

## ИНВАРИАНТЫ ОДНОКАНАЛЬНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Автоматическая обработка визуальной информации является одним из важнейших направлений в области искусственного интеллекта и ей в последние годы уделяется все возрастающее внимание. При анализе и идентификации изображений большую роль играет аппарат построения инвариантов изображения относительно различных групп преобразований. В данной работе определяются и исследуются дифференциальные инварианты одноканального изображения относительно группы гомотетий и движений, а также калибровки канала.

*Ключевые слова:* инварианты, дифференциальные характеристики, одноканальное изображение.

### Введение

При автоматизированной цифровой обработке изображений (космических снимков, геофизических полей) возникает естественная задача определения характерных (особых) точек изображения [Прэтт, 1982; Гонсалес, Вудс, 2005]. Такие точки могут быть использованы в различных прикладных задачах: в проблемах распознавания, отыскания снимка по образцу, в задачах фотограмметрии [Самарина, Славский, 2007]. Так как условия съемки (освещенность, ориентация камеры, положение объекта в различные моменты съемки) отличаются, то желательно, чтобы выбор характерных точек изображения не зависел от качества, ориентации, масштаба снимка. Другими словами, был бы инвариантен относительно определенной группы преобразований снимка.

Ранее в основном изучались инварианты относительно группы движений [Montesinos et al., 1998; Qin et al., 2005; Flusser, 2000], состоящей из поворотов и параллельных сдвигов. В данной работе определяются и исследуются числовые инварианты относительно более широкой группы преобразований, включающей в себя повороты, трансляции, растяжения, а также калибровки канала. Вследствие расширения группы преобразований изображения, определенные в статье инварианты будут более «грубыми» и, следовательно, более устойчивыми к различного вида помехам и шумам.

Данная статья посвящена разработке математических основ предлагаемого подхода к цифровой обработке одноканальных изображений и разработке алгоритмов вычисления инвариантов.

### Основные определения

Рассмотрим одноканальное изображение. С математической точки зрения оно представляет собой неотрицательную функцию в некоторой области на плоскости. Будем считать, что данная функция дважды непрерывно дифференцируема. Тогда справедливо разложение Тейлора второго порядка с центром в произвольной точке области. Не ограничивая общности, можно считать, что данная точка – начало координат на плоскости:

$$f(x, y) = a + p_1x + p_2y + \frac{1}{2}(b_{(2,0)}x^2 + 2b_{(1,1)}xy + b_{(0,2)}y^2) + o(x^2 + y^2),$$

где коэффициенты тейлоровского разложения представляют собой частные производные первого и второго порядка функции  $f(x, y)$ :

$$a = f(0, 0), \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad p_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0),$$

$$b_{(2,0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0), \quad b_{(1,1)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0), \quad b_{(0,2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0).$$

Предположим, что изображение подверглось преобразованию, а именно повороту и растяжению

$$\Theta(\lambda, \rho, \phi) : f(x, y) \rightarrow e^\lambda f\left(e^\rho (x \cos(\phi) - y \sin(\phi)), e^\rho (x \sin(\phi) + y \cos(\phi))\right),$$

в данном случае множитель  $e^\lambda$  будем интерпретировать как фактор поглощения среды, действующий в окрестности исследуемой точки. Нетрудно видеть, что преобразования  $\Theta(\lambda, \rho, \phi)$  удовлетворяют тождеству

$$\Theta(\lambda_1, \rho_1, \phi_1) \times \Theta(\lambda_2, \rho_2, \phi_2) = \Theta(\lambda_1 + \lambda_2, \rho_1 + \rho_2, \phi_1 + \phi_2)$$

и образуют трехмерную коммутативную группу Ли  $G$ .

Рассматривая действие группы  $G$  на пространстве  $J^2(R^2, 0)$  2-струй функций (тейлоровских разложений 2-го порядка), получим, что группа  $G$  действует в шестимерном пространстве параметров  $t = \{a, p_1, p_2, b_{(2,0)}, b_{(0,2)}, b_{(1,1)}\} \in J^2(R^2, 0) \cong R^6$ .

*Определение 1.* Функция  $I(a, p_1, p_2, b_{(2,0)}, b_{(0,2)}, b_{(1,1)})$ , нетождественно равная константе, называется инвариантом 2-го порядка, если под действием преобразований группы  $G$  она не меняется.

Для произвольной функции параметров  $F(a, p_1, p_2, b_{(2,0)}, b_{(0,2)}, b_{(1,1)})$  определены инфинитезимальные дифференциальные операторы  $X_\lambda F$ ,  $X_\rho F$ ,  $X_\phi F$  [Олвер, 1989]:

$$\left. \frac{d}{d\lambda} F(\Psi(t)) \right|_{\lambda=0, \rho=0, \phi=0} = X_\lambda F, \quad \left. \frac{d}{d\rho} F(\Psi(t)) \right|_{\lambda=0, \rho=0, \phi=0} = X_\rho F, \quad \left. \frac{d}{d\phi} F(\Psi(t)) \right|_{\lambda=0, \rho=0, \phi=0} = X_\phi F. \quad (1)$$

### Инварианты непрерывного изображения

Рассмотрим одноканальное изображение как дважды непрерывно дифференцируемую числовую функцию  $f(x, y)$  со значениями в диапазоне  $[0, 1]$ . Тогда действительны теоремы 1–3 и следствия 1 и 2, приведенные ниже.

*Теорема 1.* Дифференциальные операторы  $X_\lambda F$ ,  $X_\rho F$ ,  $X_\phi F$  равны

$$X_\lambda F = \frac{\partial F}{\partial a} a + \frac{\partial F}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial F}{\partial b_{(2,0)}} b_{(2,0)} + \frac{\partial F}{\partial b_{(1,1)}} b_{(1,1)} + \frac{\partial F}{\partial b_{(0,2)}} b_{(0,2)},$$

$$X_\rho F = \frac{\partial F}{\partial a} 0 + \frac{\partial F}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial F}{\partial b_{(2,0)}} 2b_{(2,0)} + \frac{\partial F}{\partial b_{(1,1)}} 2b_{(1,1)} + \frac{\partial F}{\partial b_{(0,2)}} 2b_{(0,2)}, \quad (2)$$

$$X_\phi F = \frac{\partial F}{\partial a} 0 + \frac{\partial F}{\partial p_1} p_2 + \frac{\partial F}{\partial p_2} p_1 + \frac{\partial F}{\partial b_{(2,0)}} 2b_{(1,1)} - \frac{\partial F}{\partial b_{(0,2)}} 2b_{(1,1)} + \frac{\partial F}{\partial b_{(1,1)}} (-b_{(2,0)} + b_{(0,2)}).$$

*Теорема 2.* Функции  $I_1, I_2, I_3, I_4$  являются инвариантами функции  $f(x, y)$  относительно группы преобразований  $G$ :

$$I_1 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{(b_{(0,2)} + b_{(2,0)})a}, \quad I_2 = \frac{b_{(2,0)}p_1^2 + 2b_{(1,1)}p_1p_2 + b_{(0,2)}p_2^2}{(b_{(0,2)}^2 + b_{(2,0)}^2 + 2b_{(1,1)}^2)a},$$

$$I_3 = \frac{b_{(2,0)}p_2^2 - 2b_{(1,1)}p_1p_2 + b_{(0,2)}p_1^2}{(b_{(0,2)}^2 + b_{(2,0)}^2 + 2b_{(1,1)}^2)a}, \quad I_4 = 2 \frac{-b_{(1,1)}^2 + b_{(0,2)}b_{(2,0)}}{(b_{(0,2)}^2 + b_{(2,0)}^2 + 2b_{(1,1)}^2)}.$$

Обозначим через

$$J_2 = \frac{I_2}{I_1} = \frac{(b_{(0,2)} + b_{(2,0)}) (b_{(2,0)} p_1^2 + 2b_{(1,1)} p_1 p_2 + b_{(0,2)} p_2^2)}{(b_{(0,2)}^2 + b_{(2,0)}^2 + 2b_{(1,1)}^2) (p_1^2 + p_2^2)}, \quad (3)$$

$$J_3 = \frac{I_3}{I_1} = \frac{(b_{(0,2)} + b_{(2,0)}) (b_{(2,0)} p_2^2 - 2b_{(1,1)} p_1 p_2 + b_{(0,2)} p_1^2)}{(b_{(0,2)}^2 + b_{(2,0)}^2 + 2b_{(1,1)}^2) (p_1^2 + p_2^2)}. \quad (4)$$

*Замечание 1.* Инвариант  $I_4$  выражается через инварианты  $I_1, I_2, I_3, J_2, J_3$  следующим образом:

$$I_4 = \frac{I_2 + I_3 + I_1}{I_1} = J_2 + J_3 - 1. \quad (5)$$

*Теорема 3.* Для инвариантов  $J_2, J_3$  справедлива точная оценка:

$$(J_2 - 1/2)^2 + (J_3 - 1/2)^2 \leq 1/2. \quad (6)$$

*Следствие 1.* В силу формул (5) и (6) получаем  $W$  – область значений для инвариантов  $J_2, J_3$ , представленную на рис. 1.

*Следствие 2.* Для инвариантов  $J_2, J_3$  и  $I_4 = J_2 + J_3 - 1$  справедливы точные оценки

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq J_2, J_3 \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \quad |I_4| \leq 1.$$

### Инварианты дискретного изображения

Рассмотрим дискретное представление инвариантов  $I_1, I_2, I_3, I_4$ . Обозначим через  $f_{i,j}$  значения функции  $f(x, y)$  в узлах прямоугольной сетки с шагом сетки  $h_1$  и  $h_2$  по горизонтали и вертикали соответственно. Возьмем тейлоровское разложение второго порядка с центром в точке  $(2, 2)$ . Найдем значение данного разложения в узлах сетки согласно рис. 2 и приравняем их данным  $f_{i,j}$ .

В результате получим систему из 9 уравнений на 6 неизвестных коэффициентов тейлоровского разложения. В матричной форме ее можно записать в виде

$$A \cdot J^2(f) = [f],$$

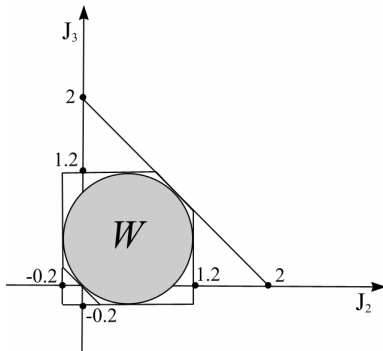


Рис. 1. Область значений  $J_2, J_3$

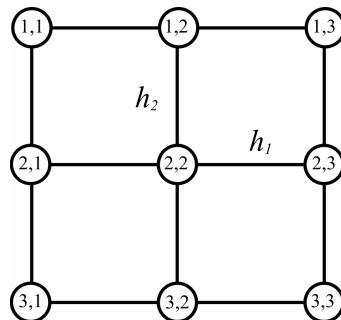


Рис. 2. Прямоугольная сетка с шагом  $h_1$  и  $h_2$

где  $J^2(f)$  – столбец из неизвестных коэффициентов  $a, p_1, p_2, b_{(2,0)}, b_{(1,1)}, b_{(0,2)}, [f]$  – столбец значений функции в узлах  $f_{2,2}, f_{1,2}, f_{2,1}, f_{2,3}, f_{3,2}, f_{1,1}, f_{1,3}, f_{3,3}, f_{3,1}$ , матрица  $A$  равна:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -h_1 & 0 & h_1^2/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -h_2 & 0 & h_2^2/2 & 0 \\ 1 & 0 & h_2 & 0 & h_2^2/2 & 0 \\ 1 & h_1 & 0 & h_1^2/2 & 0 & 0 \\ 1 & -h_1 & -h_2 & h_1^2/2 & h_2^2/2 & h_1h_2 \\ 1 & -h_1 & h_2 & h_1^2/2 & h_2^2/2 & -h_1h_2 \\ 1 & h_1 & h_2 & h_1^2/2 & h_2^2/2 & h_1h_2 \\ 1 & h_1 & -h_2 & h_1^2/2 & h_2^2/2 & -h_1h_2 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему методом наименьших квадратов, получим

$$J^2[f] = P \cdot [f], \quad (7)$$

где псевдообратная матрица  $P = A^{-1}$  равна

$$P = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{6h_1} & 0 & 0 & \frac{1}{6h_1} & -\frac{1}{6h_1} & -\frac{1}{6h_1} & \frac{1}{6h_1} & \frac{1}{6h_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6h_2} & \frac{1}{6h_2} & 0 & -\frac{1}{6h_2} & \frac{1}{6h_2} & \frac{1}{6h_2} & -\frac{1}{6h_2} \\ -\frac{2}{3h_1^2} & \frac{1}{3h_1^2} & -\frac{2}{3h_1^2} & \frac{2}{3h_1^2} & \frac{1}{3h_1^2} & \frac{1}{3h_1^2} & \frac{1}{3h_1^2} & \frac{1}{3h_1^2} & \frac{1}{3h_1^2} \\ -\frac{2}{3h_2^2} & -\frac{2}{3h_2^2} & \frac{1}{3h_2^2} & \frac{1}{3h_2^2} & -\frac{2}{3h_2^2} & \frac{1}{3h_2^2} & \frac{1}{3h_2^2} & \frac{1}{3h_2^2} & \frac{1}{3h_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4h_1h_2} & -\frac{1}{4h_1h_2} & \frac{1}{4h_1h_2} & -\frac{1}{4h_1h_2} \end{pmatrix}.$$

*Теорема 4.* Для квадратичной функции  $f(x, y)$  формулы (7) дают точные значения коэффициентов тейлоровского разложения 2-го порядка с центром в данной точке, т. е.  $J^2[f] = J^2(f)$ .

*Следствие 3.* Для квадратичной функции  $f(x, y)$  формулы (7) позволяют вычислить точные значения инвариантов.

*Замечание 2.* В общем случае  $J^2[f]$  представляет собой приближение  $J^2(f)$  порядка  $h_1^2 + h_2^2$ , которое также зависит от угла поворота сетки. Тем более это справедливо для инвариантов.

*Замечание 3.* В процессе реальной обработки изображения используется дискретизация (квантование), следствием которой является возникновение погрешностей при вычислении тейлоровского разложения и инвариантов.

### Квантование изображения

Известно, что в силу технических ограничений память компьютера способна хранить только дискретные числа. Поэтому на этапе передачи изображения по каналу связи, непре-

рывная функция изображения  $f(x, y)$  неизбежно подвергается дискретизации с шагом  $\Delta$  (рис. 3). При этом возникает прямоугольная решетка точек изображения [Грузман и др., 2000].

Операцию дискретизации случайной непрерывной величины по уровням часто называют квантованием. Процесс квантования можно описать следующей формулой округления:

$$\Delta \left\lfloor \frac{f + \frac{\Delta}{2}}{\Delta} \right\rfloor,$$

где  $\lfloor x \rfloor$  – ближайшее целое, не превосходящее  $x$ . В практических задачах обработки изображения наиболее часто выбирается величина квантования

$$K = \left\lfloor \frac{1}{\Delta} \right\rfloor = 2^8 - 1,$$

при этом пиксель изображения кодируется одним байтом информации. Из всего вышеуказанного делаем вывод, что пиксели, хранящиеся в памяти компьютера, представляют собой результат дискретизации исходного непрерывного изображения по аргументам и уровням.

При практической реализации данного алгоритма возникают проблемы, связанные с эффектом квантования изображения. Будем предполагать, что выбрано число уровней квантования, равное  $K = 2^8 - 1$ . Для частичной нейтрализации эффекта квантования, при вычислении  $J^2[f]$ , использован следующий метод. К значениям в узлах сетки прибавляются

сгенерированные случайным образом значения (флуктуации), равные  $\delta = \pm \frac{1}{2^{10}}$  (рис. 4). Да-

лее вычисляются производные и находятся медианные значения (т. е. проводится робастная фильтрация) для числителя и знаменателя инвариантов отдельно.

### Оценки погрешностей для функций порядка большего двух

Рассмотрим тейлоровское разложение порядка  $m > 2$  для произвольной функции  $f(x, y)$  с центром в данной точке:

$$f(x, y) = a + p_1x + p_2y + \frac{1}{2}(b_{(2,0)}x^2 + 2b_{(1,1)}xy + b_{(0,2)}y^2) + \frac{1}{6}(b_{(3,0)}x^3 + 3b_{(2,1)}x^2y + b_{(1,2)}xy^2 + b_{(0,3)}y^3) + \dots + o\left(\left(x^2 + y^2\right)^{m/2}\right).$$

**Теорема 5.** Для функции  $f(x, y)$  порядка  $m > 2$  формулы (7) дают следующие значения коэффициентов тейлоровского разложения:

$$J^2[f] = (a, p_1, p_2, b_{(2,0)}, b_{(1,1)}, b_{(0,2)}) + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_m,$$

где

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{6}(0, b_{(3,0)}h_1^2 + 2b_{(1,1)}h_2^2, 2b_{(2,1)}h_1^2 + b_{(0,3)}h_2^2, 0, 0, 0),$$

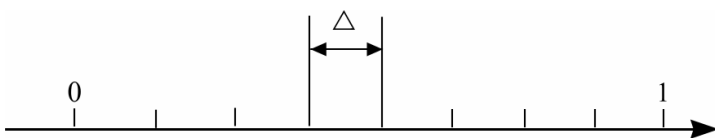


Рис. 3. Дискретизация непрерывной величины с шагом  $\Delta$

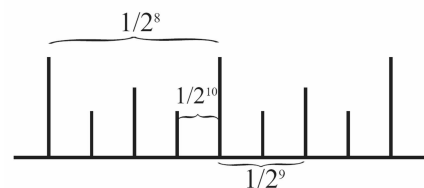


Рис. 4. Величины  $\Delta, \delta$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{12} \left( -\frac{4b_{(3,0)}h_1^2 h_2^2}{3}, 0, 0, b_{(4,0)}h_1^2 + 4b_{(0,2)}h_2^2, b_{(0,2)}h_1^2 + 4b_{(0,4)}h_2^2, 2(b_{(3,1)}h_1^2 + b_{(1,3)}h_2^2) \right)$$

Остальные слагаемые имеют порядок малости  $\geq 4$ .

*Следствие 5.* В общем случае погрешность имеет порядок  $C(h_1^2 + h_2^2)$ , где константа  $C$  зависит лишь от третьей и четвертой производной.

### Инвариантность относительно поворота

Рассмотрим тейлоровские разложения 2-го и 3-го порядков для произвольной функции  $f(x, y)$  с центром в данной точке и квадратную сетку с шагом  $h = h_1 = h_2$ . Выполним поворот на угол  $\phi$  относительно фиксированной системы координат:

$$\Phi = \begin{cases} \Delta x = \Delta x' \cos \phi - \Delta y' \sin \phi, \\ \Delta y = \Delta x' \sin \phi + \Delta y' \cos \phi. \end{cases} \quad (8)$$

Введем следующие обозначения:  $[f]$  – значения функции  $f(x, y)$  в узлах сетки;  $J^2[f]$  – сеточные частные производные функции  $f$  (вычисленные по формуле (7));  $f_\phi$  – результат поворота функции  $f$ ;  $J^2(f_\phi)$  – частные производные функции  $f_\phi$ ;  $[f_\phi]$  – значения функции  $f_\phi$  в узлах сетки;  $J^2[f_\phi]$  – сеточные частные производные функции  $f_\phi$ ;  $(J^2[f])_\phi$  – результат действия поворота на частные производные.

*Замечание 4.* Для произвольной функции  $f(x, y)$  выполняется равенство

$$(J^2(f))_\phi = J^2(f_\phi).$$

Для квадратичной функции  $f(x, y)$  выполняется следующее равенство:

$$(J^2[f])_\phi = J^2[f_\phi].$$

*Теорема 6.* Для функции  $f(x, y)$  порядка  $m$  значения сеточных частных производных представимы в виде

$$(J^2[f])_\phi = J^2[f] + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_m,$$

где

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{12} h^2 \sin(2\phi) \left( 0, \left( \cos(\phi) (f_{(0,3)} - 3f_{(2,1)}) + \sin(\phi) (f_{(3,0)} - 3f_{(1,2)}) \right), \right.$$

$$\left. \left( \sin(\phi) (f_{(0,3)} - 3f_{(2,1)}) - \cos(\phi) (f_{(3,0)} - 3f_{(1,2)}) \right), 0, 0, 0 \right),$$

$$\varepsilon_4 = h^2 \sin(2\phi) \left( -\frac{1}{36} h^2 \left( 4 \cos(2\phi) (f_{(1,3)} - f_{(3,1)}) + \sin(2\phi) (f_{(0,4)} - 6f_{(2,2)} + f_{(4,0)}) \right), 0, 0, \right.$$

$$\left. \frac{1}{48} \left( 4(-f_{(1,3)} + 3 \cos(2\phi) (f_{(1,3)} - f_{(3,1)}) - f_{(3,1)}) + 3 \sin(2\phi) (f_{(0,4)} - 6f_{(2,2)} + f_{(4,0)}) \right), \right.$$

$$\left. \frac{1}{48} \left( 4(f_{(1,3)} + 3 \cos(2\phi) (f_{(1,3)} - f_{(3,1)}) + f_{(3,1)}) + 3 \sin(2\phi) (f_{(0,4)} - 6f_{(2,2)} + f_{(4,0)}) \right), \frac{1}{24} (f_{(0,4)} - f_{(4,0)}) \right).$$

Остальные слагаемые имеют порядок малости  $\geq 4$ . Заметим, что здесь  $\varepsilon_i$  – слагаемые, зависящие от производных  $i$ -го порядка.

*Доказательство:* Возьмем тейлоровское разложение 3-го порядка с центром в начале координат:

$$f(\Delta x, \Delta y) = f(0, 0) + \frac{df(0, 0)}{1!} + \frac{d^2 f(0, 0)}{2!} + \frac{d^3 f(0, 0)}{3!}.$$

Подставляем формулы (8) в тейлоровское разложение

$$f_{\Phi}(\Delta x', \Delta y') = \left[ f(0, 0) + \frac{df(0, 0)}{1!} + \frac{d^2 f(0, 0)}{2!} \right]_{\Phi} + \left[ \frac{d^3 f(0, 0)}{3!} \right]_{\Phi}.$$

В результате получаем, что сеточные значения разлагаются на две составляющие:

$$[f_{\Phi}] = [f_{\Phi}]^1 + [f_{\Phi}]^2,$$

где  $[f_{\Phi}]^1$  – квадратичная составляющая, а  $[f_{\Phi}]^2$  – кубическая составляющая. Решая систему (7), получим

$$J^2[f_{\Phi}] = P[f_{\Phi}] = P[f_{\Phi}]^1 + P[f_{\Phi}]^2 = J^2(f_{\Phi}) + R.$$

Первое слагаемое  $J^2(f_{\Phi})$  в данном равенстве представляет собой результат действия поворота на частные производные порядка  $\leq 2$  функции  $f$  в начале координат, второе слагаемое  $R$  – погрешность, вносимая производными 3-го порядка. Пересчитаем сеточные частные производные в исходной системе координат и введем для них обозначение  $J^2 = (J^2[f_{\Phi}])_{\Phi^{-1}}$ . В результате получим

$$J_1^2 = J^2[f]_1, J_4^2 = J^2[f]_4, J_5^2 = J^2[f]_5, J_6^2 = J^2[f]_6,$$

$$J_2^2 = J^2[f]_2 + \frac{1}{24} h^2 \left( 5(f_{(1,2)} + f_{(3,0)}) + \sin(4\phi)(f_{(0,3)} - 3f_{(2,1)}) + \cos(4\phi)(3f_{(1,2)} - f_{(3,0)}) \right),$$

$$J_3^2 = J^2[f]_3 + \frac{1}{24} h^2 \left( 5(f_{(2,1)} + f_{(0,3)}) - \cos(4\phi)(f_{(0,3)} - 3f_{(2,1)}) + \sin(4\phi)(3f_{(1,2)} - f_{(3,0)}) \right).$$

Отсюда  $R = \{0, R_2, R_3, 0, 0, 0\}$ , где

$$R_2 = \frac{1}{24} h^2 \left( 5(f_{(1,2)} + f_{(3,0)}) + \sin(4\phi)(f_{(0,3)} - 3f_{(2,1)}) + \cos(4\phi)(3f_{(1,2)} - f_{(3,0)}) \right),$$

$$R_3 = \frac{1}{24} h^2 \left( 5(f_{(2,1)} + f_{(0,3)}) - \cos(4\phi)(f_{(0,3)} - 3f_{(2,1)}) + \sin(4\phi)(3f_{(1,2)} - f_{(3,0)}) \right).$$

*Следствие 6.* Справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (J^2[f])_{\Phi} d\phi = J^2[f_{\Phi}].$$

*Теорема 7.* Для кубической функции справедливы равенства

$$J^2[f]_1 = f(0, 0),$$

$$J^2[f]_2 = f^{(1,0)} + \frac{1}{24} h^2 \left( 5(f_{(1,2)} + f_{(3,0)}) + \sin(4\phi)(f_{(0,3)} - 3f_{(2,1)}) + \cos(4\phi)(3f_{(1,2)} - f_{(3,0)}) \right),$$

$$J^2[f]_3 = f^{(0,1)} + \frac{1}{24} h^2 \left( 5(f_{(2,1)} + f_{(0,3)}) - \cos(4\phi)(f_{(0,3)} - 3f_{(2,1)}) + \sin(4\phi)(3f_{(1,2)} - f_{(3,0)}) \right),$$

$$J^2[f]_4 = f_{(2,0)}, J^2[f]_5 = f_{(0,2)}, J^2[f]_6 = f_{(1,1)}.$$

*Следствие 7.* Справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J^2[f_{\Phi}] d\phi = J^2[f] + \frac{5h^2}{24} \{0, (f_{(1,2)} + f_{(3,0)}), (f_{(2,1)} + f_{(0,3)}), 0, 0, 0\}.$$

В частности, если  $\Delta f$  – константа, то получим равенство  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J^2[f_{\Phi}] d\phi = J^2[f]$ .

Обозначим через  $I_i([f], h, \phi)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , инварианты функции  $f(x, y)$  в данной точке, вычисленные от значений  $[f]$  в узлах сетки с шагом  $h$  и углом  $\phi$ .

*Следствие 8.* Справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_i([f], h, \phi) d\phi = I_i(f) + O(h^2), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

### Экспериментальная часть

*Совместное распределение инвариантов  $J_2, J_3$ .* В силу теоремы 3 имеет смысл рассмотреть свойства совместного распределения  $J_2, J_3$

*Теорема 8.* Если  $J_2 = 0, J_3 = 1$ , то

$$\det \begin{pmatrix} f_{(2,0)} & f_{(1,1)} \\ f_{(1,1)} & f_{(0,2)} \end{pmatrix} = 0, \quad f_{(2,0)}f_1^2 + 2f_{(1,1)}f_1f_2 + f_{(0,2)}f_2^2 = 0. \quad (24)$$

*Доказательство:* В силу формул (3), (4) имеем

$$J_2 + J_3 = \frac{\Delta f (|\nabla f|^2 \Delta f)}{(f_{(2,0)}^2 + 2f_{(1,1)}^2 + f_{(0,2)}^2) |\nabla f|^2} = \frac{(\Delta f)^2}{(f_{(2,0)}^2 + 2f_{(1,1)}^2 + f_{(0,2)}^2)} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = 1.$$

Здесь  $\lambda_1, \lambda_2$  – собственные числа матрицы второго дифференциала функции  $f$ . Как следствие этого равенства получаем

$$\lambda_1 = 0 \text{ или } \lambda_2 = 0.$$

А из условия  $J_2 = 0$  получаем

$$f_{(2,0)}f_1^2 + 2f_{(1,1)}f_1f_2 + f_{(0,2)}f_2^2 = 0.$$

*Замечание 5.* Аналогично, если  $J_2 = 1, J_3 = 0$ , то

$$\det \begin{pmatrix} f_{(2,0)} & f_{(1,1)} \\ f_{(1,1)} & f_{(0,2)} \end{pmatrix} = 0, \quad f_{(2,0)}f_2^2 - 2f_{(1,1)}f_1f_2 + f_{(0,2)}f_1^2 = 0.$$

*Замечание 6.* Если  $J_2 = 1, J_3 = 1$ , то

$$f_{(2,0)} = f_{(0,2)}, \quad f_{(1,1)} = 0.$$

*Замечание 7.* Геометрическое расположение точек  $T_1 = (0, 1)$  ( $J_2 = 0, J_3 = 1$ ),  $T_2 = (1, 0)$  ( $J_2 = 1, J_3 = 0$ ) и  $T_3 = (1, 1)$  ( $J_2 = 1, J_3 = 1$ ) в области  $W$  представлено на рис. 5. Точки изображения, соответствующие точкам типа  $T_1, T_2, T_3$ , назовем каналовыми, цилиндрическими и омбилическими соответственно.

В качестве эксперимента были рассмотрены две группы изображений: test1, test2, test3 и они же, повернутые на  $45^\circ$ . Изображение test1 представляет собой космический снимок, test2 – искусственно сгенерированное изображение, test3 – фотографический снимок (рис. 6).

Пример первоначального изображения и его поворота на  $45^\circ$  представлен на рис. 7.

Для нейтрализации эффектов, связанных с прямоугольностью поворачиваемого изображения, инварианты подсчитывались только внутри круга с центром в данном изображении (рис. 8).

Для трех тематических типов изображений, представленных на рис. 6, было построено совместное распределение инвариантов  $J_2, J_3$ . Для первоначальных изображений test1, test2, test3 полученные распределения представлены на рис. 9,  $a - 11, a$ , соответственно. А для изображений, повернутых на  $45^\circ$  – на рисунках 9,  $b - 11, b$ , соответственно.

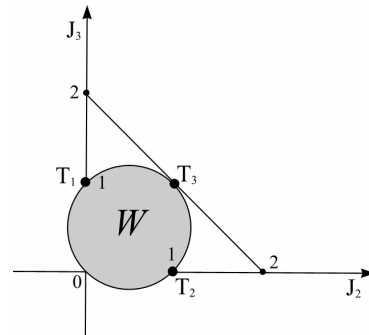


Рис. 5. Особые точки  $T_1, T_2, T_3$  в области  $W$



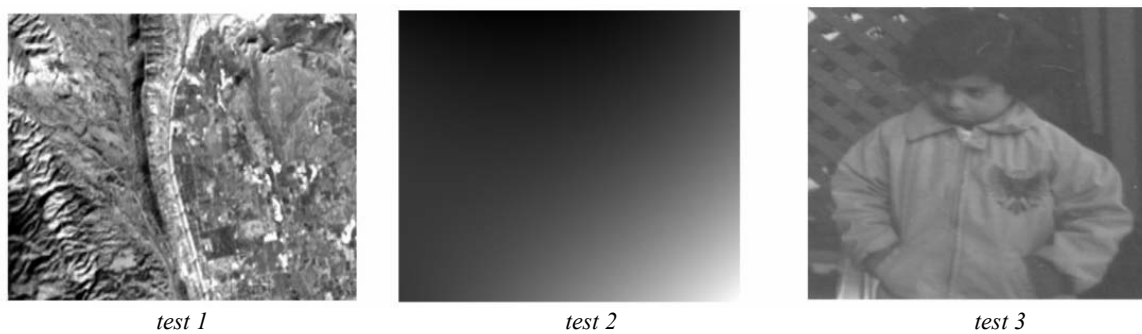


Рис. 6. Экспериментальные изображения



Рис. 7. Пример первоначального изображения и его поворота на  $45^\circ$

Рис. 8. Область подсчета инвариантов

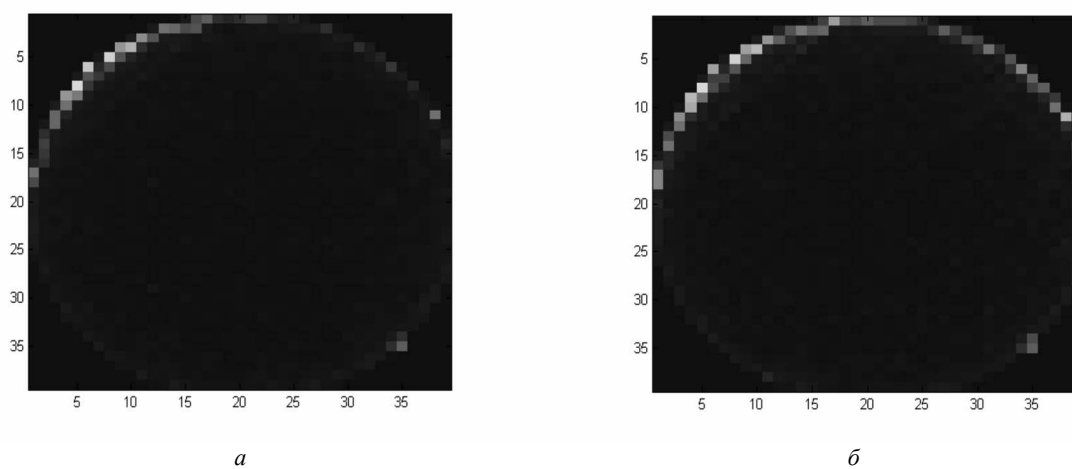


Рис. 9. Совместное распределение инвариантов  $J_2, J_3$  для изображения test1

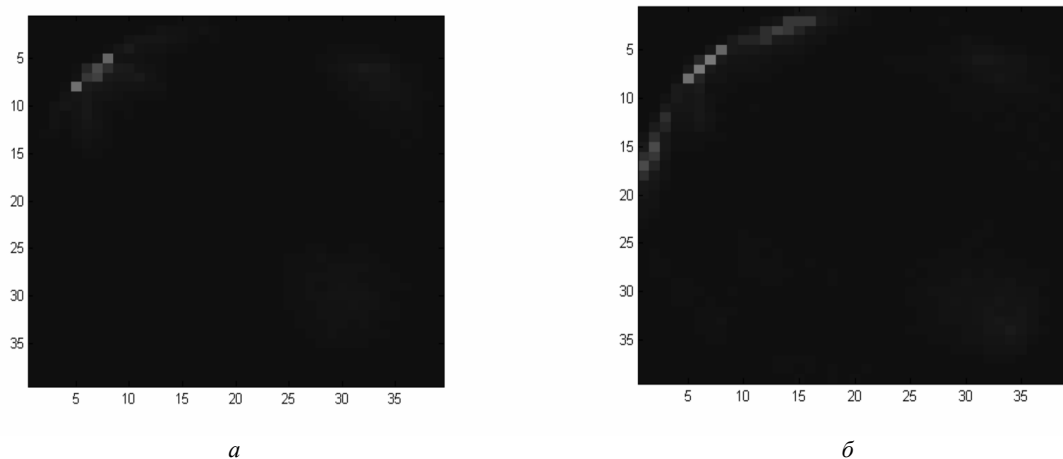


Рис. 10. Совместное распределение инвариантов  $J_2, J_3$  для изображения test2

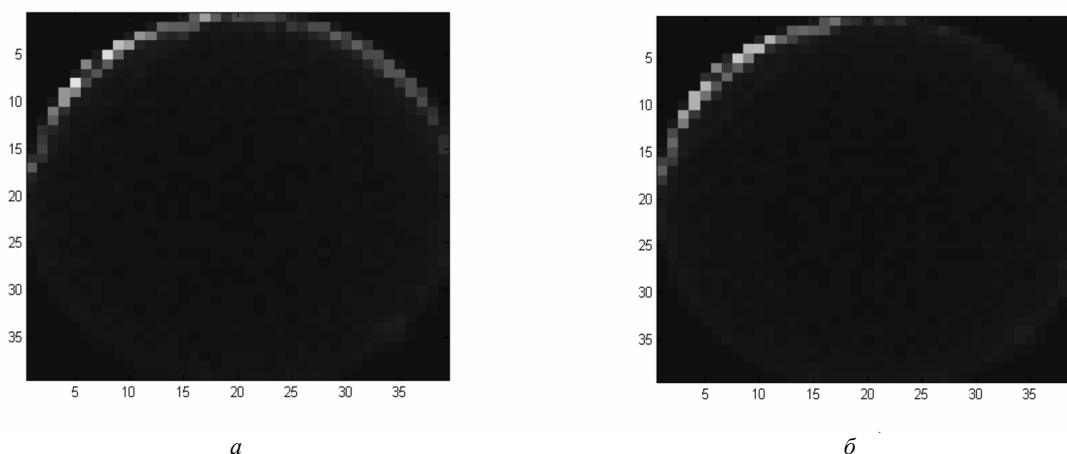


Рис. 11. Совместное распределение инвариантов  $J_2, J_3$  для изображения test3

Отметим, что результаты обработки изображений, представленные на рис. 9 были получены при помощи программного комплекса, разработанного в системе Matlab.

Полученные экспериментальные результаты свидетельствуют о преобладании в изображениях точек каналового, цилиндрического и омбилического типов. И, кроме того, позволяют говорить о том, что совместное распределение инвариантов  $J_2, J_3$  является инвариантным относительно преобразований функции изображения и может быть использовано в качестве характеристики текстуры изображения.

### Заключение

На основании теоретических исследований и проведенных вычислительных экспериментов можно сделать вывод о том, что рассмотренные в данной статье инварианты и показатели распределения точек одноканального изображения можно использовать в качестве дескрипторных характеристик изображения при решении таких задач, как распознавание изображений, отыскание снимков по образцу и др.

### Список литературы

- Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.
- Грузман И. С., Киричук В. С., Косых В. П. и др. Цифровая обработка изображений в информационных системах: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. 168 с.
- Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 640 с.
- Прэнтл У. Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982. 620 с.
- Самарина О. В., Славский В. В. Применение инвариантов при сопоставлении и привязке изображений: Материалы международной конф. «Геометрия в Астрахани-2007». Астрахань: «Астраханский университет», 2007. С. 54–56.
- Flusser J. On the Independence of Rotation Moment Invariants // Pattern Recognition. 2000. Vol. 33. P. 1405–1410.
- Montesinos P., Gouet V., Deriche R. Differential Invariants for color images // Proc. of 14<sup>th</sup> Int. Conf. on Pattern Recognition, 1998.
- Qin L., Zeng W., Gao W. Local Invariant Descriptor for Image Matching // ICASSP. 2005. P. 1025–1028.

**O. V. Samarina**

**The Single-Channel Image Invariants**

Automatic processing of the visual information is one of the major directions in the sphere of an artificial intellect and an escalating attention is paid to it last years. In the analysis and identification of the images a great role plays the system of construction of invariants of images concerning to the various groups of transformations. In this work differential single-channel image invariants concerning to a large group of transformations, rotations and calibration of channel are defined and investigated.

*Keywords:* invariant, differential characteristics, single-channel image.