль канала.

Таким образом, решается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{1}{x} \frac{du}{dx} = \text{const.}$$

Из-за прилипания скорость жидкости на нижней пластине равна нулю, на верхней пластине равна v_0 . Граничные условия для решения дифференциального уравнения имеют вид:

$$x = 0 \quad u = 0; \quad x = h \quad u = v_0.$$

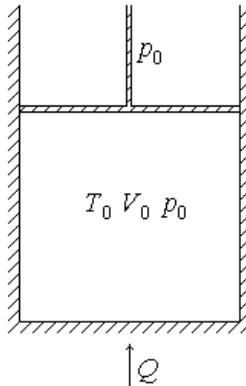
Решение дифференциального уравнения при этих условиях дает параболический профиль скорости:

$$u = v_0 \left(\frac{x}{h} \right)^2.$$

Экзамен

1. (130 б.) Одноатомный идеальный газ адиабатически расширился от объема V_1 до объема V_2 . Как изменится средняя скорость молекул газа?

2. (150 б.) Идеальный газ с постоянным показателем адиабаты γ , находившийся при температуре T_0 и давлении p_0 в объеме V_0 , изобарически нагрели, сообщив ему количество теплоты Q . Как изменится объем газа и его энтропия?



3. (180 б.) В одном из параллельных миров кинетическая энергия частицы связана с импульсом по закону

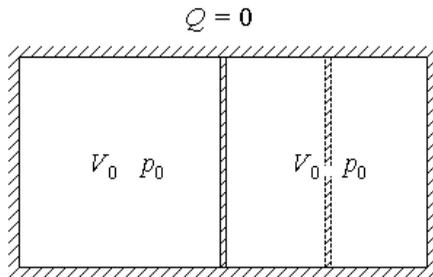
$$E = \alpha p^6,$$

где α – положительная постоянная. Найти термическое и calorическое уравнения состояния одноатомного идеального газа в этом мире. Мир является трехмерным.

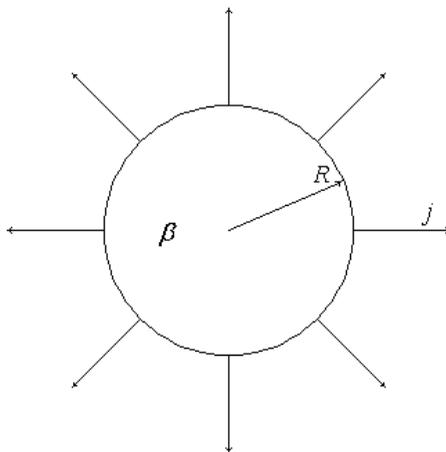
4. (180 б.) Сосуд заполнен смесью двухатомного и трехатомного газов. Трехатомный газ состоит из нелинейных молекул. После размораживания

всех степеней свободы теплоемкость смеси увеличилась в 1,5 раза. Найти отношение количеств молекул газов в сосуде.

5. (220 б.) В цилиндрическом сосуде находится поршень, который может перемещаться без трения. Первоначально поршень делит сосуд на части объемом V_0 каждая. Обе половины сосуда заполнены одинаковым количеством одного и того же идеального газа до давления p_0 . Найти работу, которую нужно совершить, чтобы, медленно двигая поршень, сжать газ в одной из частей сосуда вдвое. Сосуд теплоизолирован. Поршень проводит тепло. Показатель адиабаты газа γ .



6. (120 б.) Шар радиуса R , состоящий из вещества с коэффициентом теплопроводности χ , не зависящим от температуры, находится в вакууме. Внутри шара равномерно по объему выделяется теплота с плотностью тепловыделения β (эрг/(см³с)). Шар представляет собой абсолютно черное тело. Найти температуру в центре шара.



Ценные указания:

(1) Поверхность абсолютно черного тела излучает тепловую энергию по закону Стефана – Больцмана, то есть плотность потока излучаемой тепловой энергии равна

$$j = \sigma T^4 \text{ (эрг/(см}^2\text{с))},$$

где σ – постоянная Стефана – Больцмана, T – абсолютная температура. Плотность потока излучаемой тепловой энергии j представляет собой энергию, излучаемую единицей площади поверхности в единицу времени.

(2) Плотность тепловыделения β представляет собой количество теплоты, выделяющееся в единице объема вещества в единицу времени.

Решение экзаменационной контрольной работы

1. Абсолютная средняя скорость молекулярного движения $\langle v \rangle$ для идеального газа вычисляется по формуле

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

При адиабатическом расширении газа его температура уменьшается, и соответственно уменьшается средняя скорость теплового движения молекул. Уравнение адиабаты идеального газа в переменных p , V имеет вид

$$pV^\gamma = \text{const}.$$

Пользуясь термическим уравнением состояния идеального газа

$$pV = \nu RT,$$

запишем уравнение адиабаты в переменных T , V :

$$TV^{\gamma-1} = \text{const},$$

откуда найдем конечную температуру газа при его адиабатическом расширении:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V}{2V} \right)^{\gamma-1} = T_1 \cdot 2^{-(\gamma-1)},$$

и, следовательно, отношение средних скоростей молекулярного движения:

$$\frac{\langle v_2 \rangle}{\langle v_1 \rangle} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 2^{-(\gamma-1)/2}.$$

Показатель адиабаты одноатомного идеального газа равен $\gamma = 5/3$. Для этого случая отношение абсолютных средних скоростей теплового движения молекул при адиабатическом двукратном увеличении объема газа равен

$$\frac{\langle v_2 \rangle}{\langle v_1 \rangle} = 2^{-1/3}.$$

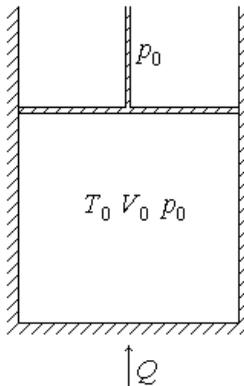
2. Рассматриваемый процесс равновесный, а для равновесных процессов согласно второму началу термодинамики изменение энтропии определяется равенством:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

При изобарическом нагревании газа бесконечно малое количество подводимой теплоты связано с соответствующим изменением температуры соотношением

$$\delta Q = \nu c_p dT,$$

где ν – число молей газа, c_p – его молярная теплоемкость при постоянном давлении.



Подставляя это выражение для элементарного количества теплоты в равенство для dS и интегрируя его от начальной температуры T_0 до конечной температуры T , получим

$$\Delta S = \nu c_p \ln \frac{T}{T_0}.$$

Изменение энтропии определяется отношением конечной и начальной температур. Это отношение найдем по известному количеству подведенной теплоты

$$Q = \nu c_p (T - T_0) = \nu c_p T_0 \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right),$$

откуда следует

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{Q}{\nu c_p T_0}.$$

Неизвестное число молей газа найдем из термического уравнения состояния. Для идеального газа оно имеет вид

$$pV = \nu RT,$$

или в начале процесса

$$p_0 V_0 = \nu RT_0,$$

С учетом соотношения Майера

$$c_p - c_v = R$$

и выражения для показателя адиабаты

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

находим последовательно число молей газа и отношение температур:

$$\nu = \frac{1}{(\gamma-1)c_V} \frac{p_0 V_0}{T_0}, \quad \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Q}{p_0 V_0}.$$

Таким образом, изменение энтропии равно

$$\Delta S = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0 V_0}{T_0} \ln \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Q}{p_0 V_0} \right).$$

Из термического уравнения состояния для идеального газа следует, что в изобарическом процессе отношение объемов газа в два момента времени равно соответствующему отношению температур:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Q}{p_0 V_0}.$$

Таким образом, объем при изобарическом нагреве газа становится равным

$$V = V_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Q}{p_0 V_0} \right).$$

3. Известная зависимость энергии частицы от величины ее импульса позволяет вычислить для нее статистическую сумму:

$$Z = V \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{4\pi V}{3h^3} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha p^6}{kT}\right) d(p^3) = \frac{2\pi V}{3h^3} \sqrt{\frac{\pi kT}{\alpha}}.$$

Здесь использовано распределение Гиббса (его частный случай – распределение Максвелла) для описания распределения частиц по импульсам:

$$dW(\vec{p}) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{d\vec{p}d\vec{r}}{h^3}.$$

Статистическая сумма Z находится из условия нормировки распределения:

$$\int dW(\vec{p}) = 1.$$

Величина $d\vec{p}d\vec{r}$ – элемент объема фазового пространства. С учетом того, что энергия частицы не зависит от координат конфигурационного пространства и является функцией только модуля вектора импульса частицы, интегрирование по координатам конфигурационного пространства дает объем газа V , а в пространстве импульсов вводятся сферические координаты (интегрирование по углам дает множитель 4π). Величина h^3 – элемент объема фазового пространства, отвечающий одному квантовому состоянию частицы (показатель степени «три» соответствует трем степеням свободы частицы одноатомного газа).

По известной статистической сумме можно найти среднюю энергию теплового движения частиц:

$$\bar{E} = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{kT}{2}.$$

Для свободной энергии газа из N частиц имеем формулу:

$$F = -kT \ln \left(\frac{Z^N}{N!} \right).$$

Давление газа равно

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = kT \frac{N}{V}.$$

Это термическое уравнение состояния идеального газа.

4. Молекула двухатомного газа имеет шесть степеней свободы: три поступательных, две вращательных и одну колебательную. Для большинства газов (исключение составляют газообразные водород и дейтерий) вращательные степени свободы молекул возбуждены вплоть до температуры сжижения этих газов. Колебательное движение молекул заморожено при комнатных и более низких температурах. В соответствии с законом равнораспределения энергии по степеням движения средняя энергия молекулы двухатомного газа при замороженных колебательных степенях свободы равна

$$\bar{\varepsilon} = \frac{5}{2} kT.$$

Соответственно теплоемкость двухатомного газа при постоянном объеме имеет значение:

$$C_V^{(2)} = N_2 \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial T} = \frac{5}{2} N_2 k.$$

Здесь N_2 – число молекул двухатомного газа в смеси.

Аналогично вычисляется теплоемкость трехатомного газа. Его молекулы нелинейные. Они имеют девять степеней свободы: три поступательных, три вращательных и три колебательных. В случае замороженных колебательных степеней свободы теплоемкость трехатомного газа при постоянном объеме имеет значение:

$$C_V^{(3)} = \frac{6}{2} N_3 k = 3N_3 k.$$

Здесь N_3 – число молекул трехатомного газа в смеси.

Таким образом, теплоемкость смеси двухатомного и трехатомного газов при постоянном объеме в случае замороженных колебательных степеней свободы равна

$$C_V = C_V^{(2)} + C_V^{(3)} = \frac{5}{2} N_2 k + 3N_3 k.$$

После размораживания колебательных степеней свободы теплоемкость смеси увеличивается (по условию задачи в полтора раза). На каждую колебательную степень свободы приходится энергия, равная

$$\Delta \bar{\varepsilon}_v = kT.$$

Поэтому теплоемкость двухатомного газа при постоянном объеме в этом случае будет иметь значение:

$$C_V^{(2)} = N_2 \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial T} = \frac{7}{2} N_2 k.$$

в соответствии с одной колебательной степенью свободы двухатомной молекулы.

Теплоемкость трехатомного газа при постоянном объеме будет иметь значение:

$$C_V^{(3)} = 6N_3 k$$

в соответствии с тремя колебательными степенями свободы трехатомной молекулы.

Полная теплоемкость смеси двухатомного и трехатомного газов при постоянном объеме в случае размороженных колебательных степеней свободы равна

$$C_V = C_V^{(2)} + C_V^{(3)} = \frac{7}{2} N_2 k + 6N_3 k.$$

Отношение теплоемкостей смеси после размораживания колебательного движения молекул и до его размораживания дает равенство:

$$\frac{\frac{7}{2} N_2 + 6N_3}{\frac{5}{2} N_2 + 3N_3} = 1,5.$$

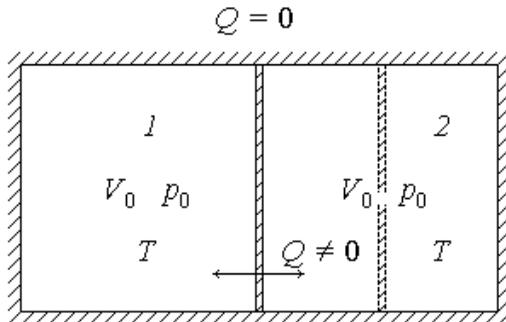
Из этого равенства получаем

$$\frac{N_2}{N_3} = 6.$$

5. Так как система теплоизолирована ($Q = 0$), то согласно первому началу термодинамики работа внешних сил приводит к изменению внутренней энергии системы:

$$A' = \Delta U_1 + \Delta U_2.$$

При этом предполагается, что поршень перемещается без трения.



Для идеального газа бесконечно малое изменение внутренней энергии равно

$$dU = \nu C_V dT.$$

Если теплоемкость C_V считать постоянной, то конечное изменение U равно

$$\Delta U = \nu C_V (T - T_0) = \nu C_V T_0 (T/T_0 - 1) = P_0 V_0 (T/T_0 - 1) / (\gamma - 1),$$

где T_0 – начальная температура газа.

В случае теплопроводящего поршня при его медленном перемещении температуру газа в обеих частях сосуда можно считать одинаковой в любой момент времени. Одинаково также число молей газа. В результате получаем

$$A' = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 2\nu C_V (T - T_0) = 2P_0 V_0 (T/T_0 - 1) / (\gamma - 1).$$

Конечная температура системы может быть найдена из уравнения процесса. Для получения уравнения процесса первое начало

термодинамики записывается в дифференциальной форме для всей системы:

$$2dU + p_1dV_1 + p_2dV_2 = 0.$$

Если подставить сюда выражение для dU через температуру и теплоемкость ($dU = \nu C_V dT$), выразить давление с помощью термического уравнения состояния идеального газа

$$p = \nu RT/V$$

и затем поделить все слагаемые на $2\nu C_V T$, то дифференциальное уравнение примет вид

$$dT/T + (\gamma - 1)/2 \cdot (dV_1/V_1 + dV_2/V_2) = 0.$$

При преобразовании используются соотношение Майера

$$C_p - C_V = R$$

и показатель адиабаты $\gamma = C_p/C_V$. Интегрирование дает уравнение процесса:

$$\ln(T/T_0) + (\gamma - 1)/2 \cdot \ln(V_1 V_2/V_0^2) = 0.$$

Найдем значения экспоненты с показателями, равными правой и левой частям уравнения. Получим равенство

$$T/T_0 = (V_0^2/V_1 V_2)^{(\gamma - 1)/2},$$

определяющее температуру системы в зависимости от соотношения объемов V_1 и V_2 .

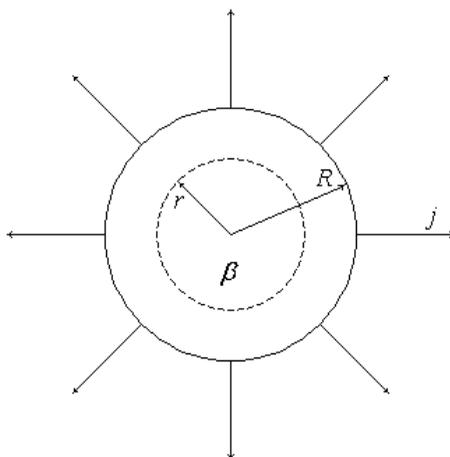
Газ во второй части сосуда сжимается вдвое, и его объем становится равным $V_2 = V_0/2$. Соответственно объем газа в первой части сосуда будет равен $V_1 = 3V_0/2$. В результате конечная температура системы равна

$$T = T_0 (4/3)^{(\gamma - 1)/2}.$$

Находим работу внешних сил

$$A' = 2P_0 V_0 (T/T_0 - 1)/(\gamma - 1) = 2P_0 V_0/(\gamma - 1) ((4/3)^{(\gamma - 1)/2} - 1).$$

6. Благодаря сферической симметрии задачи вектор плотности потока тепла \vec{q} направлен по радиус-вектору \vec{r} , и величина плотности потока тепла q – функция только r . Поэтому полный поток тепла через поверхность произвольной сферы радиуса r ($r < R$) равен произведению плотности потока тепла на площадь сферы на $4\pi r^2$.



Из закона сохранения энергии в стационарном случае полный поток тепла через поверхность сферы равен полному количеству теплоты, которое выделяется в единицу времени внутри выбранной сферы. В противном случае температура внутри нее будет изменяться. Итак, имеем равенство:

$$q4\pi r^2 = \int \beta dV = \frac{4\beta\pi r^3}{3},$$

из которого находим величину плотности потока тепла q на произвольном расстоянии r от центра сферы

$$q = \frac{\beta r}{3}.$$

По закону Фурье плотность потока тепла пропорциональна градиенту температуры и направлена противоположно ему:

$$q = -\chi \frac{dT}{dr}.$$

В результате для нахождения температуры внутри сферы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\beta r}{3\chi}.$$

Для решения этого уравнения необходимо иметь граничное условие. Все тепло, которое выделяется внутри сферы, в стационарном случае будет излучаться с ее поверхности. Таким образом, граничное условие будет иметь вид:

$$\frac{4\beta\pi R^3}{3} = \sigma T^4 4\pi R^2, \quad \text{или} \quad T = \left(\frac{\beta R}{3\sigma}\right)^{1/4} \quad \text{при } r = R.$$

Интегрирование дифференциального уравнения при условии на поверхности сферы позволяет найти распределение температуры в объеме:

$$T = \left(\frac{\beta R}{3\sigma}\right)^{1/4} + \frac{\beta}{6\chi}(R^2 - r^2).$$

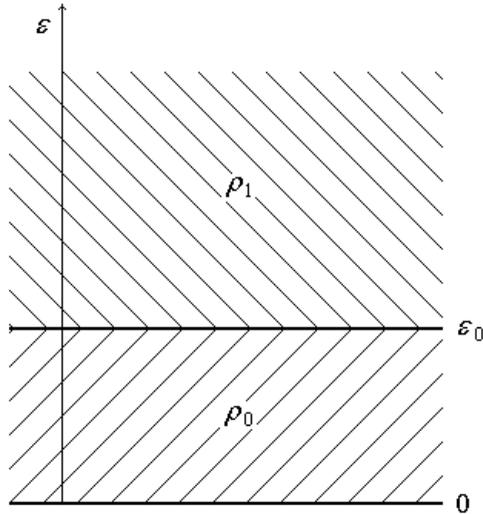
Температура в центре сферы ($r = R$) равна

$$T = \left(\frac{\beta R}{3\sigma}\right)^{1/4} + \frac{\beta R^2}{6\chi}.$$

Перезаменная

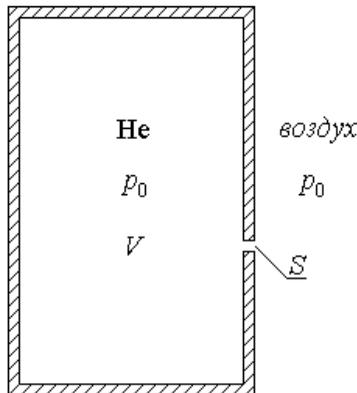
1. (120 б.) В каком случае КПД машины Карно увеличится больше: 1) если поднять на ΔT температуру T_1 нагревателя при неизменной температуре холодильника T_0 или 2) если при неизменной температуре нагревателя T_1 понизить температуру холодильника T_0 на ту же величину ΔT ($T_0 \gg \Delta T$)?

2. (120 б.) Энергетический спектр системы состоит из двух зон. Плотность уровней в первой зоне ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$) равна ρ_0 , а во второй ($\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \infty$) – равна ρ_1 . При какой температуре вероятности обнаружения системы в обеих зонах равны?

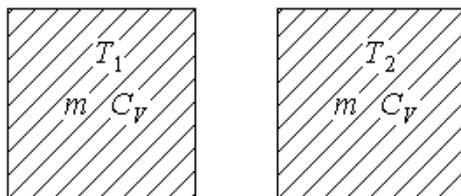


3.(150 б.) Система состоит из четырех осцилляторов с частотой ω . В начальный момент времени суммарная энергия первой пары осцилляторов равна $\hbar\omega$, а второй пары – $2\hbar\omega$. В начальный момент энергией могут обмениваться только осцилляторы внутри первой пары, и только – внутри второй пары. В какой-то момент времени начинается обмен энергией между всеми осцилляторами. На какую величину изменится энтропия системы после установления равновесия? Осцилляторы различимы.

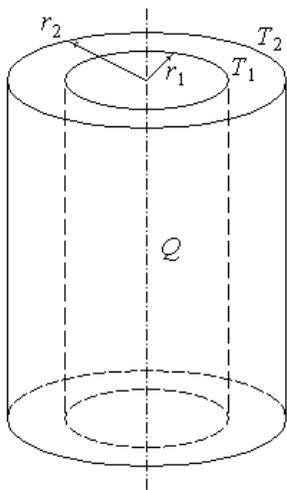
4. (200 б.) В тонкостенном сосуде с гелием объема V пробивают малое отверстие площадью S . Как будет изменяться давление внутри сосуда, если вначале оно равно давлению P_0 окружающего воздуха? Построить график $P(t)$.



5. (240 б.) Два кубика одинаковой массы m из сплава с очень малым изобарическим коэффициентом температурного расширения нагреваются: один – до температуры T_1 , другой – до T_2 ; затем они оба помещаются в адиабатически изолированный сосуд и приводятся в контакт. Рассчитать изменение термодинамических функций S , U и F в результате установления равновесия, если удельная теплоемкость $C_V = \text{const}$.



6. (270 б.) Для измерения теплопроводности газа им заполняется пространство между двумя длинными коаксиальными цилиндрами радиуса r_1 и r_2 . Заполнение производится при невысоком давлении (~ 10 мм рт. ст.), чтобы исключить конвекцию. Внутренний цилиндр нагревается источником тепла с удельной мощностью Q , установившиеся температуры цилиндров t_1 и t_2 измеряются. Найти распределение температуры газа между цилиндрами. Как по заданным параметрам вычислить коэффициент теплопроводности исследуемого газа и рассчитать газокинетический диаметр молекулы для азота?



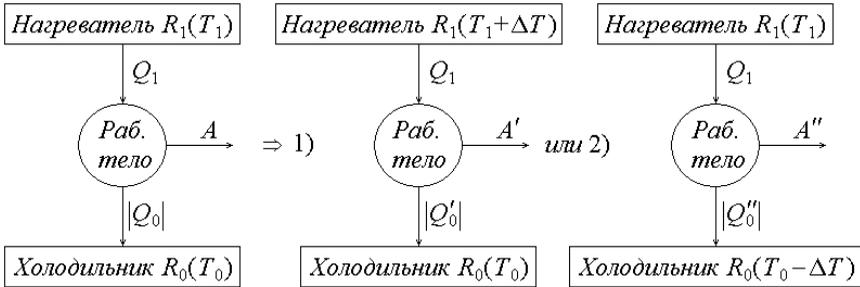
Решение задач переэкзаменовки

1. КПД тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, определяется температурами нагревателя T_n и холодильника T_x :

$$\eta = 1 - \frac{T_x}{T_n}.$$

В первом случае (если поднять на ΔT температуру T_1 нагревателя при неизменной температуре холодильника T_0) КПД машина Карно равен

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_0}{T_1 + \Delta T} = \frac{T_1 - T_0 + \Delta T}{T_1 + \Delta T}.$$



Во втором случае (если при неизменной температуре нагревателя T_1 понизить температуру холодильника T_0 на ту же величину ΔT) КПД машина Карно равен

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_0 - \Delta T_0}{T_1} = \frac{T_1 - T_0 + \Delta T}{T_1}.$$

Отношение значений КПД для двух случаев равно

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{T_1 + \Delta T}{T_1} > 1.$$

Значение КПД тепловой машины Карно увеличивается как при увеличении температуры нагревателя, так и при уменьшении температуры

холодильника. Однако при уменьшении температуры холодильника КПД машины Карно увеличится больше.

2. Спектр энергии системы непрерывный с заданной плотностью уровней. В этом случае распределение Гиббса имеет вид:

$$dW = \frac{1}{Z} \exp(-\varepsilon / kT) \rho_i d\varepsilon.$$

Находим вероятность обнаружить систему в состоянии с энергией $\varepsilon < \varepsilon_0$:

$$W_1 = \frac{1}{Z} \int_0^{\varepsilon_0} \exp(-\varepsilon / kT) \rho_0 d\varepsilon = \frac{\rho_0 kT}{Z} (1 - \exp(-\varepsilon_0 / kT)).$$

Аналогично вычисляем вероятность в состоянии с энергией $\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \infty$:

$$W_2 = \frac{1}{Z} \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \exp(-\varepsilon / kT) \rho_1 d\varepsilon = \frac{\rho_1 kT}{Z} \exp(-\varepsilon_0 / kT).$$

По условию задачи обе вероятности равны:

$$W_1 = W_2.$$

Отсюда получаем соотношение

$$\rho_0 (1 - \exp(-\varepsilon_0 / kT)) = \rho_1 \exp(-\varepsilon_0 / kT)$$

и находим температуру

$$T = \frac{\varepsilon_0}{k \ln \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)}.$$

3. Энергия линейного гармонического осциллятора определяется формулой

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда для первой системы выполняется уравнение

$$E_1 = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) = \hbar\omega,$$

и, следовательно,

$$n_1 = n_2 = 0.$$

Изначально первая система находится в единственном квантовом состоянии, ее энтропия равна нулю:

$$S_1 = 0.$$

Аналогично для второй системы:

$$E_2 = \hbar\omega(n_3 + n_4 + 1) = 2\hbar\omega.$$

Отсюда

$$n_3 + n_4 = 1.$$

Возможные комбинации значений квантовых чисел n_3 и n_4 следующие:

n_3	1	0
n_4	0	1

Две различные комбинации – два различных состояния системы. Первоначальное значение энтропии второй системы $S_2 = k \cdot \ln 2$.

Полная энергия объединенной системы равна

$$E = E_1 + E_2 = 3\hbar\omega.$$

После установления теплового контакта между исходными системами энергия может быть локализована на любом из четырех осцилляторов, что отображается уравнением

$$E_1 = \hbar\omega(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2) = 3\hbar\omega,$$

откуда

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 1.$$

Возможные комбинации значений квантовых чисел объединенной системы приведены в таблице.

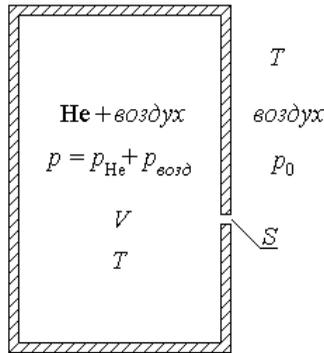
n_1	1	0	0	0
n_2	0	1	0	0
n_3	0	0	1	0
n_4	0	0	0	1

Всего 4 различных комбинаций и, следовательно, 4 разных состояний полной системы. Ее энтропия равна $S = k \cdot \ln 4$. Результирующее изменение энтропии полной системы

$$\Delta S = S - S_1 - S_2 = k \cdot \ln 2.$$

4. Размеры отверстия малы по сравнению с длиной свободного пробега:

$$\sqrt{S} \ll \bar{\lambda}.$$



Молекулы пролетают через отверстие, не испытывая столкновений друг с другом. Потoki молекул различных газов не связаны друг с другом. Изменение числа частиц одного газа в сосуде равно разности влетающих и вылетающих частиц этого газа. Снаружи гелий отсутствует. Поэтому балансовое уравнение для гелия имеет вид:

$$V \frac{dn_{\text{He}}}{dt} = -\frac{1}{4} n_{\text{He}} \bar{v}_{\text{He}} S,$$

где n_{He} , \bar{v}_{He} – концентрация и средняя скорость атомов гелия в сосуде. Сосуд тонкостенный, поэтому температура гелия можно считать

постоянной и равной температуре наружного воздуха. Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение решается с помощью метода разделения переменных:

$$\frac{dn_{\text{He}}}{n_{\text{He}}} = -\frac{\bar{v}_{\text{He}}S}{4V} dt.$$

Начальное условие:

$$n_{\text{He}} = n_0 \text{ при } t = 0.$$

Решение имеет вид:

$$n_{\text{He}} = n_0 \exp\left(-\frac{\bar{v}_{\text{He}}S}{4V} t\right).$$

Уравнение состояния идеального газа (в данном случае гелия) имеет вид:

$$p = nkT.$$

Парциальное давление гелия в сосуде

$$p_{\text{He}} = p_0 \exp\left(-\frac{\bar{v}_{\text{He}}S}{4V} t\right).$$

Для воздуха в балансовом уравнении необходимо учитывать как влетающие, так и вылетающие молекулы:

$$V \frac{dn_{\text{возд}}}{dt} = \frac{1}{4} \bar{v}_{\text{возд}} S (n_0 - n_{\text{возд}}).$$

Оно также решается методом разделения переменных при условии, что начальная концентрация молекул воздуха в сосуде равна нулю:

$$n_{\text{возд}} = n_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{v}_{\text{возд}}S}{4V} t\right)\right),$$

$$p_{\text{возд}} = p_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{v}_{\text{возд}}S}{4V} t\right)\right).$$

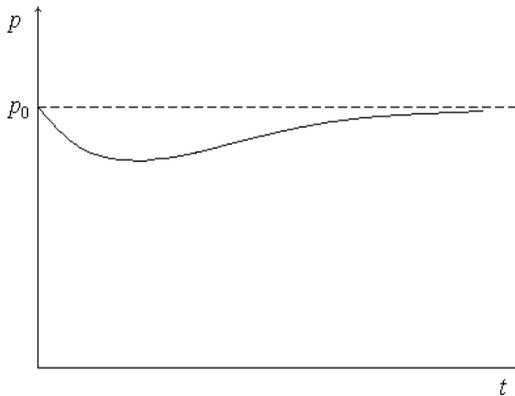
Суммарное давление в сосуде определяется законом Дальтона:

$$p = p_{\text{He}} + p_e.$$

Окончательно имеем

$$p = p_0 (1 + \exp(-t/\tau_{\text{He}}) - \exp(-t/\tau_{\text{возд}})), \quad \tau = 4V/(S\bar{v}).$$

Зависимость $p(t)$ показана на рисунке ниже. Вначале давление падает, так как скорость истечения гелия выше, чем скорость истечения воздуха (из-за различия масс молекул). Однако когда гелия остается довольно мало, давление начинает расти в результате продолжающегося втекания воздуха и в конце концов становится равным наружному давлению.



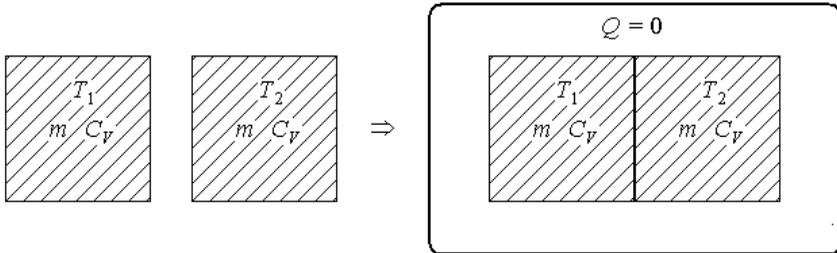
5. К системе кубиков, помещенных в адиабатически изолированный сосуд, подвода теплоты нет. Кубики изготовлены из сплава с очень малым изобарическим коэффициентом температурного расширения. Поэтому можно пренебречь изменением их объема и считать, что работа внешних сил отсутствует. Тогда согласно первому началу термодинамики внутренняя энергия рассматриваемой системы остается такой же, какой была вначале, до установления контакта между кубиками:

$$\Delta U = mC_V(T - T_1) + mC_V(T - T_2) = 0,$$

что позволяет сразу же найти конечную температуру кубиков:

$$T = (T_1 + T_2)/2.$$

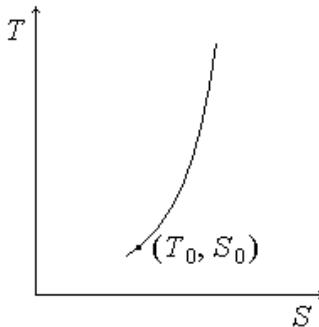
При этом используется равенство масс кубиков, учитывается, что $C_V = \text{const}$



Изменение энтропии не зависит от процесса. Так как изменением объема кубиков пренебрегается, то реальный процесс для каждого кубика можно заменить изохорическим процессом, в котором энтропия кубика меняется с температурой по закону

$$S = S_0 + \int_{T_0}^T \frac{\delta Q}{T} = S_0 + \int_{T_0}^T \frac{mC_V dT}{T} = S_0 + mC_V \ln(T/T_0),$$

где S_0 – значение энтропии при температуре T_0 (оно одно и то же для обоих кубиков, так как кубики одинаковы). На T, S -диаграмме точка (T_0, S_0) вводится как общая точка отсчета. На результат она не влияет.



Тогда с учетом аддитивности энтропии, ее изменение для системы равно

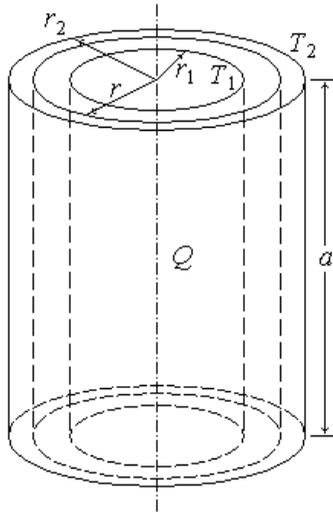
$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mC_V \ln((T_1 + T_2)^2 / 4T_1 T_2) > 0.$$

Энтропия адиабатически изолированной системы кубиков в результате установления теплового равновесия возросла.

Изменение свободной энергии системы равно

$$\Delta F = \Delta U - (T \cdot 2S - T_1 S_1 - T_2 S_2) = mC_V \ln(T_1^{T_1} \cdot T_2^{T_2} / ((T_1 + T_2)/2)^{T_1 + T_2}).$$

6. Тепло, выделяющееся во внутреннем цилиндре, проходит через газ (задача решается в приближении сплошной среды; после решения будет сделана оценка, подтверждающая применимость этого приближения) и уходит как через боковую поверхность внешнего цилиндра, так и через его торцевые поверхности. В случае длинных цилиндров торцевые поверхности составляют малую часть по сравнению боковой поверхностью и теплообменом через них можно пренебречь: считать, что цилиндры бесконечно длинные.



Поскольку задача имеет осевую симметрию, то ее решение определяется одной единственной координатой, радиусом r . В силу стационарности сколько тепла выделяется во внутреннем цилиндре, столько его за то же самое время проходит через любую поверхность, охватывающую источник тепловыделения и лежащую между цилиндрами. В противном случае температура внутри цилиндра будет изменяться. Если эту поверхность выбрать в виде коаксиального цилиндра радиуса r ($r_1 \leq r \leq r_2$) и $q(r)$ – плотность потока тепла по нормали к поверхности, то

полный поток тепла через боковую поверхность выбранного цилиндра равен произведению площади этой поверхности на плотность потока тепла $2\pi r a q$. По закону сохранения энергии в стационарном случае имеем равенство:

$$q(r)2\pi r a = \text{const} = Q a$$

(a – длина цилиндра).

Для сплошной среды плотность теплового потока вычисляется по формуле

$$q = -\chi \frac{dT}{dr}.$$

Коэффициент теплопроводности по элементарной кинетической теории равен

$$\chi = \frac{1}{3} n C_V \bar{v} \bar{\lambda}.$$

Здесь $C_V = 5k/2$ (колебательное движение молекул азота при обычно рассматриваемых температурах заморожено), абсолютная средняя скорость теплового движения молекул $\bar{v} = \sqrt{8kT/\pi m}$, $\bar{\lambda} = (\sqrt{2}n\pi d^2)^{-1}$ – средняя длина свободного пробега. Легко видеть, что коэффициент теплопроводности χ в первом приближении не зависит от плотности газа и пропорционален квадратному корню из температуры:

$$\chi = \alpha \sqrt{T}, \text{ где } \alpha = 5/3 \cdot (k/\pi)^{3/2} m^{-1/2} d^{-2}.$$

Интегрирование его, с учетом граничных условий

$$T = T_1 \text{ при } r = r_1 \text{ и } T = T_2 \text{ при } r = r_2,$$

дает

$$T_2^{3/2} - T_1^{3/2} = -3Q/(4\pi\alpha) \ln(r_2/r_1).$$

Коэффициент теплопроводности находится по формуле

$$\chi = -Q/(2\pi r dT/dr) = 3Q \ln(r_2/r_1)/(4\pi(T_1^{3/2} - T_2^{3/2})) \cdot T^{1/2}$$

или приближенно

$$\chi_{N_2} \approx Q \ln(r_2 / r_1) / (2\pi(T_1 - T_2)).$$

Для газокинетического диаметра молекулы получается выражение

$$d = (20k(k / \pi m)^{1/2} (T_1^{3/2} - T_2^{3/2}) / (9Q \ln(r_2 / r_1)))^{1/2}.$$

Сделаем оценку, подтверждающую применимость приближения сплошной среды при решении данной задачи. Это приближение применимо, если выполнено условие: средняя длина свободного пробега молекул, по крайней мере, на порядок меньше характерного размера задачи. Используя выражение для средней длины свободного пробега молекул $\bar{\lambda}$ и термическое уравнение состояния идеального газа, найдем зависимость $\bar{\lambda}$ от давления:

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} p \pi d^2}.$$

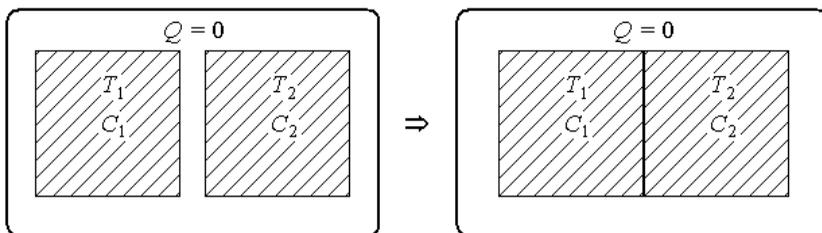
При нормальных условиях (давление 1 атм, температура 0°C) длина свободного пробега молекул порядка $\bar{\lambda}_0 \approx 6 \cdot 10^{-6}$ см. В условиях экспериментального определения коэффициента теплопроводности давление $p \approx 10$ мм рт. ст. При таком давлении длина пробега молекул равна

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0 \frac{p_0}{p} \approx 6 \cdot 10^{-6} \frac{760}{10} \approx 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Это значение длины свободного пробега молекул много меньше разности радиусов цилиндров.

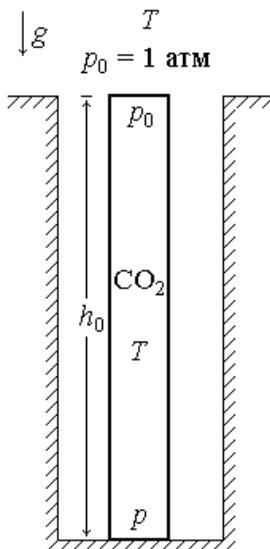
Вторая переэкзаменовка

1. (100 б.) Изолированная система состоит из двух тел. Теплоемкость первого тела равна C_1 , теплоемкость второго – C_2 . Их температуры равны T_1 и T_2 соответственно. Причем $T_1 > T_2$. Тела привели в тепловой контакт. Вычислить изменение энтропии системы в процессе достижения теплового равновесия.



2. (100 б.) В сосуде находится идеальный газ при температуре T и концентрации n . Найти число молекул, ударяющихся о единицу площади стенки в единицу времени и имеющих нормальную компоненту скорости большую, чем некоторая заданная величина v_0 .

3. (100 б.) В шахту глубиной 7 км поставлена труба, в которую закачан углекислый газ CO_2 . Давление CO_2 в верхней части трубы равно 1 атм. Каков вес CO_2 ? Температуру считать постоянной и равной температуре наружного воздуха.



4. (100 б.) N частиц одноатомного идеального газа находятся в сосуде объемом V при температуре T . Энергия внутреннего состояния каждой

частицы принимает два значения: 0 и E . Найти среднюю энергию и теплоемкость газа.

Решение задач второй переэкзаменовки

1. Рассматривается изолированная система тел. К такой системе подвода теплоты нет, и отсутствует работа внешних сил. В этом случае согласно первому началу термодинамики внутренняя энергия системы остается такой же, какой была вначале, до установления теплового контакта между телами:

$$\Delta U = C_1(T - T_1) + C_2(T - T_2) = 0,$$

что позволяет сразу же найти конечную температуру тел:

$$T = (T_1 + T_2)/2.$$

Теплообмен между телами неравновесный процесс, а равенство

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Применимо только для равновесных процессов. Однако согласно второму началу термодинамики изменение энтропии не зависит от процесса. Поэтому реальный процесс для каждого тела можно заменить политропическим процессом, в котором изменение энтропии тела равно

$$\Delta S_i = \int_{T_i}^T \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_i}^T \frac{C_i dT}{T} = C_i \ln \left(\frac{T}{T_i} \right), \quad i = 1, 2.$$

С учетом аддитивности энтропии, ее изменение для всей рассматриваемой системы будет иметь значение:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_1 \cdot \ln((1 + T_2/T_1)) + C_2 \cdot \ln((1 + T_1/T_2)) > 0.$$

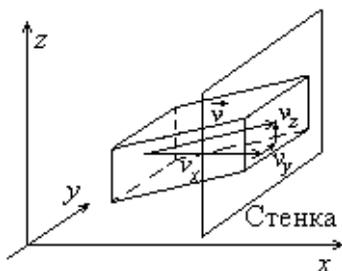
Энтропия изолированной системы тел в результате установления теплового равновесия возросла.

2. В процессе движения молекулы газа, заключенные в сосуд, испытывают соударения с его стенками. Пусть $dj(v_x)$ – число молекул, падающих на единицу площади стенки в единицу времени и имеющих x -ю компоненту скорости в интервале $v_x \div v_x + dv_x$.

Для вычисления $dj(v_x)$ полезно обратиться к рисунку, на котором схематически изображена область локализации молекул со скоростью \vec{v} (параллелепипед), ударяющихся о стенку за единицу времени. Очевидно, $dj(v_x)$ равно числу молекул с данной компонентой скорости v_x , находящихся в параллелепипеде высотой v_x и основанием, равным единице площади:

$$dj(v_x) = v_x dn(v_x) = v_x ndw(v_x),$$

где $dn(v_x)$ – концентрация молекул с данной компонентой скорости v_x (в интервале $v_x \div v_x + dv_x$), n – полная концентрация частиц (здесь концентрация – полное число частиц в единице объема).



Вероятность того, что молекула имеет данную компоненту скорости v_x , определяется распределением Максвелла по v_x :

$$dW(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x.$$

Полное число молекул, ударяющихся о единицу площади стенки в единицу времени и имеющих нормальную компоненту скорости большую, чем некоторая заданная величина v_0 , получим, интегрируя выражение для $dj(v_x)$:

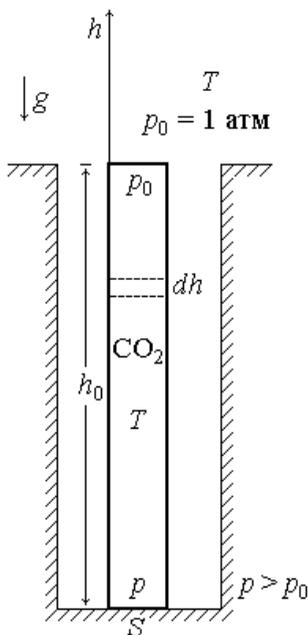
$$j = \int_{v_0}^{\infty} dj(v_x) = n \int_{v_0}^{\infty} v_x dW(v_x) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{v_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) v_x dv_x =$$

$$= n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \exp\left(-\frac{mv_0^2}{2kT}\right)$$

3. Шахта довольно глубокая, и распределение углекислого газа в трубе существенно неравномерное по высоте. Чтобы вычислить вес углекислого газа в трубе, выделим бесконечно тонкий слой газа толщиной dh . Вес газа в этом слое равен

$$dP = mgn(h)Sdh,$$

где m – масса молекулы углекислого газа, $n(h)$ – концентрация его молекул на высоте h , S – площадь сечения трубы.



Зависимость концентрации газа от высоты определяется по барометрической формуле

$$n(h) = n(0) \exp(-mgh / kT),$$

где $n(0)$ – концентрация молекул у дна трубы.

Запишем выражение для концентрации молекул возле крышки трубы:

$$n(h_0) = n(0) \exp(-mgh_0 / kT).$$

Поделив одно равенство на другое, найдем

$$n(h) = n(h_0) \exp(mg(h_0 - h) / kT).$$

Концентрация $n(h_0)$ определяется по известным давлению p_0 и температуре T (углекислый газ считаем идеальным):

$$n(h_0) = p_0 / kT.$$

Вычислим теперь вес углекислого газа в трубе:

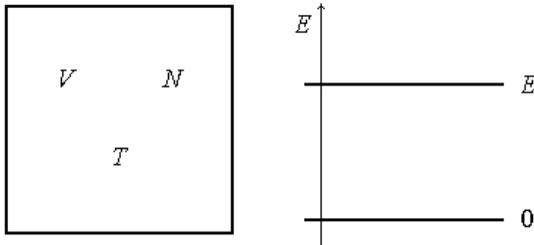
$$P = mgS \int_0^{h_0} n(h) dh = mgSn(h_0) \int_0^{h_0} \exp(mg(h_0 - h) / kT) dh = p_0 S (\exp(mgh_0 / kT) - 1).$$

4. Частицы одноатомного газа находятся в непрерывном хаотическом движении. Средняя энергия такого движения, приходящаяся на одну частицу, в равновесном состоянии газа равна

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT.$$

Энергия поступательного движения частиц для всего газа равна

$$U_{\text{п}} = N\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} NkT.$$



Частицы газа помимо энергии поступательного движения обладают энергией внутреннего состояния (например, электронного возбуждения). У атомов некоторых химических элементов (фтора, хлора и др.) расстояние между первыми двумя уровнями энергии электронной оболочки на два порядка меньше, чем расстояние до следующего уровня энергии. Такие системы в широком диапазоне температур являются двухуровневыми. Вероятность нахождения частицы на том или другом энергетическом уровне определяется распределением Гиббса:

$$W_i = \frac{g_i \exp(-E_i / kT)}{g_0 + g_1 \exp(-E / kT)}, \quad i = 0, 1.$$

Будем для простоты считать, что уровни энергии невырожденные: $g_0 = g_1 = 1$. Тогда эти вероятности будут иметь значения:

$$W_0 = \frac{1}{1 + \exp(-E / kT)}, \quad W_1 = \frac{\exp(-E / kT)}{1 + \exp(-E / kT)} = \frac{1}{\exp(E / kT) + 1}.$$

Средняя энергия внутреннего состояния частицы равна

$$\bar{E} = \sum_i E_i W_i = E W_1 = \frac{E}{\exp(E / kT) + 1}.$$

Для всего газа энергия внутреннего состояния частиц будет в N раз больше:

$$U_\epsilon = \frac{NE}{\exp(E / kT) + 1}.$$

Рассматриваемый одноатомный газ идеальный. Поэтому энергия взаимодействия частиц равна нулю, или, по крайней мере, ей можно пренебречь.

Полная энергия газа в сосуде равна

$$U = U_{\text{п}} + U_\epsilon = \frac{3}{2} NkT + \frac{NE}{\exp(E / kT) + 1}.$$

Найдем теплоемкость газа:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} Nk + \frac{Nk(E/kT)^2}{(\exp(E/kT) + 1)^2}.$$

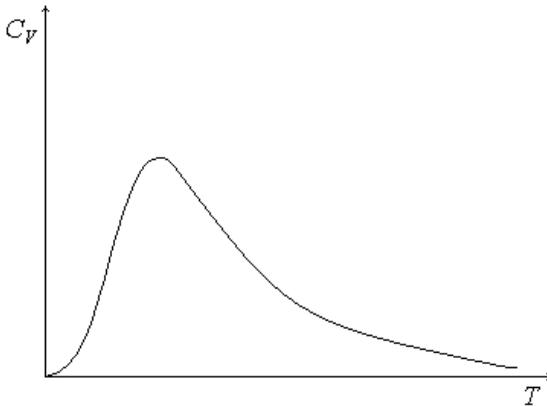
Исследуем предельные случаи низких и высоких температур. При $T \rightarrow 0$ происходит вымораживание внутреннего движения частиц, и теплоемкость газа равна

$$C_V \cong \frac{3}{2} Nk + Nk(E/kT)^2 \exp(-2E/kT) \rightarrow \frac{3}{2} Nk \quad \text{при } T \rightarrow 0.$$

При высоких температурах уровни внутреннего состояния частиц оказываются заселенными в соответствии с их статистическими весами (в данном случае одинаково). Наблюдается насыщение внутреннего состояния. Теплоемкость по-прежнему оказывается равной

$$C_V \cong \frac{3}{2} Nk + \frac{1}{4} Nk \left(\frac{E}{kT} \right)^2 \rightarrow \frac{3}{2} Nk \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

Теплоемкость имеет максимум при некоторой температуре. В этом особенность квантовых систем, имеющих конечное число квантовых состояний. Качественно зависимость рассматриваемого идеального одноатомного газа показана на рисунке.



7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Рекомендованная литература к теоретическому курсу:

а) основная литература:

1. Пуртов П. А., Замураев В. П. Учебно-методический комплекс. Физика. Термодинамика и статистическая физика. Новосибирск, НГУ, 2011.
2. Толкачев В. А. Термодинамика и статистическая физика. Новосибирск: НГУ, 1996.
3. Пуртов П. А., Анищик С. В., Багрянский В. А., Большаков Б. В., Вязовкин В. Л., Стась Д. В. Задачи по термодинамике и статистической физике. Новосибирск: НГУ, 2005.
4. Замураев В.П., Калинина А.П. Задачи по молекулярной физике : учеб. пособие. -Новосибирск: Изд - во НГУ, 2012.
5. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями по термодинамике и молекулярной физике. Новосибирск: НГУ, 2008.
6. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями по молекулярной физике: ч.1. Элементы статистической физики: учеб. пособие. Новосибирск: Изд - во НГУ, 2013.
7. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями по молекулярной физике: учеб. пособие: ч.2. Элементы физической кинетики: Новосибирск: Изд - во НГУ, 2014.
8. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями по молекулярной физике: учеб. пособие: ч. 3-4. Термодинамика. Новосибирск: Изд - во НГУ, 2014.
9. Замураев В. П., Калинина А. П. Типовые методы решения задач по термодинамике и статистической физике: учеб. - метод. пособие. Новосибирск: Изд - во НГУ, 2014.
10. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями контрольных работ по термодинамике и статистической физике: учеб. пособие. Новосибирск: Изд - во НГУ, 2014.

б) дополнительная литература:

1. Базаров И. П. Термодинамика. Высшая школа, М. 1976.
2. Киттель Ч. Статистическая термодинамика. Наука, М. 1977.
3. Левич В. Г. Введение в статистическую физику. М.: Гос. изд-во. техн.-теорет. лит., 1956.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Наука, М. 1979.
5. Оришич Т. И., Филиппова Л. Г. Сборник задач с решениями по термодинамике и статистической физике. Новосибирск: НГУ, 1993.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- Персональные компьютеры, мультимедийный проектор, ноутбуки, экраны.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и с учетом рекомендаций ПрООП ВПО по направлению «020100 ХИМИЯ», квалификация (степень) «бакалавр», а также в соответствии с Образовательным стандартом высшего профессионального образования, принятым в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования Новосибирский национальный исследовательский государственный университет.

Авторы: Пуртов Петр Александрович, д.ф.-м.н., профессор кафедры общей физики и химической и биологической физики НГУ, зам. директора. ИХКТ СО РАН;

Замураев Владимир Павлович, доцент кафедры общей физики НГУ, снс ИТПМ СО РАН;

Рецензент Калинина Анна Павловна, доцент кафедры общей физики НГУ, снс ИТПМ СО РАН.

УМК рассмотрен и одобрен на заседании кафедры общей физики ФФ «22» августа 2014 года

Заведующий кафедрой общей физики ФФ НГУ

д.ф.-м.н., проф.



А. Г. Погосов