ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том V, 2005 г. Выпуск 1. С. 64–68

УДК 517.946

Трехмерные аналоги систем уравнений Коши-Римана и Бицадзе

Б. Б. Ошоров

Румынскими математиками Г. К. Моисилом и Н. Теодореско была предложена система уравнений первого порядка в пространстве, которая в некотором смысле является трехмерным аналогом системы уравнений Коши-Римана.

Пусть задана квадратная матрица четвертого порядка

$$M(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор-функция $U^T(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x))$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Система дифференциальных уравнений первого порядка

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)U(x) = 0 \tag{1}$$

называется системой Моисила-Теодореско [1]. Основанием принять эту систему уравнений в качестве аналога системы Коши-Римана может послужить, например, следующая известная теорема.

Если вектор-функция $U(x)$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^3$ и для любой кусочно-гладкой замкнутой поверхности S, лежащей вместе с областью, ограниченной ею, в D, имеет место равенство

$$\int_S D(n_1, n_2, n_3)U(x)\, dS = 0,$$

где (n_1, n_2, n_3) — нормальный единичный вектор к поверхности S, то $U(x)$ является решением системы уравнений (1) в D.

Эта теорема есть обобщение на случай трехмерного пространства теоремы Морера для аналитических функций [1].

Оказалось, что система (1) является трехмерным аналогом системы Коши-Римана и с точки зрения постановки краевых задач, предложенных автором в работе [2].

Запишем систему (1) в явном виде

$$\begin{cases} u_{2x_1} + u_{3x_2} + u_{4x_3} = 0, \\ u_{1x_1} + u_{4x_2} - u_{3x_3} = 0, \\ -u_{4x_1} + u_{1x_2} + u_{2x_3} = 0, \\ u_{3x_1} - u_{2x_2} + u_{1x_3} = 0. \end{cases}$$

После умножения последнего уравнения на -1 эта система запишется в матричной форме как

$$MU \equiv \sum_{i=1}^{3} A_i U_{x_i} = 0, \tag{2}$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — симметрические матрицы, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — кососимметрическая матрица.

Характеристическая форма этой системы имеет вид

$$Q(\lambda) = \det \sum_{i=1}^{3} A_i \lambda_i = \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 \right)^2,$$

т. е. (2) является эллиптической системой уравнений первого порядка.

Для коэффициентов системы имеет место таблица умножения:
$A_1^2 = A_2^2 = -A_3^2 = E$ — единичная матрица,

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 = A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 A_3 = A_3 A_1 = A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2A_3 = A_3A_2 = A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений (2) будем рассматривать в параллелепипеде $D = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 < x_i < k_i, \; i = 1, 2, 3\}$, границу которого обозначим через Γ, а $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор внешней нормали к этой границе.

Краевая задача 1. *В области D найти решение системы уравнений (2), удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{aligned} u_1|_{x_1=0} = u_2|_{x_1=0} = u_3|_{x_1=k_1} = u_4|_{x_1=k_1} = 0, \\ u_1|_{x_2=0} = u_3|_{x_2=0} = u_2|_{x_2=k_2} = u_4|_{x_2=k_2} = 0, \\ u_1|_{x_3=0} = u_4|_{x_3=0} = u_2|_{x_3=k_3} = u_3|_{x_3=k_3} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Множество вектор-функций $U(x) \in C^\infty(\overline{D})$, для которых выполнены условия (3), обозначаем символом C_M, а его замыкание в норме пространства Соболева $W_2^1(D)$ — H_M.

Теорема 1. *Для $\forall U(x) \in H_M$ справедливы априорные оценки*

$$\|MU\|_0 \geq \|U_{x_3}\|_0, \qquad \|MU\|_0 \geq c\|U\|_0, \qquad c = const > 0. \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать неравенства для $\forall U(x) \in C_M$.

Рассмотрим выражение $(MU, A_3U_{x_3})_0 = \int\limits_D \langle MU, A_3U_{x_3}\rangle \, dD$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обычное скалярное произведение в евклидовом пространстве. Интегрируя по частям с учетом условий (3), получаем

$$(MU, A_3U_{x_3})_0 = \sum_{i=1}^{3}(A_iU_{x_i}, A_3U_{x_3})_0, \qquad (A_3U_{x_3}, A_3U_{x_3})_0 = \|U_{x_3}\|_0^2,$$

$$(A_1U_{x_1}, A_3U_{x_3})_0 = (A_2U_{x_2}, A_3U_{x_3})_0 = 0, \qquad (MU, A_3U_{x_3})_0 = \|U_{x_3}\|_0^2.$$

Из последнего равенства следует первая оценка (4), из которой в силу простейшей теоремы вложения $\|U\|_0 \leq \frac{k_3}{\sqrt{2}}\|U_{x_3}\|_0$ получается и вторая оценка с константой $c = \frac{\sqrt{2}}{k_3}$.

Из данной теоремы следует, что краевая задача (2), (3) имеет только тривиальное решение $U(x) \equiv 0$.

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение

$$MU \equiv \sum_{i=1}^{3} A_iU_{x_i} = F(x). \tag{5}$$

Формально сопряженный оператор имеет вид

$$M^*V \equiv -A_1V_{x_1} - A_2V_{x_2} + A_3V_{x_3},$$

а сопряженные краевые условия —

$$\begin{aligned} &v_3|_{x_1=0} = v_4|_{x_1=0} = v_1|_{x_1=k_1} = v_2|_{x_1=k_1} = 0, \\ &v_2|_{x_2=0} = v_4|_{x_2=0} = v_1|_{x_2=k_2} = v_3|_{x_2=k_2} = 0, \\ &v_2|_{x_3=0} = v_3|_{x_3=0} = v_1|_{x_3=k_3} = v_4|_{x_3=k_3} = 0. \end{aligned} \tag{3*}$$

Естественным образом определяем классы C_{M^*}, H_{M^*}. Тогда справедливы оценки

$$\|M^*V\|_0 \geq \|V_{x_3}\|_0, \qquad \|M^*V\|_0 \geq c\|V\|_0, \qquad c = const > 0. \tag{4*}$$

Кроме того, имеет место тождество

$$(MU, V)_0 = (U, M^*V)_0, \qquad \forall U \in H_M,\ V \in H_{M^*}.$$

Оценки (4*), (4) позволяют доказать однозначную разрешимость задачи (5), (3) в пространстве $L_2(D)$ для любой вектор-функции $F(x) \in L_2(D)$.

Теорема 2. *Для вектор-функций $U(x) \in C_M$ норма $\|MU\|_0$ эквивалентна норме $\|U\|_1$.*

Это утверждение доказывается непосредственной оценкой нормы

$$\|MU\|_0^2 = (MU, MU)_0$$

и использованием вложения

$$\|U\|_0 \leq \frac{\max\{k_1, k_2, k_3\}}{\sqrt{2}}\|MU\|_0.$$

Аналогичное утверждение справедливо для формально сопряженного оператора. Эти оценки используются для доказательства однозначной разрешимости задачи (5), (3) в пространстве $W_2^1(D)$.

Наконец, вместо системы уравнений (5) можно рассматривать систему

$$LU \equiv MU + AU = F(x).$$

При некоторых условиях на матрицу A, например, ее «малость» в определенном смысле, остаются в силе выводы о разрешимости краевой задачи.

Теперь рассмотрим систему уравнений второго порядка

$$M^2U \equiv U_{x_1x_1} + 2A_{12}U_{x_1x_2} + 2A_{13}U_{x_1x_3} + U_{x_2x_2} + 2A_{23}U_{x_2x_3} - U_{x_3x_3} = F(x). \tag{6}$$

Краевая задача 2. *В параллелепипеде D найти решение системы уравнений (6) при выполнении краевых условий (3) и дополнительных условий*

$$\begin{aligned} &u_{3x_1}|_{x_1=0} = u_{4x_1}|_{x_1=0} = u_{1x_1}|_{x_1=k_1} = u_{2x_1}|_{x_1=k_1} = 0, \\ &u_{2x_2}|_{x_2=0} = u_{4x_2}|_{x_2=0} = u_{1x_2}|_{x_2=k_2} = u_{3x_2}|_{x_2=k_2} = 0, \\ &u_{2x_3}|_{x_3=0} = u_{3x_3}|_{x_3=0} = u_{1x_3}|_{x_3=k_3} = u_{4x_3}|_{x_3=k_3} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема 3. *Для любой вектор функции $U(x) \in C^{\infty}(\overline{D})$, удовлетворяющей условиям (3), (7) имеет место оценка*

$$\|M^2 U\|_0 \geq c\|U\|_2^*, \qquad c = const > 0, \tag{8}$$

где

$$\|U\|_2^* = \|U\|_1 + \sum_{i=1}^{3} \|(MU)_{x_i}\|_0. \tag{9}$$

Так как при выполнении условий (3), (7) для вектор-функции $W = MU$ выполнены условия (3) и $M^2 U = MW$, то с учетом теоремы 2 справедливость оценки (8) становится очевидной.

Отсюда мы можем сделать вывод о разрешимости задачи (6), (3), (7) в пространстве с нормой (9).

Таким образом, систему уравнений (6) можно считать трехмерным аналогом системы уравнений Бицадзе как по структуре, так и с точки зрения постановки краевых задач, имеющих однозначную разрешимость в пространствах Соболева.

Литература

[1] *А. В. Бицадзе*, Основы теории аналитических функций комплексного переменного, М., Наука, 1969.

[2] *Б. Б. Ошоров*, Краевые задачи для некоторых модельных систем уравнений в частных производных, Новосибирск, 2002, препринт НГУ.