УДК 517.956

Р. Р. Сафиуллова

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В данной работе исследуется краевая задача с нелокальными условиями интегрального вида для некоторого класса уравнений третьего порядка составного типа. Доказывается существование регулярных решений этой задачи.

Работа посвящена исследованию разрешимости нелокальной краевой задачи с интегральными условиями для одного класса уравнений третьего порядка составного типа, называемых некоторыми авторами «псевдогиперболическими». Следует отметить, что краевые задачи с интегральными условиями для параболических и гиперболических уравнений активно изучаются в последнее время (см., например, [1–4] и имеющуюся в них библиографию); в то же время аналогичные задачи для тех или иных уравнений третьего порядка изучены сравнительно мало — можно указать лишь работы [5–7]. В настоящей работе мы постараемся частично (в весьма незначительной степени) восполнить указанный пробел.

Пусть $Q = \{(x,t): \quad x \in D = (0,1), \quad t \in (0,T), \quad 0 < T < +\infty\}$ — цилиндр, $a(x,t)$, $a_0(x,t)$, $b(x,t)$, $b_0(x,t)$, $f(x,t)$, $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ суть заданные при $x \in \overline{D}$ и $t \in [0,T]$ функции.

Определим операторы A и B

$$Au = \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)u_x) + a_0(x,t)u,$$

$$Bu = \frac{\partial}{\partial x}(b(x,t)u_x) + b_0(x,t)u.$$

Определим пространство V:

$$V = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(D)), v_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^1(D)) \cap L_2(0,T;W_2^2(D)),$$

$$v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu \equiv u_{tt} - Au_t - Bu = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in D, \tag{3}$$

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 85–101

$$\int\limits_0^1 K_1(x,t)u(x,t)\,dx = 0, \quad t \in (0,T), \tag{4}$$

$$\int\limits_0^1 K_2(x,t)u(x,t)\,dx = 0, \quad t \in (0,T). \tag{5}$$

Положим

$$\begin{aligned}
\alpha_j(t) &= a(j-1,t)K_{jx}(j-1,t), \quad \beta_j(t) = b(j-1,t)K_{jx}(j-1,t), \quad j=1,2,\\
S_1(x,t) &= -K_{1tt} - [b\cdot K_{1x}]_x - b_0K_1, \quad S_2(x,t) = -2K_{1t} - [a\cdot K_{1x}]_x - a_0K_1,\\
S_3(x,t) &= K_{2tt} + [b\cdot K_{2x}]_x + b_0K_2, \quad S_4(x,t) = 2K_{2t} + [a\cdot K_{2x}]_x + a_0K_2,\\
P_i(x,t,\tau) &=\\
&= \frac{1}{\alpha_{i+1}(\tau)} \cdot e^{\int\limits_0^\tau \frac{\beta_{i+1}(\xi)}{\alpha_{i+1}(\xi)}d\xi - \int\limits_0^t \frac{\beta_{i+1}(\tau)}{\alpha_{i+1}(\tau)}d\tau} \times\\
&\times \left[S_{2i+1}(x,\tau) - S_{(2i+2)\tau} + \frac{S_{2i+2}(x,\tau)\left(\alpha_{(i+1)\tau} - \beta_{i+1}(\tau)\right)}{\alpha_{i+1}(\tau)}\right],\\
\varphi_i(t) &= (-1)^{i+1}\int\limits_0^t \frac{1}{\alpha_{i+1}(\tau)} \cdot e^{\int\limits_0^\tau \frac{\beta_{i+1}(\xi)}{\alpha_{i+1}(\xi)}d\xi - \int\limits_0^t \frac{\beta_{i+1}(\tau)}{\alpha_{i+1}(\tau)}d\tau} \int\limits_0^1 K_{i+1}(x,\tau)f(x,\tau)\,dxd\tau +\\
&+ e^{-\int\limits_0^t \frac{\beta_{i+1}(\tau)}{\alpha_{i+1}(\tau)}d\tau} \cdot \left[u_0(i) - \frac{1}{\alpha_{i+1}(0)}\int\limits_0^1 u_0(x)S_{2i+2}(x,0)\,dx\right],\\
Q_i(x,t) &= \frac{S_{2i+2}(x,t)}{\alpha_{i+1}(t)}, \quad i=0,1, \quad K(x,y,t) = xQ_1(y,t) + (1-x)Q_0(y,t),\\
N(x,y,t) &= xP_1(y,t) + (1-x)P_0(y,t).
\end{aligned}$$

Определим оператор M:

$$Mu = u(x,t) - \int\limits_0^1 K(x,y,t)u(y,t)\,dy - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 N(x,y,\tau)u(y,\tau)\,dy\,d\tau.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$a(x,t), b(x,t) \in C^1(\bar{Q}), \quad a_0(x,t), b_0(x,t) \in C(\bar{Q}), \tag{6}$$

$$a(x,t) \geq a_0 > 0, \quad (x,t) \in \bar{Q}, \tag{7}$$

$$K_1(x,t) \in C^4(\overline{Q}), \quad K_2(x,t) \in C^4(\overline{Q}),$$

$$\int\limits_0^1 K_i(x,0)u_0(x)\,dx = 0, \quad \int\limits_0^1 K_i(x,0)u_1(x)\,dx + \int\limits_0^1 K_{it}(x,0)u_0(x)\,dx = 0, \quad i=1,2, \tag{8}$$

$$K_1(1,t) = K_1(0,t) = K_{1x}(1,t) = K_2(1,t) = K_2(0,t) = K_{2x}(0,t) \equiv 0,$$

$$K_{1x}(0,t) \neq 0, \quad K_{2x}(1,t) \neq 0 \quad \text{при } t \in [0,T]. \tag{9}$$

Далее пусть для оператора M для любого $t \in [0,T]$ выполняется условие
$\exists\, \overline{k}_0 > 0$, $\overline{k}_1 > 0$, *такие что*

$$\overline{k}_0 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u^2(x,\tau)\, dx d\tau \le \int\limits_0^t \int\limits_0^1 (Mu)^2\ dx d\tau \le \overline{k}_1 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u^2(x,\tau)\, dx d\tau, \tag{10}$$

и функции $K(x,y,t)$, $N(x,y,t)$ принадлежат классу $C^3([0,1]\times\overline{Q})$.

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ и любых функций $u_0(x)$ из пространства $W_2^2(D)$, $u_1(x)$ из пространства $W_2^1(D)$ краевая задача (1)–(5) имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вместо исходной задачи (1)–(5) рассмотрим вспомогательную: найти в цилиндре Q решение $u(x,t)$ уравнения (1) такое, что для него выполняются условия (2) и (3), а также условия

$$u(0,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 P_0(x,\tau)u(x,\tau)\, dx\, d\tau + \int\limits_0^1 Q_0(x,t)u(x,t)\, dx + \varphi_0(t), \tag{11}$$

$$u(1,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 P_1(x,\tau)u(x,\tau)\, dx\, d\tau + \int\limits_0^1 Q_1(x,t)u(x,t)\, dx + \varphi_1(t). \tag{12}$$

Положим $\overline{u}(x,t) = Mu$, $\quad G(x,t,u) = MLu - LMu$. Пусть $g(x,t)$ — заданная функция из пространства $L_2(Q)$.
Рассмотрим еще одну вспомогательную задачу: найти в Q решение уравнения

$$L\overline{u} + G(x,t,u) = g(x,t), \tag{13}$$

удовлетворяющее условиям

$$\overline{u}(0,t) = \varphi_0(t), \quad 0 < t < T, \tag{14}$$

$$\overline{u}(1,t) = \varphi_1(t), \quad 0 < t < T, \tag{15}$$

$$\overline{u}(x,0) = u_0(x) - \int\limits_0^1 K(x,y,0)u_0(y)\, dy, \quad x \in D, \tag{16}$$

$$\overline{u}_t(x,0) = u_1(x) - \int\limits_0^1 K(x,y,0)u_1(y)\, dy - \int\limits_0^1 K_t(x,y,0)u_0(y)\, dy -$$
$$- \int\limits_0^1 N(x,y,0)u_0(y)\, dy, \quad x \in D. \tag{17}$$

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим краевую задачу: найти решение уравнения

$$L\overline{u} + \lambda G(x,t,u) = g(x,t), \tag{13_λ}$$

удовлетворяющее условиям (14)–(17).

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача (13_λ), (14)–(17) разрешима в пространстве V при произвольной функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Как известно, если множество Λ не пусто, открыто и замкнуто одновременно, то оно совпадает со всем отрезком $[0,1]$. А это и будет означать, что краевая задача (13)–(17) будет иметь решение из пространства V. Множество Λ не пусто, поскольку число 0 принадлежит ему [8, 9]. Для доказательства же открытости и замкнутости Λ установим необходимые априорные оценки решений задачи (13_λ), (14)–(17) из пространства V.

Пусть Q_t есть цилиндр $\{(x,\tau) : \ 0<\tau<t, \quad x\in D\}$, $(t\le T)$. Обозначим $\widetilde{G}(u) = g(x,t)-\lambda G(u)$, $v_0(x,t) = x\varphi_1(t)+(1-x)\varphi_0(t)$.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 L\overline{u}\cdot(\overline{u}_\tau - v_{0\tau})\,dxd\tau = \int\limits_0^t\int\limits_0^1 \widetilde{G}(u)\cdot(\overline{u}_\tau - v_{0\tau})\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям в левой части равенства, используя условия (7), (14), (15), применяя неравенство Юнга, получим

$$\frac{1-\delta_1^2}{2}\int\limits_0^1 \overline{u}_t^2(x,t)\,dx + \left(a_0 - \frac{\delta_2^2+\delta_3^2}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \overline{u}_{x\tau}^2\,dx\,d\tau \le$$

$$\le n_1\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \overline{u}_x^2\,dxd\tau + n_2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \overline{u}_\tau^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 \overline{u}^2\,dxd\tau + \delta^2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \widetilde{G}^2(u)\,dxd\tau + M_1(\delta),$$

где числа n_1, n_2 определяются числами δ, δ_2, а также функциями $b(x,t)$, $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, постоянная же $M_1(\delta)$ определяется также функциями $u_0(x)$, $u_1(x)$, $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$.

Взяв $\delta_1^2=\delta_2^2=\delta_3^2=\frac{1}{2}$, воспользовавшись неравенствами

$$\int\limits_0^1 \overline{u}^2\,dx \le 4\int\limits_0^1 \overline{u}_x^2(x,t)\,dx + 4\int\limits_0^1 v_{0x}^2(x,t)\,dx + 2\int\limits_0^1 v_0^2(x,t)\,dx, \tag{18}$$

$$\int\limits_0^1 \overline{u}_x^2(x,t)\,dx \le 8\int\limits_0^1 \overline{u}_{xx}^2(x,t)\,dx + 2\int\limits_0^1 v_{0x}^2\,dx, \tag{19}$$

можно получить неравенство

$$\int\limits_0^1 \overline{u}_t^2(x,t)\,dx \le n_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \overline{u}_\tau^2\,dx\,d\tau + n_4\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \overline{u}_{xx}^2\,dx\,d\tau + 4\delta^2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \widetilde{G}^2(u)\,dx\,d\tau + M_2(\delta),$$

где n_3, n_4 определяются числом δ и функциями $b(x,t)$, $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$.

Далее, применяя лемму Гроноулла, получим следующее неравенство:

$$\int\limits_0^1 \overline{u}_t^2(x,t)\,dx \le n_5\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \overline{u}_{xx}^2\,dx\,d\tau + n_6\delta^2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \widetilde{G}^2(u)\,dx\,d\tau + M_3(\delta), \tag{20}$$

где постоянные n_5, n_6 определяются через числа n_3, n_4.

С учетом последнего нетрудно вывести неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \overline{u}_{x\tau}^2\,dx\,d\tau \le n_7\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \overline{u}_{xx}^2\,dx\,d\tau + n_8\delta^2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \widetilde{G}^2(u)\,dx\,d\tau + M_4(\delta), \tag{21}$$

где n_7, n_8 определяются через n_3, n_4.

Далее рассмотрим равенство

$$-\int_0^t\int_0^1 L\overline{u}\cdot\overline{u}_{xx}\,dxd\tau = -\int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}(u)\cdot\overline{u}_{xx}\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям в его левой части, применяя неравенства Юнга, (18)–(21), используя условие (7) теоремы, можно прийти к неравенству

$$\int_0^1 \overline{u}_{xx}^2(x,t)\,dx \le n_9\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx}^2\,dx\,d\tau + n_{10}\delta^2\int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}^2(u)\,dx\,d\tau + M_5(\delta),$$

где постоянные n_9, n_{10} определяются числами n_3, n_4.
Применяя лемму Гроноулла к последнему неравенству, получим

$$\int_0^1 \overline{u}_{xx}^2(x,t)\,dx \le e^{n_9 t}n_{10}\delta^2\int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}^2(u)\,dx\,d\tau + M_6(\delta). \tag{22}$$

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int_0^t\int_0^1 L\overline{u}\cdot\overline{u}_{xx\tau}\,dxd\tau = -\int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}(u)\cdot\overline{u}_{xx\tau}\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям в левой части равенства, используя условие (7) теоремы, неравенство Юнга, нетрудно прийти к неравенству

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \overline{u}_{xt}^2(x,t)\,dx + \left[a_0 - \frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\delta_4^2+\delta_5^2}{2} - \frac{1}{2\delta^2}\right]\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau \le$$
$$\le \frac{1}{2}\int_0^1 \overline{u}_{xt}^2(x,0)\,dx + l_1\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{x\tau}^2\,dx\,d\tau + l_2\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{\tau}^2\,dx\,d\tau + l_3\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx}^2\,dx\,d\tau +$$
$$+ l_4\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{x}^2\,dx\,d\tau + l_5\int_0^t\int_0^1 \overline{u}^2\,dx\,d\tau + \frac{\delta^2}{2}\int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}^2(u)\,dx\,d\tau,$$

где числа $l_1 - l_5$ определяются числами $\delta_1 - \delta_5$, а также коэффициентами операторов A и B. Взяв $\delta_i^2 = \frac{a_0}{5}$ $i=\overline{1,5}$, используя неравенства (18)–(21), имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \overline{u}_{xt}^2(x,t)\,dx + \left(\frac{a_0}{2} - \frac{1}{2\delta^2}\right)\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau \le$$
$$\le l_6\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx}^2\,dx\,d\tau + l_7\delta^2\int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}^2(u)\,dx\,d\tau + M_7(\delta),$$

где числа l_6, l_7 определяются коэффициентами операторов A, B, а также числами n_3, n_4. Откуда, учитывая неравенство (22), получим

$$\int_0^1 \overline{u}_{xt}^2(x,t)\,dx + \left(a_0 - \frac{1}{\delta^2}\right)\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau \le l_8\delta^2\int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}^2(u)\,dx\,d\tau + M_8(\delta), \tag{23}$$

где постоянная l_8 определяется через l_6, l_7, n_{10}.

Сложив неравенства (20), (22), (23), приходим к следующему неравенству:

$$\int_0^1 \left[\overline{u}^2_{xx}(x,t)+\overline{u}^2_t(x,t)+\overline{u}^2_{xt}(x,t)\right]\,dx+\left(a_0-\frac{1}{\delta^2}\right)\int_0^t\int_0^1 \overline{u}^2_{xx\tau}\,dx\,d\tau \le$$
$$\le c\delta^2\int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}^2(u)\,dxd\tau+M_9, \tag{24}$$

где c зависит от чисел n_3, n_4, M_9 определяется входными данными задачи.

Для функции $\widetilde{G}(u)$ имеем неравенство

$$\int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}^2(u)\,dx\,d\tau \le 2\int_0^t\int_0^1 G^2(u)\,dx\,d\tau+2\int_0^t\int_0^1 g^2(x,\tau)\,dx\,d\tau.$$

Уточним вид функции $G(u)$ — именно, $G(u)$ определяется равенством

$$\begin{gathered}
G(u)=\int_0^1 \varphi_1(x,y,t)u(y,t)\,dy+\int_0^1 \varphi_2(x,y,t)u_t(y,t)\,dy+\int_0^t\int_0^1 \varphi_3(x,t,\tau)u(y,\tau)\,dy\,d\tau+\\
+\int_0^t\int_0^1 \varphi_4(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)\,dy\,d\tau+\int_0^t \varphi_5(x,1,\tau)u_y(1,\tau)\,d\tau+\int_0^t \varphi_6(x,0,\tau)u_y(0,\tau)\,d\tau+\\
+\int_0^t \varphi_7(x,1,\tau)u(1,\tau)\,d\tau+\int_0^t \varphi_8(x,0,\tau)u(0,\tau)\,d\tau+u_{yt}(1,t)K(x,1,t)a(1,t)-\\
-u_{yt}(0,t)K(x,0,t)a(0,t)-u_t(1,t)K_y(x,1,t)a(1,t)+u_t(0,t)K_y(x,0,t)a(0,t)+\\
+u_y(1,t)[K(x,1,t)b(1,t)+N(x,1,t)a(1,t)]-u_y(0,t)[K(x,0,t)b(0,t)+N(x,0,t)a(0,t)]-\\
-u(1,t)[K_y(x,1,t)b(1,t)+N_y(x,1,t)a(1,t)]+\\
+u(0,t)[K_y(x,0,t)b(0,t)+N_y(x,0,t)a(0,t)]+R(x),
\end{gathered}$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,y,t)&=K_{yy}b(y,t)+K_yb_y(y,t)+Kb_0(y,t)+K_{tt}-a_x(x,t)K_{xt}-a_0(x,t)K_t-\\
&\quad-b_x(x,t)K_x-b_0(x,t)K+N_t-a_x(x,t)N_x-a_0(x,t)N,\\
\varphi_2(x,y,t)&=K_{yy}a(y,t)+K_ya_y(y,t)+Ka_0(y,t)+2K_t-a_0(x,t)K-a_x(x,t)K_x,\\
\varphi_3(x,y,t)&=Nb_0(y,t)+N_{yy}b(y,t)+N_yb_y(y,t)-b_x(x,t)N_x-b_0(x,t)N,\\
\varphi_4(x,y,t)&=N_{yy}a(y,t)+N_ya_y(y,t)+Na_0(y,t)+N_t,\\
\varphi_5(x,1,t)&=Nb(1,t)-N_ta(1,t)-Na_t(1,t),\\
\varphi_6(x,0,t)&=-Nb(0,t)+N_ta(0,t)+Na_t(0,t),\\
\varphi_7(x,1,t)&=-N_yb(1,t)+N_{yt}a(1,t)+N_ya_t(1,t),\\
\varphi_8(x,0,t)&=N_yb(0,t)-N_{yt}a(0,t)-N_ya_t(0,t),\\
R(x)&=-u_y(1,0)N(x,1,0)a(1,0)+u_y(0,0)N(x,0,0)a(0,0)+\\
&\quad+u(1,0)N_y(x,1,0)a(1,0)-u(0,0)N_y(x,0,0)a(0,0)+\int_0^1 N(x,y,0)u_1(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Имеет место очевидное неравенство

$$\int_0^t\int_0^1 G^2(u)\,dx\,d\tau \le S\left[\int_0^t\int_0^1 u^2(y,\tau)\,dy\,d\tau + \int_0^t\int_0^1 u_\tau^2(y,\tau)\,dy\,d\tau\right] +$$

$$+ q_1\int_0^t u_{y\tau}^2(1,\tau)\,d\tau + q_2\int_0^t u_{y\tau}^2(0,\tau)\,d\tau +$$

$$+ q_3\int_0^t [u^2(1,\tau)+u^2(0,\tau)+u_y^2(1,\tau)+u_y^2(0,\tau)+u_\tau^2(0,\tau)+u_\tau^2(1,\tau)]\,d\tau + R,$$

где S, q_1, q_2, q_3, R — некоторые постоянные, определяющиеся коэффициентами операторов A и B, а также функциями $K(x,y,t)$, $N(x,y,t)$.

Учитывая, что второе и третье слагаемые правой части последнего неравенства ограничены величиной

$$\left(2+\frac{8}{\delta_1^2}\right)\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dx\,d\tau + \frac{\delta_1^2}{2}\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau$$

с произвольным $\delta_1 > 0$, получим

$$\int_0^t\int_0^1 G^2\,dx\,d\tau \le S_0\int_0^t\int_0^1 [u_x^2+u^2+u_\tau^2+u_{xx}^2+u_{x\tau}^2]\,dx\,d\tau + q_4\delta_1^2\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau,$$

где S_0 определяется функциями $K(x,y,t)$, $N(x,y,t)$, коэффициентами операторов A, B. С учетом последнего, из (24), получаем неравенство

$$\int_0^1 [\overline{u}_{xx}^2(x,t)+\overline{u}_t^2(x,t)+\overline{u}_{xt}^2(x,t)]\,dx + \left(a_0-\frac{1}{\delta^2}\right)\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau \le$$

$$\le S_1\delta^2\int_0^t\int_0^1 [u_x^2+u^2+u_\tau^2+u_{xx}^2+u_{x\tau}^2]\,dx\,d\tau + q_5\delta^2\delta_1^2\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dxd\tau + M_{10}, \tag{25}$$

где M_{10} определяется входными данными задачи.

Вследствие условия (10) имеют место неравенства

$$\int_0^t\int_0^1 u^2\,dx\,d\tau \le \frac{1}{\overline{k}_0}\int_0^t\int_0^1 \overline{u}^2\,dx\,d\tau,$$

$$\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dx\,d\tau \le K_{01}\left(\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_\tau^2\,dx\,d\tau + \int_0^t\int_0^1 \overline{u}^2\,dx\,d\tau\right),$$

$$\int_0^t\int_0^1 u_x^2\,dx\,d\tau \le K_{02}\left(\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_x^2\,dx\,d\tau + \int_0^t\int_0^1 \overline{u}^2\,dx\,d\tau\right),$$

$$\int_0^t\int_0^1 u_{xx}^2\,dx\,d\tau \le K_{03}\left(\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx}^2\,dx\,d\tau + \int_0^t\int_0^1 \overline{u}^2\,dx\,d\tau\right),$$

$$\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dx\,d\tau \le K_{04}\left(\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{x\tau}^2\,dx\,d\tau + \int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{\tau}^2\,dx\,d\tau + \int_0^t\int_0^1 \overline{u}^2\,dx\,d\tau\right),$$

$$\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau \le K_{05}\left(\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau + \int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{\tau}^2\,dx\,d\tau + \int_0^t\int_0^1 \overline{u}^2\,dx\,d\tau\right), \qquad (26)$$

где K_{0i} — постоянные, зависящие от функций $K(x,y,t)$, $N(x,y,t)$.

Используя неравенства (18), (19), от неравенства (25) придем к следующему неравенству:

$$\int_0^1 [\overline{u}_{xx}(x,t) + \overline{u}_t^2(x,t) + \overline{u}_{xt}^2(x,t)]\,dx + \left(a_0 - \frac{1}{\delta^2}\right)\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau \le$$
$$\le L_1\int_0^t\int_0^1 [\overline{u}_{xx}^2 + \overline{u}_{x\tau}^2 + \overline{u}_{\tau}^2]\,dx\,d\tau + q_6\delta^2\delta_1^2\int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau + M_{10},$$

где число q_6, L_1 — постоянные, определяемые лишь входными данными задачи.

Выбрав δ^2, δ_1^2 такими, чтобы $a_0 - \frac{1}{\delta^2} - q_6\delta^2\delta_1^2 > 0$, получим

$$\int_0^1 [\overline{u}_{xx}^2(x,t) + \overline{u}_t^2(x,t) + \overline{u}_{xt}^2(x,t)]\,dx + \int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau \le L_0\int_0^t\int_0^1 (\overline{u}_{xx}^2 + \overline{u}_{x\tau}^2 + \overline{u}_{\tau}^2)\,dx\,d\tau + M_{11},$$

где L_0, M_{11} определяются числом δ, входными данными задачи.

Применяя лемму Гронуолла, имеем

$$\int_0^1 [\overline{u}_{xx}^2(x,t) + \overline{u}_t^2(x,t) + \overline{u}_{xt}^2(x,t)]\,dx + \int_0^t\int_0^1 \overline{u}_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau \le M_{12},$$

где M_{12} определяется числом δ, входными данными задачи.

Далее рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_0^1 L\overline{u}\cdot(\overline{u}_{\tau\tau} - v_{0\tau\tau})\,dxd\tau = \int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}(u)\cdot(\overline{u}_{\tau\tau} - v_{0\tau\tau})\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям в левой части равенства, используя неравенство Юнга, а также неравенство

$$\int_0^t\int_0^1 \overline{u}^2\,dx\,d\tau \le T\max_{[0,T]}\int_0^1 \overline{u}^2(x,t)\,dx,$$

получаем

$$\int_0^T\int_0^1 \overline{u}_{\tau\tau}^2\,dx\,d\tau \le q_7\max_{[0,T]}\int_0^1 (\overline{u}_t^2(x,t) + \overline{u}_{xt}^2(x,t) + \overline{u}_{xx}^2(x,t))\,dx + \delta_2^2\int_0^T\int_0^1 \widetilde{G}^2(u)\,dx\,d\tau + M_{13},$$

где M_{13} определяется входными данными задачи.

Откуда, используя уже полученные оценки, нетрудно прийти к неравенству

$$\max_{[0,T]}\int_0^1 [\overline{u}_{xx}^2(x,t) + \overline{u}_t^2(x,t) + \overline{u}_{xt}^2(x,t)]\,dx + \int_0^T\int_0^1 [\overline{u}_{\tau\tau}^2 + \overline{u}_{xx\tau}^2]\,dx\,d\tau \le M_{14},$$

где M_{14} определяется входными данными задачи.
С учетом неравенств (26) мы приходим к окончательной оценке

$$\max_{[0,T]}\int\limits_0^1[\overline{u}_t^2(x,t)+\overline{u}_{xx}^2(x,t)+\overline{u}_{xt}^2(x,t)+u_t^2(x,t)+u_{xx}^2(x,t)+u_{xt}^2(x,t)]\,dx+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^1(\overline{u}_{\tau\tau}^2+\overline{u}_{xx\tau}^2+u_{\tau\tau}^2+u_{xx\tau}^2)\,dx\,d\tau\le M_0, \tag{27}$$

где M_0 определяется входными данными задачи.

Из данной оценки и следует открытость и замкнутость множества Λ. Как уже говорилось выше, непустота, открытость и замкнутость множества Λ означают его совпадение с отрезком $[0,1]$, а следовательно, и разрешимость краевой задачи (13) – (17) в пространстве V.

Покажем, что найденная нами функция $u(x,t)$ является решением вспомогательной задачи (1) – (3), (11), (12). Функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1). Согласно виду функции $G(u)$ можно записать $LMu+G(u)=MLu$ или $L\overline{u}+G(u)=MLu$. Далее выбрав $g(x,t)$ так, что $g=Mf$, получим $MLu-Mf=0$ или $Lu=f$, т. е. найденная функция $u(x,t)$ действительно является решением уравнения (1).

Покажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (2), (3), (11), (12).
Согласно определению оператора M можно записать

$$\overline{u}(0,t)=u(0,t)-\int\limits_0^1K(0,y,t)u(y,t)dy-\int\limits_0^t\int\limits_0^1N(0,y,\tau)u(y,\tau)dyd\tau.$$

Учитывая вид функций $K(x,y,t)$, $N(x,y,t)$ и тот факт, что для функции $u(x,t)$ справедливо равенство (14), придем к условию (11). Аналогично показывается выполнимость условия (12).

Выполнимость (2), (3) доказывается следующим образом.

Согласно виду оператора M имеем

$$\overline{u}(x,0)=u(x,0)-\int\limits_0^1K(x,y,0)u(y,0)dy.$$

Вычитая из последнего равенства условие (16), получаем

$$\psi(x,0)-\int\limits_0^1K(x,y,0)\psi(y,0)dy=0,$$

где $\psi(x,0)=u(x,0)-u_0(x)$. Откуда следует $u(x,0)=u_0(x)$. Условие (2) выполняется. Справедливость условия (3) доказывается аналогично. Таким образом, найденная функция $u(x,t)$ действительно является решением вспомогательной задачи (1) – (3), (11), (12).

Покажем, что функция $u(x,t)$ является решением первоначальной краевой задачи (1) – (5). Для этого проверим выполнимость требуемых интегральных условий.

Умножив уравнение (1) на функцию $K_1(x,t)$, учитывая условия (9) теоремы 1, придем к следующему равенству:

$$\alpha_1(t)u_t(0,t)+\beta_1(t)u(0,t)=\int\limits_0^1 uS_1(x,t)\,dx+\int\limits_0^1 u_tS_2(x,t)\,dx-\int\limits_0^1 K_1f\,dx+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^1 K_1u\,dx.$$

Используя условие (11) вспомогательной задачи (1)-(3), (11), (12), а также принимая во внимание вид функций $P_0(x,t,\tau)$, $Q_0(x,t)$, $\varphi_0(t)$, получим

$$\alpha_1(t)u_t(0,t)+\beta_1(t)u(0,t)=\int\limits_0^1 uS_1(x,t)\,dx+\int\limits_0^1 u_tS_2(x,t)\,dx-\int\limits_0^1 K_1f\,dx,$$

откуда получаем $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^1 K_1u\,dx=0$.

Из чего, в силу условий (8) согласования, и следует выполнимость условия (4), т. е.

$$\int\limits_0^1 K_1(x,t)u(x,t)\,dx=0.$$

Аналогично показывается выполнимость второго интегрального условия. Следовательно, найденная функция $u(x,t)$ действительно является решением краевой задачи (1) – (5).

Теорема доказана.

Рассмотрим для той же задачи другую ситуацию.

Положим

$$\widetilde{\alpha}_j(t)=a(j-1,t)K_j(j-1,t),\quad \widetilde{\beta}_j(t)=b(j-1,t)K_j(j-1,t),\quad j=1,2,$$

$$\widetilde{P}_i(x,t,\tau)=\frac{1}{\widetilde{\alpha}_{i+1}(\tau)}\cdot e^{\int\limits_0^\tau \frac{\widetilde{\beta}_{i+1}(\xi)}{\widetilde{\alpha}_{i+1}(\xi)}d\xi-\int\limits_0^t \frac{\widetilde{\beta}_{i+1}(\tau)}{\widetilde{\alpha}_{i+1}(\tau)}d\tau}\times$$

$$\times\left[S_{(2i+2)\tau}-S_{2i+1}+\frac{S_{2i+2}(x,\tau)\left(\widetilde{\beta}_{i+1}(\tau)-\widetilde{\alpha}_{(i+1)\tau}\right)}{\widetilde{\alpha}_{i+1}(\tau)}\right],$$

$$\widetilde{\varphi}_i(t)=(-1)^i\int\limits_0^t\frac{1}{\widetilde{\alpha}_{i+1}(\tau)}\cdot e^{\int\limits_0^\tau \frac{\widetilde{\beta}_{i+1}(\xi)}{\widetilde{\alpha}_{i+1}(\xi)}\,d\xi-\int\limits_0^t \frac{\widetilde{\beta}_{i+1}(\tau)}{\widetilde{\alpha}_{i+1}(\tau)}d\tau}\int\limits_0^1 K_{i+1}(x,\tau)f(x,\tau)\,dxd\tau+$$

$$+e^{-\int\limits_0^t \frac{\widetilde{\beta}_{i+1}(\tau)}{\widetilde{\alpha}_{i+1}(\tau)}d\tau}\cdot\left[u_{0x}(i)+\frac{1}{\widetilde{\alpha}_{i+1}(0)}\int\limits_0^1 u_0(x)S_{2i+2}(x,0)\,dx\right],$$

$$\widetilde{Q}_i(x,t)=-\frac{S_{2i+2}(x,t)}{\widetilde{\alpha}_{i+1}(t)},\quad i=0,1.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (6) – (8) *теоремы* 1, *а также условия на функции* $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$ *следующего вида:*

$$K_1(1,t)=K_2(0,t)=K_{1x}(1,t)=K_{1x}(0,t)=K_{2x}(1,t)=K_{2x}(0,t)\equiv 0,$$

$$K_1(0,t)\neq 0,\quad K_2(1,t)\neq 0. \tag{28}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *из пространства* $L_2(Q)$ *и любых функций* $u_0(x)$ *из пространства* $W_2^2(D)$, $u_1(x)$ *из пространства* $W_2^1(D)$ *краевая задача* (1)–(5) *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* V.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вместо исходной задачи (1)–(5) рассмотрим вспомогательную: найти в цилиндре Q решение $u(x,t)$ уравнения (1) такое, что для него выполняются условия (2) и (3), а также условия

$$u_x(0,t) = \int_0^t \int_0^1 \widetilde{P}_0(x,\tau)u(x,\tau)\,dx\,d\tau + \int_0^1 \widetilde{Q}_0(x,t)u(x,t)\,dx + \widetilde{\varphi}_0(t), \tag{29}$$

$$u_x(1,t) = \int_0^t \int_0^1 \widetilde{P}_1(x,\tau)u(x,\tau)\,dx\,d\tau + \int_0^1 \widetilde{Q}_1(x,t)u(x,t)\,dx + \widetilde{\varphi}_1(t). \tag{30}$$

Вновь воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим краевую задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2)–(3), а также условиям вида

$$u_x(0,t) = \lambda\left[\int_0^t \int_0^1 \widetilde{P}_0(x,\tau)u(x,\tau)\,dx\,d\tau + \int_0^1 \widetilde{Q}_0(x,t)u(x,t)\,dx\right] + \widetilde{\varphi}_0(t), \tag{29_λ}$$

$$u_x(1,t) = \lambda\left[\int_0^t \int_0^1 \widetilde{P}_1(x,\tau)u(x,\tau)\,dx\,d\tau + \int_0^1 \widetilde{Q}_1(x,t)u(x,t)\,dx\right] + \widetilde{\varphi}_1(t). \tag{30_λ}$$

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача (1), (2), (3), (29_λ), (30_λ) разрешима в пространстве V при произвольной функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Как известно, если множество Λ не пусто, открыто и замкнуто одновременно, то оно совпадает со всем отрезком $[0,1]$. А это и будет означать, что краевая задача (1) – (3), (29), (30) будет иметь решение из пространства V. Множество Λ не пусто, поскольку число 0 принадлежит ему [8, 9]. Для доказательства же открытости и замкнутости Λ установим необходимые априорные оценки решений задачи (1) – (3), (29_λ), (30_λ) из пространства V.

Пусть Q_t есть цилиндр $\{(x,\tau): \quad 0<\tau<t, \quad x\in D\}$, $(t\le T)$. Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_0^1 Lu\cdot u_\tau\,dxd\tau = \int_0^t \int_0^1 f\cdot u_\tau\,dxd\tau.$$

Это равенство с помощью интегрирования по частям легко преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx + \int_0^t \int_0^1 a u_{x\tau}^2\,dxd\tau - \int_0^t \int_0^1 a_0(x,\tau)u_\tau^2\,dxd\tau + \int_0^t \int_0^1 b u_x u_{x\tau}\,dxd\tau -$$

$$- \int_0^t \int_0^1 b_0 u u_\tau\,dxd\tau = \int_0^t a(1,\tau)u_{x\tau}(1,\tau)u_\tau(1,\tau)d\tau - \int_0^t a(0,\tau)u_{x\tau}(0,\tau)u_\tau(0,\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t b(1,\tau)u_x(1,\tau)u_\tau(1,\tau)d\tau - \int_0^t b(0,\tau)u_x(0,\tau)u_\tau(0,\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^1 u_1^2(x)\,dx + \int_0^t \int_0^1 f u_\tau\,dxd\tau. \tag{31}$$

Применяя к первым четырем слагаемым правой части равенства неравенства Юнга, Гельдера, элементарные неравенства вложения, условия (29_λ), (30_λ), получим для их суммы оценку сверху

$$\int_0^t a(1,\tau)u_{x\tau}(1,\tau)u_\tau(1,\tau)d\tau - \int_0^t a(0,\tau)u_{x\tau}(0,\tau)u_\tau(0,\tau)d\tau + \int_0^t b(1,\tau)u_x(1,\tau)u_\tau(1,\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^t b(0,\tau)u_x(0,\tau)u_\tau(0,\tau)d\tau \le k_0\delta^2\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau + k_1\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau + N_1,$$

где числа k_0, k_1 определяются через коэффициенты операторов A и B, постоянная же N_1 определяется также функциями $u_0(x)$, $K_1(x,t)$, $f(x,t)$. С учетом этого, используя условие (7) теоремы 1, от равенства (31) можно перейти к неравенству

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx + a_0\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau \le \delta^2 k_2\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau +$$

$$+k_3\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau + k_4\int_0^t\int_0^1 u_{xx}^2\,dxd\tau + N_2,$$

где постоянные k_2, k_3, k_4 определяются числами k_0, k_1, а N_2 через N_1, а также функцию $u_1(x)$.

Выбрав δ соответствующим образом, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx + \frac{a_0}{2}\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau \le k_3\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau + k_4\int_0^t\int_0^1 u_{xx}^2\,dxd\tau + N_2.$$

Применяя к одному из следствий данного неравенства лемму Гронуолла, имеем

$$\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx \le 2k_4\cdot e^{2k_3T}\int_0^t\int_0^1 u_{xx}^2\,dxd\tau + N_3,$$

где $N_3 = N_2\cdot e^{k_3T}$. Отсюда получим

$$\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx + \int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau \le k_5\int_0^t\int_0^1 u_{xx}^2\,dxd\tau + N_4, \tag{32}$$

где постоянная k_5 определяется числами k_3, k_4, а N_4 посредством введенной выше N_3.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot u_{xx}\,dxd\tau = -\int_0^t\int_0^1 f(x,\tau)\cdot u_{xx}\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям в левой части равенства, получим

$$-\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau + \int_0^t\int_0^1 a_x u_{x\tau}u_{xx}\,dxd\tau + \frac{1}{2}\int_0^1 a(x,t)u_{xx}^2(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 a(x,0)u_{xx}^2(x,0)\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1 a_\tau u_{xx}^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 a_0(x,\tau)u_\tau u_{xx}\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 b_x u_x u_{xx}\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 bu_{xx}^2\,dxd\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 b_0(x,\tau)uu_{xx}\,dxd\tau=-\int_0^t u_\tau(1,\tau)u_{x\tau}(1,\tau)d\tau+\int_0^t u_\tau(0,\tau)u_{x\tau}(0,\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^1 u_t(x,0)u_{xx}(x,0)\,dx+\int_0^1 u_t(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx-\int_0^t\int_0^1 fu_{xx}\,dxd\tau.$$

Используя неравенства (32), Юнга, Гельдера, элементарные неравенства вложения, условия (2), (3), (29_λ), (30_λ), нетрудно получить неравенство

$$-\int_0^t u_\tau(1,\tau)u_{x\tau}(1,\tau)d\tau+\int_0^t u_\tau(0,\tau)u_{x\tau}(0,\tau)d\tau-\int_0^1 u_t(x,0)u_{xx}(x,0)\,dx+$$

$$+\int_0^1 u_t(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx\le m_1\int_0^t\int_0^1 u_{xx}^2\,dxd\tau+\frac{\delta_1^2}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx+N_5,$$

где число m_1 определяется через δ_1, k_5, постоянная N_5 – через функции $u_0(x)$, $u_{0xx}(x)$, $u_1(x)$, $f(x,t)$, $K_1(x,t)$, а также посредством означенного ранее N_4.

С учетом последнего, используя условие (7) теоремы, неравенства (32), Юнга, имеем

$$\frac{a_0}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx\le m_2\int_0^t\int_0^1 u_{xx}^2\,dxd\tau+\frac{\delta_1^2}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx+N_6,$$

где число m_2 определяется коэффициентами операторов A, B и числом δ_1, N_6 определяются через N_5.

Выбрав δ соответствующим образом, имеем

$$\int_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx\le m_3\int_0^t\int_0^1 u_{xx}^2\,dxd\tau+N_7,$$

где m_3, N_7 выписываются через ранее определенные m_2, N_6.

Применяя лемму Гронуолла, получим $\int_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx\le N_7e^{m_3T}$. Откуда придем к первой априорной оценке

$$\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx+\int_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx+\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau\le N_8, \tag{33}$$

где N_8 – постоянная, определяемая лишь входными данными задачи.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot u_{xx\tau}\,dxd\tau=-\int_0^t\int_0^1 f\cdot u_{xx\tau}\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям, учитывая условие (3), имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_{1x}^2(x)\,dx+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 au_{xx\tau}^2\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_x u_{x\tau}u_{xx\tau}\,dxd\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_0(x,\tau)u_\tau u_{xx\tau}\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 bu_{xx}u_{xx\tau}\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_x u_x u_{xx\tau}\,dxd\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_0 uu_{xx\tau}\,dxd\tau=\int\limits_0^t u_{\tau\tau}(1,\tau)u_{x\tau}(1,\tau)d\tau-\int\limits_0^t u_{\tau\tau}(0,\tau)u_{x\tau}(0,\tau)d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 fu_{xx\tau}\,dxd\tau.$$

Применяя неравенства Юнга, Гельдера, условия (2), (3), (29_λ), (30_λ), два первых слагаемых правой части равенства можно ограничить сверху:

$$\int\limits_0^t u_{\tau\tau}(1,\tau)u_{x\tau}(1,\tau)d\tau-\int\limits_0^t u_{\tau\tau}(0,\tau)u_{x\tau}(0,\tau)d\tau\le m_4\delta_1^2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+$$

$$+m_5\delta^2\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx+m_6\left[\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau+\int\limits_0^1 u_t^2(x,t)\,dx\right]+N_9,$$

где m_4-m_6 зависят от коэффициентов операторов A и B, N_9 определяется числом δ, а также функциями $u_0(x)$, $U_1(x)$, $u_{1x}(x)$, $f(x,t)$, $K_2(x,t)$.

С учетом этого, применяя в последнем равенстве неравенство Юнга, условие (7) теоремы 1 и первую априорную оценку, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx+a_0\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xx\tau}^2\,dxd\tau\le\delta_1^2 m_4\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+$$

$$+m_5\delta^2\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx+3\delta_2^2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xx\tau}^2\,dxd\tau+N_9.$$

Взяв $\delta_2^2=\frac{a_0}{6}$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx+\frac{a_0}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xx\tau}^2\,dxd\tau\le m_4\delta_1^2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+m_5\delta^2\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx+N_9. \quad (34)$$

Далее рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 Lu\cdot u_{\tau\tau}\,dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f\cdot u_{\tau\tau}\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям в левой части равенства, получим

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 a(x,t)u_{xt}^2(x,t)\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 a(x,0)u_{xt}^2(x,0)\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_\tau u_{x\tau}^2\,dxd\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 a_0(x,\tau)u_\tau u_{\tau\tau}\,dxd\tau-\int_0^t\int_0^1 b_xu_xu_{\tau\tau}\,dxd\tau-\int_0^t\int_0^1 bu_{xx}u_{\tau\tau}\,dxd\tau-\int_0^t\int_0^1 b_0uu_{\tau\tau}\,dxd\tau=$$

$$=\int_0^t a(1,\tau)u_{x\tau}(1,\tau)u_{\tau\tau}(1,\tau)d\tau-\int_0^t a(0,\tau)u_{x\tau}(0,\tau)u_{\tau\tau}(0,\tau)d\tau+\int_0^t\int_0^1 fu_{\tau\tau}\,dxd\tau.$$

Используя неравенства Юнга, Гельдера, неравенства вложения, условия (2), (3), (29_λ), (30_λ), два первых слагаемых правой части равенства можно оценить сверху:

$$\int_0^t a(1,\tau)u_{x\tau}(1,\tau)u_{\tau\tau}(1,\tau)d\tau-\int_0^t a(0,\tau)u_{x\tau}(0,\tau)u_{\tau\tau}(0,\tau)d\tau\le m_5\delta^2\int_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx+$$

$$+m_7\delta_1^2\int_0^t\int_0^1 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+m_8\left[\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau+\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx+\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau\right]+N_{10},$$

где числа m_7, m_8 выписываются через коэффициенты операторов A, B, постоянная N_{10} определяется посредством функций $u_1(x)$, $u_{1x}(x)$, $f(x,t)$ задачи.

В последнем равенстве, применяя неравенство Юнга, учитывая оценку (33), получим

$$\int_0^t\int_0^1 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\frac{a_0}{2}\int_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx\le m_5\delta^2\int_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx+m_9\delta_1^2\int_0^t\int_0^1 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+N_{11},\quad(35)$$

где m_9, N_{11} определяются через ранее введенные постоянные.

Складывая неравенства (34) и (35), имеем

$$\int_0^t\int_0^1 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\frac{(1+a_0)}{2}\int_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx+\frac{a_0}{2}\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dxd\tau\le$$

$$\le 2m_5\delta^2\int_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx+m_{10}\delta_1^2\int_0^t\int_0^1 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+N_{12},$$

где m_{10}, N_{12} определяются лишь входными данными задачи.

Выбрав δ и δ_1 соответствующим образом, придем ко второй априорной оценке

$$\int_0^t\int_0^1 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dxd\tau+\int_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx\le N_{13},$$

где N_{13} определяется лишь входными данными задачи.

И окончательная оценка будет иметь вид

$$\int_0^1\left[u_t^2(x,t)+u_{xx}^2(x,t)+u_{xt}^2(x,t)\right]dx+\int_0^t\int_0^1\left[u_{\tau\tau}^2+u_{xx\tau}^2\right]dxd\tau\le N,$$

где N определяется лишь входными данными задачи.

Из данной оценки и следует открытость и замкнутость множества Λ. Как уже говорилось выше, непустота, открытость и замкнутость множества Λ означает его совпадение с отрезком $[0,1]$, а следовательно, и разрешимость краевой задачи (1)–(3), (29), (30) в пространстве V.

Выполнимость для найденной функции условий (4), (5) получаем, повторяя действия, приводимые при доказательстве теоремы 1. Следовательно, найденная нами функция $u(x,t)$ является решением краевой задачи (1) – (5).

Теорема доказана.

Замечание 1. При доказательстве теорем была установлена разрешимость задач с граничными условиями вида

$$u(0,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 A_0(x,\tau)u(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^1 B_0(x,t)u(x,t)\,dx+\mu_0(t),$$

$$u(1,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 A_1(x,\tau)u(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^1 B_1(x,t)u(x,t)\,dx+\mu_1(t)$$

и

$$u_x(0,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 C_0(x,\tau)u(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^1 D_0(x,t)u(x,t)\,dx+\nu_0(t),$$

$$u_x(1,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 C_1(x,\tau)u(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^1 D_1(x,t)u(x,t)\,dx+\nu_1(t).$$

Такие задачи и сами по себе имеют независимое, самостоятельное значение, как некоторые приложения используемых методов.

Замечание 2. Для выполнения неравенств (10) достаточно, например, выполнения некоторых условий малости ядра $K(x,y,t)$.

Замечание 3. Из условия (9) теоремы 1 и условия (28) теоремы 2 следует, что функции $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$ не могут быть линейно зависимыми.

В качестве функций $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$, удовлетворяющих всем условиям теоремы 1, можно взять, например, функции $K_1(x,t)=\varphi_1(t)x(1-x)^2$ и $K_2(x,t)=\varphi_2(t)x^2(1-x)$. Функциями же, для которых выполняются все условия теоремы 2, могут служить следующие функции: $K_1(x,t)=\varphi_1(t)(x^2-1)^m$, $K_2(x,t)=\varphi_2(t)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)$, где m – некоторое натуральное число; функции $\varphi_i(t)$ во всех случаях есть гладкие функции, не обращающиеся в нуль на отрезке $[0,T]$ и удовлетворяющие некоторым условиям малости.

Список литературы

1. *Пулькина Л. С.* Нелокальные задачи для гиперболических уравнений: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2003.
2. *Кожанов А. И.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. 2004. Т. 30. С. 63–69.

3. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // Докл. РАН. 2005. Т. 404, № 5. С. 589–592.
4. *Бейлин С. А.* Смешанные задачи с интегральными условиями для волнового уравнения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 2005.
5. *Bouziani A.* On a third order parabolic equation with a nonlocal boundary condition // J. Appl. Math. Stochactic Anal. 2000. V. 13. P. 181–195.
6. *Bouziani A.* Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition // Nonlinear Analysis. 2003. V. 55. P. 883–904.
7. *Bouziani A.* Initial–boundary value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 291. P. 371–386.
8. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems, VSP. Utrecht, 1999.
9. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку, Элм, 1985.

Материал поступил в редколлегию 22.08.2006

Адрес автора

САФИУЛЛОВА Регина Рафаиловна

РОССИЯ, 453103, г. Стерлитамак

Стерлитамакская государственная

педагогическая академия

пр. Ленина, 49

тел.: 24-14-74

e-mail: Regina-SAF@yandex.ru