УДК 516.765

Е. С. Корнев

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ И АССОЦИИРОВАННЫЕ МЕТРИКИ НА ГРУППАХ ЛИ РАЗМЕРНОСТИ 4

В работе доказывается классификационная теорема для почти комплексных структур ортогональных относительно псевдоримановой метрики в случае размерности 4, а также дается классификация приводимых и антиприводимых почти комплексных структур в фиксированном базисе алгебры Ли. Для приводимых и антиприводимых почти комплексных структур находится вид ассоциированных метрик, и изучаются свойства их тензора Риччи, скалярной и секционной кривизн. Основной целью работы являются исследование вопроса об интегрируемости приводимых и антиприводимых почти комплексных структур в случае размерности 4 и изучение свойств ассоциированных с ними метрик.

В связи с активным изучением различных левоинвариантных структур на группах Ли, таких как локально конформно кэлеровы метрики, контактные и симплектические структуры, становится актуальным вопрос об изучении левоинвариантных комплексных и почти комплексных структур на группах Ли. Поскольку в случае размерности 2 любая почти комплексная структура является интегрируемой, то первым нетривиальным случаем, допускающим неинтегрируемые почти комплексные структуры, является случай размерности 4. Так как пространство всех левоинвариантных почти комплексных структур имеет довольно большую размерность, то, как правило, рассматривают специальные классы почти комплексных структур, например сохраняющие заданную метрику или симплектическую структуру. В работе наряду с этими классами вводятся два новых класса почти комплексных структур (приводимые и антиприводимые), которые определяются только заданием на группе пары четномерных распределений. Несмотря на то, что такие структуры не требуют задания метрики или симплектической формы, в работе строятся левоинвариантные метрики и внешние 2-формы, которые эти структуры сохраняют. Впервые аналог приводимых почти комплексных структур возник в работе П. Годушона [12] при рассмотрении расслоения Хопфа $S^3 \times S^1$, однако в дальнейшем нигде не рассматривался.

В силу известной классификации четырехмерных алгебр Ли, которую можно найти, например, в [14] и [13], любая алгебра Ли размерности 4 является либо прямым, либо полупрямым произведением алгебр Ли меньшей размерности. Полное описание левоинвариантных почти комплексных структур и ассоциированных метрик для четырехмерных прямых произведений дано в [15], для полупрямых произведений — в [16]. Также описание некоторых классов почти комплексных структур и ассоциированных метрик на группах $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ и $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ можно найти в [11] и [10]. В данной статье дается один пример прямого произведения и один пример — полупрямого.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 33–54

§ 1. Классификация левоинвариантных ортогональных почти комплексных структур

Пусть G — группа Ли размерности 4 и L_x — отображение левого сдвига на элемент $x \in G$.

Почти комплексной структурой на группе Ли G называется C^∞-гладкое поле эндоморфизмов $J(x)$ касательного расслоения группы G, такое что для любого $x \in G$, $J^2(x) = -\operatorname{id}$. Почти комплексная структура J называется левоинвариантной, если для любого $x \in G$, $J(x) = dL_x J(e)\, dL_{x^{-1}}$. Поскольку все инвариантные почти комплексные структуры полностью определяются своим значением в единице e группы, то их отождествляют с эндоморфизмами алгебры группы Ли G, а при фиксации базиса в алгебре Ли — с вещественными невырожденными матрицами. В дальнейшем будем рассматривать только левоинвариантные почти комплексные структуры и опускать слово «левоинвариантная».

Пусть теперь на группе G задана левоинвариантная псевдориманова метрика g. Почти комплексная структура J называется ортогональной относительно метрики g (g-ортогональной), если $g(JX, JY) = g(X, Y)$ для любых X и Y из алгебры Ли группы G.

Основной целью этого параграфа будет описание ортогональных почти комплексных структур в зависимости от сигнатуры метрики g в четырехмерном случае. Будем считать, что метрика g имеет канонический (диагональный) вид в некотором фиксированном базисе. В четырехмерном случае, с точностью до знака сигнатура псевдоримановой метрики имеет один из следующих типов: $(+,+,+,+)$ — риманова метрика, $(-,+,+,+)$ и $(-,-,+,+)$.

Теорема 1. *Пусть g — левоинвариантная псевдориманова метрика на группе Ли размерности 4 и J — матрица почти комплексной структуры в ортонормированном относительно метрики g базисе. Тогда:*
1) *Если метрика g — риманова, то множество g-ортогональных почти комплексных структур образует двулистное накрытие двумерной сферы. Каждой точке (a, b, c) на сфере соответствует пара структур:*

$$J^+ = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & b & -a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad J^- = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & -c & b \\ -b & c & 0 & -a \\ -c & -b & a & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

2) *Если метрика g имеет сигнатуру $(-,-,+,+)$, то множество g-ортогональных почти комплексных структур образует двулистное накрытие двумерной псевдосферы. Каждой точке (a, b, c) на псевдосфере соответствует пара структур:*

$$J^+ = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ b & c & 0 & a \\ c & -b & -a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad J^- = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & -c & b \\ b & -c & 0 & -a \\ c & b & a & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

3) Если метрика g имеет сигнатуру $(-,+,+,+)$, то на группе Ли не существует g-ортогональных почти комплексных структур.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать одним и тем же символом метрику и ее матрицу в ортонормированном базисе. А единичную матрицу будем обозначать через id.

1) Пусть g — риманова метрика и J — ортогональная относительно этой метрики структура. Матрица g — просто единичная матрица. Условие ортогональности в матричной форме имеет вид: $JJ^t = \mathrm{id}$. Складывая это равенство с равенством $J^2 = -\mathrm{id}$, получаем $J(J + J^t) = 0$. Поскольку матрица J — невырождена, то $J = -J^t$, т. е.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Из условия $J^2 = -\mathrm{id}$ получаем два типа решений: $d = c,\ e = -b,\ f = a,\ a^2 + b^2 + c^2 = 1$ и $d = -c, e = b,\ f = -a, a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Подставляя эти решения в (1.3), получаем структуры вида (1.1), лежащие над точкой сферы $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

2) Если метрика G имеет сигнатуру $(-,-,+,+)$, то

$$g = \begin{bmatrix} -\mathrm{id}_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_2 \end{bmatrix}.$$

Записывая условия ортогональности для структуры J, получаем $J^t g J = g$. Пользуясь тем, что $G^{-1} = g^t = g$, получаем $gJ^t gJ = \mathrm{id}$. Складывая это равенство с равенством $J^2 = -\mathrm{id}$, получаем $(J + gJ^t g)\, J = 0$. Откуда $Jg = -gJ^t$. Последнее равенство дает следующие условия на компоненты матрицы J:

$$\begin{aligned} &J_k^k = 0, \quad k = 1,2,3,4, \\ &J_1^2 = -J_2^1, \quad J_1^3 = J_3^1, \quad J_1^4 = J_4^1, \\ &J_2^3 = J_3^2, \quad J_2^4 = J_4^2, \quad J_3^4 = -J_4^3. \end{aligned}$$

Откуда

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ b & d & 0 & f \\ c & e & -f & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Из условия $J^2 = -\mathrm{id}$ получаем два типа решений: $d = c,\ e = -b,\ f = a,\ a^2 - b^2 - c^2 = 1$ и $d = -c, e = b,\ f = -a,\ a^2 - b^2 - c^2 = 1$. Подставляя эти решения в (1.4), получаем структуры вида (1.2), лежащие над точкой псевдосферы $a^2 - b^2 - c^2 = 1$.

3) Если метрика g имеет сигнатуру $(-,+,+,+)$, то

$$g = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_3 \end{bmatrix}.$$

Для G-ортогональной структуры J, так же как в пункте 2), получаем $Jg = -gJ^t$, откуда

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & -d & 0 & f \\ c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}.$$

Из условия $J^2 = -\operatorname{id}$ сразу получаем $a^2 + b^2 + c^2 = -1$. Очевидно, что это уравнение не имеет вещественных решений.

Замечание 1. Указанные в теореме почти комплексные структуры J^+ сохраняют ориентацию на группе, а J^- меняют ориентацию на противоположную. Поэтому если ограничиться только ортогональными структурами, сохраняющими ориентацию, то такие структуры параметризуются точками сферы или псевдосферы.

Следствие 1. *Пусть W — множество g-ортогональных почти комплексных структур, сохраняющих ориентацию на четырехмерной группе Ли. Тогда если метрика G — риманова, то множество W — компактно и связно. Если g — псевдориманова метрика сигнатуры $(-,-,+,+)$, то множество W — некомпактно и является объединением двух непересекающихся связных подмножеств.*

Это непосредственно следует из параметризации множества W точками соответствующих поверхностей.

§ 2. Ассоциированные и приводимые почти комплексные структуры

Пусть J — левоинвариантная почти комплексная структура на группе Ли G с заданной левоинвариантной метрикой g. Если структура J — ортогональна относительно метрики g, то с парой J, g можно связать внешнюю 2-форму Ω, заданную следующим образом:

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY) \quad \text{для всех } X \text{ и } Y \text{ из алгебры Ли группы } G.$$

Форма Ω называется фундаментальной формой на группе G. Из ортогональности структуры J сразу следует, что $g(X, Y) = \Omega(JX, Y)$. Почти комплексная структура J на группе Ли размерности $2\,n$ называется интегрируемой или комплексной, если на группе можно ввести вещественные координаты $(x_1, \dots, x_n,\ y_1, \dots, y_n)$, такие что $J\partial/\partial x_1 = \partial/\partial y_1$, $\dots$, $J\partial/\partial x_n = \partial/\partial y_n$. Это фактически означает что действие оператора J можно отождествить с умножением на мнимую единицу i и ввести на группе комплексные координаты $(z_1, \dots, z_n)$, $z_k = x_k + iy_k,\ k = 1, \dots, n$, такие что

$$J\partial/\partial z_k = i\partial/\partial z_k,\ J\partial/\partial \bar{z}_k = -i\partial/\partial \bar{z}_k,$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right).$$

Если фундаментальная форма Ω — замкнута, а структура J — интегрируема, то метрика g называется кэлеровой (а в случае псевдоримановой метрики — псевдокэлеровой). Этот класс метрик наиболее популярен и активно изучается в римановом случае. Если J — комплексная структура, ортогональная относительно римановой метрики g, то пара J, g называется эрмитовой (а в случае псевдоримановой метрики — псевдоэрмитовой) структурой.

Тензором Нейенхейса почти комплексной структуры J называется тензор N типа (2,1) определяемый (на алгебре Ли группы G) следующим образом:

$$N(X,Y) = 2\,([JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y]). \tag{2.1}$$

Критерием интегрируемости почти комплексной структуры является следующая теорема.

Теорема 2 [17, т. 2]. *Пусть J — гладкая почти комплексная структура на дифференцируемом многообразии и N — ее тензор Нейенхейса. Структура J интегрируема тогда и только тогда, когда тензор N тождественно равен нулю.*

Если на группе Ли G задана внешняя невырожденная 2-форма Ω, и почти комплексная структура J сохраняет форму Ω, т. е.

$$\Omega(JX,JY) = \Omega(X,Y) \quad \text{для всех } X \text{ и } Y \text{ из алгебры Ли группы } G,$$

то говорят, что структура J — ассоциирована с формой Ω. С каждой ассоциированной почти комплексной структурой можно связать метрику g_J, заданную следующим образом:

$$g_J(X,Y) = \Omega(JX,Y) \quad \text{для всех } X \text{ и } Y \text{ из алгебры Ли группы } G.$$

Такие метрики называют ассоциированными. Очевидно, что всем таким метрикам соответствует одна и та же фундаментальная форма Ω.

Поскольку в случае размерности 4 инвариантную почти комплексную структуру можно отождествить с вещественной матрицей порядка 4, квадрат которой равен $-\,\mathrm{id}$, то задача нахождения всех почти комплексных структур в фиксированном базисе сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Вещественные решения этой системы определяют многообразие $GL(4,\mathbb{R})/GL(2,\mathbb{C})$ размерности 8 всех левоинвариантных почти комплексных структур. Поэтому классифицировать почти комплексные структуры в общем случае трудно и приходится рассматривать специальные классы структур. Два таких класса (ортогональные и ассоциированные с внешней 2-формой) были введены выше.

Введем еще один важный класс почти комплексных структур. Пусть G — группа Ли размерности $4n$, B — $2n$-мерное распределение на G и $B^{\perp}$ — распределение дополнительное к B.

Определение 1. Приводимой почти комплексной структурой, ассоциированной с парой распределений B и $B^{\perp}$ называется почти комплексная структура J, инвариантно действующая на B и $B^{\perp}$, т. е. для любых $u \in B$ и $v \in B^{\perp}$, $Ju \in B, Jv \in B^{\perp}$.

Приводимые почти комплексные структуры естественным образом возникают, когда группа будет расслоением и одно распределение является касательным к базе расслоения, а другое — касательным к слою. Сама структура J в этом случае является совокупностью двух структур, заданных на базе расслоения и на слое. Первым примером такого рода стали почти комплексные структуры на расслоении Хопфа, рассмотренные П. Годушоном [12].

Пусть G — группа Ли размерности 4, и e_1, e_2, e_3, e_4 — базис ее алгебры Ли. Тогда эту алгебру можно представить в виде прямой суммы двух двумерных подпространств $B \oplus B^{\perp}$ многими способами. В дальнейшем мы будем выбирать базис специальным образом так, чтобы распределения B и $B^{\perp}$ порождались бы векторами базиса.

Классификацию приводимых почти комплексных структур в этом базисе дает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть J — приводимая почти комплексная структура на четырехмерной группе Ли G, ассоциированная с парой распределений B и $B^{\perp}$. Тогда:*

1) *Если $B = \{e_1, e_2\}, B^{\perp} = \{e_3, e_4\}$, то*

$$J = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & -\alpha \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

2) *Если $B = \{e_1, e_3\}, B^{\perp} = \{e_2, e_4\}$, то*

$$J = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & -a_2 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

3) *Если $B = \{e_1, e_4\}, B^{\perp} = \{e_2, e_3\}$, то*

$$J = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & -\alpha & 0 \\ c & 0 & 0 & -a \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

причем

$$a^2 + bc = \alpha^2 + \beta\gamma = -1, \tag{2.5}$$

$$a_1^2 + b_1 c_1 = a_2^2 + b_2 c_2 = -1. \tag{2.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Имеем $Je_1 = ae_1 + ce_2$, $Je_2 = be_1 + de_2$, $Je_3 = \alpha e_3 + \gamma e_4$, $Je_4 = \beta e_3 + \delta e_4$. Откуда

$$J = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Из условия $J^2 = -\operatorname{id}$ получаем $b \neq 0, c \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$. Следовательно, $d = -a, \delta = -\alpha$.

2) Имеем $Je_1 = a_1 e_1 + c_1 e_3$, $Je_2 = a_2 e_2 + c_2 e_4$, $Je_3 = b_1 e_1 + d_1 e_3$, $Je_4 = b_2 e_2 + d_2 e_4$. Откуда

$$J = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

где A, B, C, D — диагональные блоки порядка 2. Поскольку все эти блоки взаимно коммутируют, то из условия $J^2 = -\operatorname{id}$ получаем

$$A^2 + BC = -\operatorname{id}, \quad B(A + D) = 0, \quad C(A + D) = 0, \quad D^2 + BC = -\operatorname{id}.$$

Из условия $A^2 = -BC - \mathrm{id}$ следует, что

$$\det(B)\det(C) = \det(\mathrm{id} + A^2) = (1 + a_1^2)(1 + a_2^2) > 0.$$

Это означает, что матрицы B и C невырождены и, следовательно, $D = -A$.

Доказательство пункта 3) аналогично доказательству пункта 1).

В дальнейшем будем обозначать структуры вида (2.2) через J_1, структуры вида (2.3) — через J_2, а структуры вида (2.4) — через J_3.

Замечание 2. Из равенств (2.5) и (2.6) видно, что $\mathrm{sign}(b) \neq \mathrm{sign}(c)$, $\mathrm{sign}(\beta) \neq \mathrm{sign}(\gamma)$, $\mathrm{sign}(b_k) \neq \mathrm{sign}(c_k)$ при $k = 1, 2$. Поэтому, полагая $b > 0, \beta > 0, b_1 > 0, b_2 > 0$ и выражая из (2.5) c и γ, а из (2.6) c_1 и c_2, получаем, что в каждом из трех случаев множество приводимых почти комплексных структур параметризуется областью пространства $\mathbb{C}^2$: $\{(z_1, z_2) : \mathrm{Im}\ z_1 > 0, \mathrm{Im}\ z_2 > 0\}$, где $z_1 = a + bi, z_2 = \alpha + \beta i$. При заданных условиях имеем: $c < 0,\ \gamma < 0,\ c_1 < 0,\ c_2 < 0$.

Обозначим через $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$ базисные левоинвариантные 1-формы, двойственные базису e_1, e_2, e_3, e_4. Введем следующие левоинвариантные 2-формы:

$$\Omega_1 = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4, \quad \Omega_2 = \theta^1 \wedge \theta^3 + \theta^2 \wedge \theta^4, \quad \Omega_3 = \theta^1 \wedge \theta^4 + \theta^2 \wedge \theta^3.$$

Будем обозначать матрицы этих форм в стандартном базисе 2-форм, теми же символами, что и сами формы. Имеем

$$J_1^t \Omega_1 J_1 = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & -\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \Omega_1.$$

Аналогичным образом получаем $J_2^t \Omega_2 J_2 = \Omega_2$ и $J_3^t \Omega_3 J_3 = \Omega_3$. Это означает, что приводимые структуры J_k сохраняют форму Ω_k, $k = 1, 2, 3$, т. е. являются ассоциированными с соответствующими 2-формами. Теперь с помощью конструкции

$$g_k(X, Y) = \Omega_k(J_k X, Y) \quad (k = 1, 2),$$

с каждым типом приводимых почти комплексных структур из теоремы 3 можно связать ассоциированные псевдоримановы метрики: g_1, g_2, g_3.

Таким образом, при фиксации базиса алгебры Ли четырехмерной группы Ли на этой группе возникают три семейства метрик:

$$\begin{aligned} g_1 &= -\,c\,(\theta^1)^2 + 2\,a\theta^1\theta^2 + b\,(\theta^2)^2 - \gamma\,(\theta^3)^2 + 2\,\alpha\theta^3\theta^4 + \beta\,(\theta^4)^2, \\ g_2 &= -\,c_1\,(\theta^1)^2 + 2\,a_1\theta^1\theta^3 - c_2\,(\theta^2)^2 + 2\,a_2\theta^2\theta^4 + b_1\,(\theta^3)^2 + b_2\,(\theta^4)^2, \\ g_3 &= -\,c\,(\theta^1)^2 + 2\,a\theta^1\theta^4 - \gamma\,(\theta^2)^2 + 2\,\alpha\theta^2\theta^3 + \beta\,(\theta^3)^2 + b\,(\theta^4)^2, \end{aligned}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям (2.5) и (2.6). В силу замечания 2 все левые угловые миноры указанных метрик — положительны, следовательно, все эти метрики являются римановыми.

Описанный выше метод построения приводимых почти комплексных структур и ассоциированных метрик требует выбора базиса в алгебре Ли. Однако если на группе удается определить метрику g инвариантным образом и ввести одно двумерное распределение B, то второе распределение $B^\perp$ можно задать как ортогональное дополнение распределения B относительно метрики g. Если J — приводимая почти комплексная структура, ассоциированная с такими распределениями, то непосредственно из определения 1 следует, что при любом выборе базиса в B и $B^\perp$ J имеет вид (2.2). Остальные случаи (2.3) и (2.4) сводятся к (2.2) перестановкой индексов базисных векторов.

Пусть снова G группа Ли размерности $4n$, и $B, B^\perp$ — пара $2n$-мерных левоинвариантных распределений, прямая сумма которых дает всю алгебру Ли группы G.

Определение 2. Антиприводимой почти комплексной структурой, ассоциированной с парой распределений B и $B^\perp$ на группе Ли G, называется почти комплексная структура J, такая что для всех $U \in B, JU \in B^\perp$ и для всех $V \in B^\perp, JV \in B$.

Геометрически определение 2 означает, что почти комплексная структура взаимно переставляет распределения B и $B^\perp$.

В четырехмерном случае антиприводимую почти комплексную структуру легко построить следующим образом. Пусть A — невырожденное линейное отображение из B в $B^\perp$, e_1, e_2 — базис в B, а e_3, e_4 — базис в $B^\perp$. Положим

$$\begin{aligned} &Je_1 = Ae_1 = v_1 \in B^\perp, \quad Je_2 = Ae_2 = v_2 \in B^\perp, \\ &Jv_1 = -e_1 = -A^{-1}v_1, \quad Jv_2 = -e_2 = -A^{-1}v_2\,. \end{aligned}$$

Из этих равенств видно, что J является антиприводимой почти комплексной структурой. Поскольку распределения B и $B^\perp$ изоморфны, то матрицу отображения A^{-1} можно отождествить с обратной матрицей отображения A, следовательно, в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 структура J имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & -A^{-1} \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, любое невырожденное линейное преобразование двумерного векторного пространства порождает левоинвариантную антиприводимую почти комплексную структуру на четырехмерной группе Ли, и обратно.

Классификацию антиприводимых почти комплексных структур на группе Ли размерности 4 в фиксированном базисе дает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 — базис алгебры Ли группы Ли размерности 4, и $\hat{J}$ — антиприводимая почти комплексная структура, ассоциированная с парой левоинвариантных двумерных распределений B и $B^\perp$, тогда:*

1) *Если $b = \{e_1, e_2\}, B^\perp = \{e_3, e_4\}$, то $\hat{J}$ имеет вид*

$$\hat{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d/D & b/D \\ 0 & 0 & c/D & -a/D \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

2) *Если* $B = \{e_1, e_3\}$, $B^{\perp} = \{e_2, e_4\}$, *то* $\hat{J}$ *имеет вид*

$$\hat{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -d/D & 0 & b/D \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & c/D & 0 & -a/D \\ c & 0 & d & \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

3) *Если* $B = \{e_1, e_4\}$, $B^{\perp} = \{e_2, e_3\}$, *то* $\hat{J}$ *имеет вид*

$$\hat{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -d/D & b/D & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \\ 0 & c/D & -a/D & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

где $D = ad - bc \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = \{e_1, e_2\}, B^{\perp} = \{e_3, e_4\}$. Как было показано выше, антиприводимая почти комплексная структура, ассоциированная с распределениями B и $B^{\perp}$, определяется невырожденным линейным отображением A. Положим $Ae_1 = ae_3 + ce_4$, $Ae_2 = be_3 + de_4$. Поскольку матрица самой структуры имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & -A^{-1} \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad -A^{-1} = \begin{bmatrix} -d/D & b/D \\ c/D & -a/D \end{bmatrix},$$

и мы получаем структуру $\hat{J}_1$.

После применения к индексам базисных векторов перестановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

структура $\hat{J}_1$ трансформируется в $\hat{J}_2$ и $\hat{J}_3$ соответственно. Обозначим через $\hat{g}$ левоинвариантную метрику, относительно которой базис e_1, e_2, v_1, v_2 является ортонормированным. Тогда антиприводимая почти комплексная структура $\hat{J} : \hat{J}e_1 = v_1$, $\hat{J}e_2 = v_2$, $\hat{J}v_1 = -e_1$, $\hat{J}v_2 = -e_2$ является ортогональной относительно метрики $\hat{g}$. Матрица этой метрики в базисе e_1, e_2, v_1, v_2 является единичной. А матрица перехода к этому базису для антиприводимых почти комплексных структур из теоремы 4 имеет вид для структуры $\hat{J}_1$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix},$$

для структуры $\hat{J}_2$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix},$$

для структуры $\hat{J}_3$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь, используя формулу замены базиса в метрике $g = P^t \hat{g} P$, находим матрицы метрик инвариантных относительно структур $\hat{J}_1, \hat{J}_2$ и $\hat{J}_3$ соответственно в базисе e_1, e_2, e_3, e_4:

$$\hat{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+c^2 & ab+cd \\ 0 & 0 & ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix}, \ \hat{g}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 & ab+cd \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & ab+cd & 0 & b^2+d^2 \end{bmatrix}, \ \hat{g}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & ab+cd & 0 \\ 0 & ab+cd & b^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det \hat{g}_1 = \det \hat{g}_2 = \det \hat{g}_3 = D^2$, то все эти метрики являются римановыми.

Определим еще один важный класс метрик. Пусть J — комплексная структура на группе Ли G и g — эрмитова метрика на G, тогда метрика g называется локально конформно кэлеровой, если существуют открытое покрытие $\{U\}_{\alpha \in A}$ группы G и семейство гладких функций $\{f\}_{\alpha \in A}$, каждая из которых определена на соответствующем элементе покрытия, такие что для любого $\alpha \in A$ фундаментальная 2-форма локально определенной метрики $h_\alpha = \exp(-f_\alpha) g_\alpha$ — замкнута (где g_α — сужение метрики g на элемент покрытия U_α). Заметим, что из левоинвариантности метрики g не следует левоинвариантность локальных метрик h_α. В [7] доказан следующий классический факт.

Теорема 5. *Пусть J — комплексная структура на многообразии M, g — псевдоэрмитова метрика на M и $\Omega(X,Y) = g(X, JY)$ — фундаментальная 2-форма метрики g. Метрика g является локально конформно кэлеровой тогда и только тогда, когда на M существует глобальная замкнутая 1-форма ω, такая что*

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega.$$

Форма ω называется формой Ли.

В заключение отметим, что если на группе Ли задана фундаментальная 2-форма Ω, полученная из метрики g с помощью g-ортогональной почти комплексной структуры J_0, то все почти комплексные структуры, ассоциированные с формой Ω, находятся по формуле [9, гл. 9]

$$J = J_0(\mathrm{id} + P)(\mathrm{id} - P)^{-1},$$

где P — эндоморфизм алгебры Ли группы G, такой что $J_0 P = -P J_0$, P — симметричен относительно метрики g, и оператор $\mathrm{id} - P^2$ — невырожден. Более подробно см. [9, гл. 9].

§ 3. Вывод основных вычислительных формул

В этом разделе будут выведены необходимые для дальнейших вычислений формулы, выражающие основные геометрические объекты через структурные константы алгебры Ли группы Ли.

Пусть G — группа Ли четной размерности n, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $e_1, \ldots, e_n$ — базис алгебры $\mathfrak{g}$, и $\theta^1, \ldots, \theta^n$ — двойственный базис левоинвариантных 1-форм. Тогда

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k. \tag{3.1}$$

Очевидно, что $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ для всех i, j, k. Пусть J — почти комплексная структура на группе G. Тогда

$$Je_i = \sum_{k=1}^{n} J_i^k e_k.$$

Подставляя это разложение вместе с разложением (3.1) в формулу (2.1), получаем

$$N(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \left(2 \sum_{l,m=1}^{n} \left(J_i^l J_j^m C_{lm}^k + J_i^l J_m^k C_{jl}^m - J_j^l J_m^k C_{il}^m \right) - 2\, C_{ij}^k \right) e_k\,.$$

Откуда

$$N_{ij}^k = 2 \sum_{l,m=1}^{n} \left(J_i^l J_j^m C_{lm}^k + J_i^l J_m^k C_{jl}^m - J_j^l J_m^k C_{il}^m \right) - 2\, C_{ij}^k\,. \tag{3.2}$$

Последняя формула выражает компоненты тензора Нейенхейса через структурные константы и является основным инструментом при выяснении вопроса об интегрируемости почти комплексной структуры.

Пусть ω — левоинвариантная 1-форма на группе G. Тогда из известной формулы [17]

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) \quad \text{для всех } X \text{ и } Y \text{ из } \mathfrak{g}$$

получаем

$$d\theta^k(e_i, e_j) = -\theta^k([e_i, e_j]) = -\sum_{l=1}^{n} C_{ij}^l \theta^k(e_l) = -C_{ij}^k\,.$$

Откуда

$$d\theta^k = -1/2 \sum_{i<j} C_{ij}^k \theta^i \wedge \theta^j\,. \tag{3.3}$$

Эта формула позволяет по заданным структурным константам вычислить внешний дифференциал фундаментальной 2-формы и полезна при выявлении на группе симплектических структур и псевдокэлеровых метрик.

Пусть g — левоинвариантная псевдориманова метрика на группе G и ∇ — связность Леви-Чивитты этой метрики. Будем обозначать компоненты метрики g через g_{ij}, а компоненты метрики g^{-1} — через g^{ij} (дальше подразумевается символика суммирования по повторяющемуся индексу). Тогда

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k. \tag{3.4}$$

Для связности Леви-Чивитты левоинвариантной метрики имеет место известная формула [6]

$$g(\nabla_X Y, Z) = 1/2\ (g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y))\,.$$

Подставляя в эту формулу разложение (3.4), получаем

$$\Gamma_{ij,l} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} = g(\nabla_{e_i} e_j, e_l) = 1/2\ (g([e_i, e_j], e_l) - g([e_j, e_l], e_i) + g([e_l, e_i], e_j)) = \\ = 1/2\ \left(C_{ij}^k g_{kl} - C_{jl}^k g_{ki} + C_{li}^k g_{kj} \right).$$

Поскольку $\Gamma_{ij}^k = g^{kl}\Gamma_{ij,l}$, то окончательно получаем

$$\Gamma_{ij}^k = 1/2\, g^{kl}\ \left(C_{ij}^m g_{ml} - C_{jl}^m g_{mi} + C_{li}^m g_{mj} \right). \tag{3.5}$$

Определим теперь тензор кривизны метрики g как тензор R типа $(2,1)$, заданный на алгебре $\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Подставляя в эту формулу разложения (3.1) и (3.4), получаем

$$R(e_i,e_j)e_k = R^l_{ijk} e_l = \left(\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - C^m_{ij}\Gamma^l_{mk} \right),$$

откуда

$$R^l_{ijk} = \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - C^m_{ij}\Gamma^l_{mk}. \tag{3.6}$$

Тензором Риччи метрики g называется тензор S типа $(2,0)$, определяемый на алгебре $\mathfrak{g}$ следующим образом: $S(X,Y) = g^{ij} g\left(R(e_i,X)Y, e_j\right)$. Другими словами, тензор Риччи — это свертка тензора кривизны по первому и четвертому индексам. Если существует константа λ, такая что $S(X,Y) = \lambda g(X,Y)$ для всех X и Y из $\mathfrak{g}$, то метрика g — называется эйнштейновой. Если ортогональная относительно метрики g почти комплексная структура J сохраняет тензор Риччи метрики g, то говорят, что тензор Риччи является псевдоэрмитовым, а в случае римановой метрики — эрмитовым. Очевидно, что тензор Риччи эйнштейновой псевдоэрмитовой метрики всегда является псевдоэрмитовым. Теперь, пользуясь данным определением, выведем формулу для вычисления компонент тензора Риччи. Имеем

$$S(e_i,e_j) = g^{lm} g\left(R(e_l,e_i)e_j, e_m\right) = g^{lm} g(R^v_{lij} e_v, e_m) = g^{lm} g_{vm} \left(\Gamma^u_{ij}\Gamma^v_{lu} - \Gamma^u_{lj}\Gamma^v_{iu} - C^u_{li}\Gamma^v_{uj} \right),$$

т. е.

$$S_{ij} = \Gamma^u_{ij}\Gamma^l_{lu} - \Gamma^u_{lj}\Gamma^l_{iu} - C^u_{li}\Gamma^l_{uj}\,. \tag{3.7}$$

Кривизной Риччи метрики g в направлении неизотропного вектора e называется величина

$$k_{\mathrm{ric}}(e) = \frac{S(e,e)}{g(e,e)}\,.$$

Из этой формулы сразу следует, что кривизна Риччи эйнштейновой метрики одинакова во всех направлениях. Скалярной кривизной метрики g называется свертка тензора Риччи

$$\sigma = g^{ij} S_{ij}\,. \tag{3.8}$$

Очевидно, что если $g = \lambda S$, то $\sigma = \lambda n$.

Секционной кривизной метрики g в двумерном направлении $\{X,Y\}$ называется величина

$$k(X,Y) = \frac{g\left(R(X,Y)Y, X\right)}{g(X, X\, g(Y,Y) - g(X,Y)\, g(X,Y)}\,.$$

Можно показать, что секционная кривизна не зависит от выбора базиса двумерного направления. Имеем

$$k(e_i,e_j) = \frac{g(R^m_{ijj} e_m, e_i)}{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}} = \frac{g_{im}\left(\Gamma^l_{jj}\Gamma^m_{il} - \Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{jl} - C^l_{ij}\Gamma^m_{lj} \right)}{g_{ii}g_{jj} - g^2_{ij}}\,. \tag{3.9}$$

В ортонормированном базисе формула (3.9) принимает вид

$$k(e_i,e_j) = \Gamma^l_{jj}\Gamma^i_{il} - \Gamma^l_{ij}\Gamma^i_{jl} - C^l_{ij}\Gamma^i_{lj}\,. \tag{3.10}$$

Если во всех выше приведенных формулах заменить компоненты связности разложением (3.4), то получатся формулы явно выраженные через структурные константы. Однако они слишком громоздки и мы не будем их приводить.

§ 4. Пример прямого произведения

1. Общие сведения. Пусть H_3 — трехмерная матричная группа Гейзенберга. Это нильпотентная некомпактная группа Ли, состоящая из вещественных матриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Алгебра Ли этой группы состоит из верхних нильтреугольных матриц, и ее канонический базис имеет вид

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначая через e_4 базисный вектор алгебры Ли $\mathbb{R}$, находим

$$[e_k, e_4] \quad \text{при } k = 1, 2, 3, \;\; [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0, \;\; [e_1, e_2] = e_3.$$

Отсюда немедленно находим ненулевые структурные константы $C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1$.

Пусть $\theta^k, k = 1, 2, 3, 4$ — двойственный базис левоинвариантных 1-форм. Подставляя в (3.3) значения структурных констант, находим

$$d\theta^k = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, 4, \;\; d\theta^3 = -1/2\, \theta^1 \wedge \theta^2. \tag{4.1}$$

Лемма 1. *В выбранном базисе, любая левоинвариантная 2-форма является замкнутой тогда и только тогда, когда она не содержит слагаемого пропорционального базисной 2-форме $\theta^3 \wedge \theta^4$.*

Для доказательства достаточно представить произвольную левоинвариантную 2-форму в виде линейной комбинации базисных 2-форм и воспользоваться соотношениями (4.1).

Из этой леммы, в частности, следует, что группа $H_3 \times \mathbb{R}$ допускает левоинвариантные симплектические структуры.

2. Ортогональные почти комплексные структуры. Обозначим через x_4 евклидову координату на $\mathbb{R}$ и выберем естественную левоинвариантную риманову метрику

$$g_0(X, X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

и левоинвариантную псевдориманову метрику $g_1(X, X) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Положим

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 6. *Среди g_0-ортогональных и g_1-ортогональных почти комплексных структур на группе $H_3 \times \mathbb{R}$ интегрируемыми являются только структуры вида*

$$\begin{bmatrix} \pm I & 0 \\ 0 & \pm I \end{bmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем только для структур, сохраняющих ориентацию на группе, поскольку для структур, меняющих ориентацию, все вычисления полностью аналогичны. Пусть J — g_0-ортогональная почти комплексная структура, сохраняющая ориентацию. Тогда по теореме 1

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & b & -a & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Подставляя значения структурных констант и коэффициенты матрицы (4.2) в (3.2), находим ненулевые компоненты тензора Нейенхейса

$$\begin{aligned} &N^3_{12} = N^3_{34} = 2\,(a^2-1), && N^1_{13} = -\,N^2_{14} = -N^2_{23} = -N^1_{24} = -2\,bc, \\ &N^2_{13} = -\,N^2_{24} = -2\,c^2, && N^3_{13} = -\,N^3_{24} = 2\,ab, \\ &N^1_{14} = N^1_{23} = 2\,b^2, && N^3_{14} = N^3_{23} = 2\,ac. \end{aligned}$$

Если структура J — интегрируема, то из равенства нулю тензора Нейенхейса получаем $b = c = 0,\ a = \pm 1$.

Пусть теперь J — g_1-ортогональная почти комплексная структура, сохраняющая ориентацию. Снова по теореме 1 имеем

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ b & c & 0 & a \\ c & -b & -a & 0 \end{bmatrix},$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = 1.$$

Компоненты тензора Нейенхейса этой структуры с точностью до знака совпадают с компонентами тензора Нейенхейса структуры вида (4.2). Поэтому, повторяя приведенные выше вычисления, снова получаем $b = c = 0,\ a = \pm 1$, что окончательно доказывает утверждение теоремы.

3. Приводимые почти комплексные структуры. Определим правое действие группы $\mathbb{R}$ на группе H_3 как умножение справа на матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда вектор e_3 порождает левоинвариантное векторное поле, касательное к орбите действия этой группы. Объединяя этот вектор с базисным вектором из $\mathbb{R}$, получаем двумерное распределение $\{e_3, e_4\}$ и g_0-ортогональное ему распределение $\{e_1, e_2\}$. Более того, распределение $\{e_3, e_4\}$ является центром алгебры Ли $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$. Теперь естественным образом возникают приводимые и антиприводимые почти комплексные структуры, ассоциированные с этими распределениями.

Докажем сначала общий результат.

Теорема 7. *Пусть J — приводимая почти комплексная структура на группе Ли размерности $4n$, ассоциированная с $2n$-мерными распределениями B и $B^{\perp}$. Тогда если структура J интегрируема на одном распределении, а второе распределение лежит в центре алгебры Ли группы G, то структура J — интегрируема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности будем считать, что распределение B лежит в центре алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть N — тензор Нейенхейса приводимой почти комплексной структуры, ассоциированной с распределениями B и $B^{\perp}$. Для любых X, Y из $\mathfrak{g}$ имеем

$$X = U + V,\ Y = W + T, \quad \text{где} \quad U, W \in B^{\perp},\ V, T \in B.$$

Откуда

$$N(X, Y) = N(U, W) + N(U, T) + N(V, W) + N(V, T).$$

Пользуясь определением тензора Нейенхейса (2.1) и тем, что структура J инвариантно действует на распределении B, лежащем в центре, получаем

$$N(V, W) = N(V, T) = N(U, T) = 0.$$

Поскольку структура J интегрируема на $B^{\perp}$, то $N(U, W) = 0$. Таким образом, $N \equiv 0$ и структура J — интегрируема.

Следствие 1. *Любая приводимая почти комплексная структура на группе $H_3 \times \mathbb{R}$, ассоциированная с распределениями $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$, — интегрируема.*

Поскольку центр группы $H_3 \times \mathbb{R}$ равен $\{e_3, e_4\}$, то для доказательства достаточно убедиться, что значение тензора Нейенхейса на паре e_1, e_2 равно 0. Для этого нужно применить формулу (2.1) для структуры вида (2.2) с учетом равенства (2.5) и значений базисных скобок Ли.

Теорема 8. *Группа $H_3 \times \mathbb{R}$ не допускает антиприводимых комплексных структур, ассоциированных с распределениями $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{J}$ — антиприводимая почти комплексная структура, ассоциированная с распределениями $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$, и $\hat{N}$ – ее тензор Нейенхейса. Поскольку распределение $\{e_3, e_4\}$ является центром алгебры Ли группы $H_3 \times \mathbb{R}$, то в силу определения тензора Нейенхейса и равенства $[e_1, e_2] = e_3$ имеем

$$\hat{N}(e_1, e_2) = 2\,\Big([\hat{J}e_1, \hat{J}e_2] - \hat{J}[\hat{J}e_1, e_2] - \hat{J}[e_1, \hat{J}e_2] - [e_1, e_2]\Big) = -2\,[e_1, e_2] = -2\,e_3.$$

Таким образом, $\hat{N} \neq 0$, а, следовательно, структура $\hat{J}$ не может быть интегрируемой.

$\square$

Поскольку приводимые комплексные структуры, ассоциированные с распределениями $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$, сохраняют 2-форму

$$\Omega = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4,$$

то, следуя разделу 2, можно получить семейство эрмитовых метрик с фундаментальной 2-формой Ω. Однако в силу (4.1) имеем

$$d\,\Omega = -1/2\,\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^4 = -1/2\,\theta^4 \wedge \left(\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4\right) = -1/2\,\theta^4 \wedge \Omega.$$

Поскольку 1-форма θ^4—замкнута, то по теореме 5 все такие метрики являются локально конформно кэлеровыми.

Рассмотрим левоинвариантные симплектические структуры

$$\Omega' = \theta^1 \wedge \theta^3 + \theta^2 \wedge \theta^4 \quad \text{и} \quad \Omega'' = \theta^1 \wedge \theta^4 + \theta^2 \wedge \theta^3,$$

и пары распределений $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$ и $\{e_1, e_4\}$, $\{e_2, e_3\}$. Согласно разделу 2 приводимые почти комплексные структуры, ассоциированные с этими парами распределений, сохраняют симплектические структуры Ω' и Ω'' соответственно.

Лемма 2. *Среди приводимых почти комплексных структур, ассоциированных с парами распределений $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$ и $\{e_1, e_4\}$, $\{e_2, e_3\}$ на группе $H_3 \times \mathbb{R}$ нет интегрируемых.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если J — приводимая почти комплексная структура, ассоциированная с распределениями $\{e_1, e_3\}$ и $\{e_2, e_4\}$, то в силу раздела 1.3 J имеет вид (2.3), и выполняются условия (2.6). Подставляя коэффициенты матрицы (2.3) и значения структурных констант в формулу (3.2), находим $N^1_{23} = 2\,b_1^2$. Если структура J — интегрируема, то $b_1 = 0$, что противоречит условиям (2.6).

Пусть теперь J — приводимая почти комплексная структура, ассоциированная с распределениями $\{e_1, e_4\}$ и $\{e_2, e_3\}$, тогда, как показано в разделе 2, J имеет вид (2.4) и выполняются условия (2.5). Снова с помощью формулы (3.2) находим $N^2_{13} = -2\,\beta^2$.

Если структура J — интегрируема, то $\beta = 0$, что противоречит условиям (2.5). Таким образом, приведенные выше частные случаи не дают левоинвариантных кэлеровых метрик. Тем не менее поскольку группа $H_3 \times \mathbb{R}$ допускает глобальные комплексные координаты (z_1, z_2), то легко предъявить не инвариантную кэлерову метрику g, положив, например, $g = dz_1 d\bar{z}_1 + dz_2 d\bar{z}_2$.

4. Ассоциированные метрики. Пусть J — приводимая комплексная структура, ассоциированная с распределениями $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$. Такая структура сохраняет 2-форму Ω, рассмотренную выше. Введем эрмитову метрику g_2, положив

$$g_2(X, X) = \Omega(JX, X).$$

Имеем

$$g_2 = -c\,(\theta^1)^2 + 2\,a\theta^1\theta^2 + b\,(\theta^2)^2 - \gamma\,(\theta^3)^2 + 2\,\alpha\theta^3\theta^4 + \beta\,(\theta^4)^2,$$

$$a^2 + bc = \alpha^2 + \beta\gamma = -1.$$

Эта метрика зависит от четырех вещественных параметров. Поскольку фундаментальная 2-форма этой метрики совпадает с Ω, то мы получаем четырехпараметрическое семейство локально конформно кэлеровых метрик.

Подставляя в формулу (3.5) значения структурных констант, находим ненулевые компоненты связности метрики g_2:

$$\Gamma^3_{12} = -\Gamma^3_{21} = 1/2, \quad \Gamma^1_{13} = -\Gamma^2_{23} = \Gamma^1_{31} = -\Gamma^2_{32} = -1/2\,a\gamma, \quad \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = -1/2\,c\gamma,$$
$$\Gamma^1_{14} = -\Gamma^2_{24} = \Gamma^1_{41} = -\Gamma^2_{42} = 1/2\,a\alpha, \quad \Gamma^2_{14} = \Gamma^2_{41} = 1/2c\alpha, \quad \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = -1/2\,b\gamma,$$
$$\Gamma^1_{24} = \Gamma^1_{42} = 1/2\,b\alpha.$$

Теперь, подставляя найденные компоненты связности в (3.7), находим тензор Риччи:

$$S_2 = -\frac{c\gamma}{2}(\theta^1)^2 + a\gamma\,\theta^1\theta^2 + \frac{b\gamma}{2}(\theta^2)^2 + \frac{\gamma^2}{2}(\theta^3)^2 - \alpha\gamma\,\theta^3\theta^4 + \frac{\alpha^2}{2}(\theta^4)^2.$$

Как видно, при $\alpha = 0$ тензор Риччи вырождается в направлении e_4. В [4] доказано, что нильпотентная группа Ли не допускает левоинвариантных не Риччи-плоских эйнштейновых метрик. Следовательно, метрика g_2 не является эйнштейновой. Вычисляя по формуле (3.8) скалярную кривизну метрики g_2, получаем $\sigma_2 = \gamma/2 < 0$.

В [9] показано, что тензор Риччи метрики g является эрмитовым только тогда, когда метрика g соответствует критической точке скалярной кривизны семейства всех ассоциированных метрик. Поскольку функция σ_2 не имеет критических точек на рассматриваемом семействе метрик, то тензор Риччи метрики g_2 не является эрмитовым при всех допустимых значениях параметров.

Найдем секционные кривизны метрики g_2 в базисных направлениях, пользуясь формулой (3.9). Получаем

$$\begin{aligned} &k_2(e_1,e_2) = 3/4\,\gamma, && k_2(e_1,e_3) = k_2(e_2,e_3) = -1/4\,\gamma,\\ &k_2(e_1,e_4) = k_2(e_2,e_4) = \frac{\alpha^2}{4\,\beta}, && k_2(e_3,e_4) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\gamma < 0$, то при любых допустимых значениях параметров метрика g_2 имеет знаконеопределенную секционную кривизну.

Покажем, что при всех допустимых значениях параметров метрика g_2 не является биинвариантной. Действительно, если бы метрика g_2 была биинвариантной, то в силу полученной в [6] формулы для секционной кривизны биинвариантной метрики имеем

$$k_2(e_1,e_2) = 1/4\,g_2([e_1,e_2],[e_1,e_2]) = 1/4\,g_2(e_3,e_3) = -1/4\,\gamma = 3/4\,\gamma,$$

что не выполняется при $\gamma < 0$.

Таким образом получен следующий результат

Теорема 9. *Группа $H_3 \times \mathbb{R}$ допускает четырехпараметрическое семейство комплексных структур и левоинвариантных локально конформно кэлеровых метрик с отрицательной скалярной кривизной.*

§ 5. Пример полупрямого произведения

Рассмотрим группу G_2, состоящую из матриц вида

$$\begin{bmatrix} e^{px_4} & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & e^{x_4} & x_4 e^{x_4} & x_2 \\ 0 & 0 & e^{x_4} & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad p \neq 0.$$

Группу G_2 также можно рассматривать как однопараметрическое семейство групп Ли. Алгебра Ли группы G_2 — это алгебра Ли $A_{4,2}$ из [3].

1. Общие сведения. Базисные ненулевые скобки Ли в алгебре Ли $A_{4,2}$ задаются следующим образом:

$$[e_1, e_4] = pe_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3. \tag{5.1}$$

Откуда находим вид ненулевых структурных констант

$$C^1_{14} = -C^1_{41} = p, \quad C^2_{24} = -C^2_{42} = 1, \quad C^2_{34} = -C^2_{43} = 1, \quad C^3_{34} = -C^3_{43} = 1.$$

Из равенств (5.1) видно, что алгебра Ли $A_{4,2}$ является разрешимой, но не является нильпотентной, а ее нильрадикал равен $\{e_1, e_2, e_3\}$. Он коммутативен и совпадает с первым производным идеалом. Из этих же равенств следует, что алгебра Ли $A_{4,2}$ является полупрямым произведением одномерной алгебры Ли, порожденной вектором e_4, и трехмерной коммутативной алгебры Ли. Оператор ad_{e_4} имеет матрицу

$$\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{Tr}(ad_{e_4}) = -p - 2$. Поэтому группа G_2 является унимодулярной только при $p = -2$.

2. Ортогональные почти комплексные структуры. Обозначим через g_0 левоинвариантную метрику, имеющую в предъявленном базисе канонический вид, а через I — матрицу вида

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 10. *g_0-ортогональная почти комплексная структура на группе G_2 является интегрируемой тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$\begin{bmatrix} \pm I & 0 \\ 0 & \pm I \end{bmatrix},$$

и $p = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J — сохраняющая ориентацию на группе g_0-ортогональная комплексная структура и N — ее тензор Нейенхейса. По теореме 1 матрица структуры J имеет вид (4.2). Подставляя коэффициенты этой матрицы и значения структурных констант в (3.2), находим

$$\begin{aligned}
&N^1_{12} = N^1_{34} = 2\,ac\,(p-1), && N^4_{13} = -\,N^4_{24} = -2\,c\,(ap - a + b),\\
&N^2_{12} = N^2_{34} = 2\,ab\,(p-1) + 2\,(a^2 - 1), && N^1_{14} = 2\,(c^2-1)(p-1) + 2\,ab,\\
&N^4_{12} = N^4_{34} = 2\,bc\,(p-1), && N^2_{14} = N^2_{23} = 2\,ac,\\
&N^1_{13} = -\,N^1_{24} = 2\,c\,(bp - a - b), && N^3_{14} = N^3_{23} = -2\,bc,\\
&N^2_{13} = -\,N^2_{24} = -2\,a\,(ap - a - b), && N^4_{14} = N^4_{23} = 2\,b^2,\\
&N^3_{13} = -\,N^3_{24} = -2\,ab\,(p-1) + c^2, && N^1_{23} = -\,2\,a^2\,(p-1) + 2\,ab.
\end{aligned}$$

Приравнивая компоненты тензора N к нулю, находим, что $N = 0$ только при $p = 1$, $b = c = 0$, $a = \pm 1$. Подставляя эти значения в матрицу (4.2), получаем две из матриц приведенных в теореме. Проводя аналогичные рассуждения для g_0-ортогональных структур, меняющих ориентацию, получаем две оставшиеся матрицы. Заметим, что норма тензора Нейенхейса g_0-ортогональных почти комплексных структур на группе G_2 зависит от неограниченного параметра p и может быть оценена только при конкретных значениях p.

3. Приводимые почти комплексные структуры. Из равенств (5.1) следует, что первый производный идеал алгебры Ли $A_{4,2}$ имеет размерность 3. Выберем в нем двумерный коммутативный идеал $\{e_1, e_2\}$. Таким образом, алгебра Ли $A_{4,2}$ представляется в виде ортогональной суммы двумерного коммутативного идеала и его g_0-ортогонального дополнения.

Теорема 11. *Все приводимые почти комплексные структуры, ассоциированные с распределениями $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$ на группе G_2, интегрируемы только при $p = 1$. При $p \neq 1$ ни одна из этих структур не является интегрируемой. А все антиприводимые почти комплексные структуры, ассоциированные с теми же распределениями, не являются интегрируемыми при всех допустимых значениях p.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J — почти комплексная структура вида (2.2) и N — ее тензор Нейенхейса. С помощью формулы (3.2) и учитывая условия (2.5), находим ненулевые компоненты тензора Нейенхейса

$$\begin{aligned}
N^2_{13} &= -\,2\,c\gamma\,(p-1), & N^1_{114} &= \,2\,bc\,(p-1),\\
N^2_{14} &= \,2\,c\,(\alpha-a)(p-1), & N^1_{23} &= -\,2\,b\gamma\,(p-1),\\
N^1_{24} &= -\,2\,b\,(\alpha+a)(p-1), & N^2_{24} &= -\,2\,(a^2+bcp+1).
\end{aligned}$$

Поскольку $b \neq 0, c \neq 0, \gamma \neq 0$, то $N = 0$ только при $p = 1$.

Пусть теперь $\hat{N}$ — тензор Нейенхейса антиприводимой почти комплексной структуры вида (2.7). С помощью (3.2) получаем, что $\hat{N}^2_{34} = -2$, следовательно, при любых допустимых значениях p, $\hat{N} \neq 0$. С помощью (3.3) находим

$$d\theta^1 = -1/2\,p\theta^1 \wedge \theta^4, \quad d\theta^2 = 1/2\,\theta^4 \wedge (\theta^2 + \theta^3), \quad d\theta^3 = -1/2\,\theta^3 \wedge \theta^4, \quad d\theta^4 = 0.$$

Из этих равенств следует, что замкнутая левоинвариантная 2-форма имеет вид $\lambda\theta^1 \wedge \theta^3 + \theta^4 \wedge \omega'$, при $p = -1$, и $\theta^4 \wedge \omega'$, при $p \neq -1$. Где ω' — линейная комбинация базисных форм $\theta^1, \theta^2, \theta^3$. Поскольку 2-форма $\theta^4 \wedge \omega'$ — вырождена, то отсюда вытекает следующий факт.

Лемма 3. *Группа G_2 допускает левоинвариантные симплектические структуры, только при $p = -1$.*

Простейшим примером такой структуры является 2-форма $\Omega_1 = \theta^1 \wedge \theta^3 + \theta^2 \wedge \theta^4$. В силу раздела 2 приводимые почти комплексные структуры, ассоциированные с распределениями $\{e_1, e_3\}, \{e_2, e_4\}$, сохраняют форму Ω_1 и имеют вид (2.3).

Теорема 12. *Среди приводимых почти комплексных структур, ассоциированных с распределениями $\{e_1, e_3\}, \{e_2, e_4\}$, нет интегрируемых.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J — почти комплексная структура вида (2.3) и N — ее тензор Нейенхейса. Подставляя коэффициенты матрицы (2.3) и значения структурных констант при условии $p = -1$ в (3.2), получаем $N^4_{23} = 2\,c_2^2$.

Если структура J — интегрируема, то из условия $N = 0$ следует, что $c_2 = 0$, что противоречит условию $c_2 < 0$.

4. Ассоциированные метрики. Рассмотрим сначала левоинвариантную метрику, ассоциированную с приводимыми почти комплексными структурами относительно распределений $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$ посредством фундаментальной формы $\Omega_1 = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4$. В силу раздела 2 такая метрика имеет вид

$$g_1 = -c\,(\theta^1)^2 + 2\,a\theta^1\theta^2 + b\,(\theta^2)^2 - \gamma\,(\theta^3)^2 + 2\,\alpha\theta^3\theta^4 + \beta\,(\theta^4)^2,$$
$$a^2 + bc = \alpha^2 + \beta\gamma = -1.$$

Компоненты связности этой метрики зависят от параметра p и имеют слишком сложный вид, поэтому предъявим только явный вид скалярной кривизны и секционные кривизны в направлениях выбранных распределений. Имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 2\,\gamma\,\left(2\,acp - bcp^2 + 4\,p + c^2 + 3\,p^2 + 4\right) - 2\,b,\\
k_1(e_1, e_2) &= -\,\gamma\,(a^2p^2 + a^2 - 2\,p + bcp)/4,\\
k_1(e_3, e_4) &= (4\,\gamma - 3\,b)/4.
\end{aligned}$$

Из условий $b > 0, \gamma < 0, bc < 0$ следует, что при любом p, $k_1(e_3, e_4) \leqslant 0$, а при $p < 0$, $k_1(e_1, e_2) \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь метрику, ассоциированную с почти комплексными структурами вида (2.3) и симплектической формой $\Omega_2 = \theta^1 \wedge \theta^3 + \theta^2 \wedge \theta^4$. Положим $p = 1$ и, следуя разделу 2, введем почти кэлерову метрику

$$g_2 = -c\,(\theta^1)^2 + 2\,a\theta^1\theta^2 + b2\,(\theta^2)^2 - \gamma\,(\theta^3)^2 + 2\,\alpha\theta^3\theta^4 + \beta\,(\theta^4)^2.$$

Заметим, что метрика g_2 не является кэлеровой или локально конформно кэлеровой.

При помощи (3.5) находим ненулевые компоненты связности метрики g_2:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^3_{11} = -c\alpha, \quad \Gamma^4_{11} = -c\gamma, \quad \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = a\alpha,\\
&\Gamma^4_{12} = \Gamma^4_{21} = a\gamma, \quad \Gamma^3_{13} = -\Gamma^4_{14} = \Gamma^3_{31} = -\Gamma^4_{41} = 1/2\,a\alpha,\\
&\Gamma^4_{13} = \Gamma^4_{31} = 1/2\,a\gamma, \quad \Gamma^1_{14} = \Gamma^2_{24} = 1, \quad \Gamma^3_{14} = \Gamma^3_{41} = 1/2\,a\beta,\\
&\Gamma^3_{22} = b\alpha, \quad \Gamma^4_{22} = b\gamma, \quad \Gamma^3_{23} = -\Gamma^4_{24} = \Gamma^3_{32} = -\Gamma^4_{42} = 1/2\,b\alpha,\\
&\Gamma^4_{23} = \Gamma^4_{32} = 1/2\,b\gamma, \quad \Gamma^3_{24} = \Gamma^3_{42} = 1/2\,b\beta,\\
&\Gamma^3_{33} = -\Gamma^4_{34} = -\Gamma^4_{43} = -\alpha\gamma, \quad \Gamma^4_{33} = -\gamma^2,\\
&\Gamma^2_{34} = -\Gamma^2_{43} = 1/2, \quad \Gamma^3_{34} = -\beta\gamma,\\
&\Gamma^3_{43} = -\Gamma^4_{44} = \alpha^2, \quad \Gamma^3_{44} = \alpha\beta.
\end{aligned}$$

Опустим здесь явное выражение тензора Риччи, поскольку оно слишком большое и малосодержательное.

Подставляя найденные значения компонент связности и структурных констант в (3.8), находим скалярную кривизну метрики g_2:

$$\sigma_2 = 1/2\,(24\,\gamma - b).$$

Из условий $\gamma < 0$, $b > 0$ следует, что $\sigma_2 < 0$. Поскольку $\partial\sigma_2/\partial b = -1/2 < 0$, то скалярная кривизна σ_2 не имеет критических точек.

Подставляя необходимые значения в формулу (3.9), находим базисные секционные кривизны метрики g_2:

$$\begin{aligned}
&k_2(e_1, e_2) = \gamma < 0,\\
&k_2(e_1, e_3) = k_1(e_1, e_4) = \tfrac{4\,c\gamma - a^2}{4\,c} > 0,\\
&k_2(e_2, e_3) = k_1(e_2, e_4) = 1/4\,(4\,\gamma + b),\\
&k_2(e_3, e_4) = 1/4\,(4\,\gamma - 3\,b).
\end{aligned}$$

Как видно, при любых допустимых значениях параметров секционная кривизна метрики g_2 не имеет определенного знака.

Таким образом, удалось получить следующие результаты.

Теорема 13. (1) *При $p \neq -1$ группа G_2 не допускает левоинвариантных симплектических структур и левоинвариантных кэлеровых метрик, а при $p = -1$ — допускает четырехпараметрическое семейство левоинвариантных симплектических структур и четырехпараметрическое семейство левоинвариантных почти кэлеровых метрик.*

(2) *При $p = 1$ группа G_2 допускает четырехпараметрическое семейство комплексных структур и четырехпараметрическое семейство левоинвариантных эрмитовых метрик с отрицательной скалярной кривизной.*

Список литературы

1. *Bourbaki N.* Groupes et algèbres de Lie. Paris: Hermann, 1971, 1972. Fasc. XXVI, XXXVII. Chap. I–III.
2. *Chu B.-Y.* Symplectic Homogeneous Spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 197. P. 145–159.
3. *Ghanam R., Thompson G., Miller E. J.* Variationality of Four-Dimensional Lie Group Connection // J. of the Lie Theory. 2004. Vol. 14. P. 395–425.
4. *Jensen G. R.* Homogeneous Einstein spaces of dimension four // J. Diff. Geom. 1969. Vol. 3. P. 309–349.
5. *Ishihara S.* Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions // J. Math. Soc. Japan. 1955. Vol. 7. No. 4. P. 345–369.
6. *Milnor J.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Advances in Math. 1976. Vol. 21. P. 293–329.
7. *Dragomir S., Ornea L.* Locally Conformal Kahler Geometry // Progress in Math., Birkhauser, Basel. 1998. Vol. 155.
8. *Barberis M. L.* Hypercomplex structures on four-dimensional Lie groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. Vol. 125. No. 4. P. 1043–1054.
9. *Смоленцев Н. К.* Пространства римановых метрик // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 31. С. 69–146.
10. *Смоленцев Н. К.* Ассоциированные почти комплексные структуры и (псевдо) римановы метрики на группах $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ и $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ // Вестн. Кемеровского гос. ун-та. 2005. Т. 24, № 4. С. 155–162.
11. *Корнев Е. С.* Ортогональные комплексные структуры на группах $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ и $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ // Вестн. Кемеровского гос. ун-та. 2005. Т. 24, № 4. С. 178–182.

12. *Годушон П.* Поверхности Хопфа — квазикомплексные многообразия размерности 4 (доклад VII). «Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе 1978/79 г.». М.: Мир, 1985. С. 120–138.
13. *Берар-Бержери Л.* Однородные римановы пространства размерности 4 (доклад III). «Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе 1978/79 г.». М.: Мир, 1985. С. 45–59.
14. *Мубаракзянов Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. ВУЗов. Математика. 1963. Т. 32, № 1. С. 114–123.
15. *Корнев Е. С.* Левоинвариантные почти комплексные структуры и ассоциированные метрики на четырехмерных прямых произведениях групп Ли //«Исследовано в России». М., 2006. http://zhurnal.ape.relarn.ru/
16. *Корнев Е. С.* Левоинвариантные почти комплексные структуры и ассоциированные метрики на четырехмерных неразложимых группах Ли //«Исследовано в России». М., 2006. http://zhurnal.ape.relarn.ru/
17. *Кобаяси Ш., Намидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: В 2 т. М.: Наука, 1981.
18. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.

Материал поступил в редколлегию 19.10.2006

Адрес автора

КОРНЕВ Евгений Сергеевич
РОССИЯ, 650043, г. Кемерово
ул. Красная, 6
тел.: (384-2) 28-78-19
e-mail: q148@mail.ru