

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: K.V.Lotov@inp.nsk.su

ПЕРЕХОДНЫЙ РЕЖИМ ОДНОМЕРНОЙ ДВУХПОТОКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ *

Численно проанализирован переход между кинетическим и гидродинамическим режимами одномерной двухпоточковой неустойчивости. Приведены корректирующие коэффициенты к общеизвестным приближенным выражениям для инкремента. Показано, что в широкой области параметров приближенные выражения завышают значение инкремента в несколько раз.

Ключевые слова: плазма, электронный пучок, двухпоточковая неустойчивость.

Электронный пучок, распространяющийся в плотной плазме, неустойчив по отношению к продольной модуляции плотности. Эта неустойчивость известна как двухпоточковая и описана во многих учебниках по физике плазмы (см., например, [1–4]). В зависимости от разброса пучка по скоростям Δv , волнового числа неустойчивой моды k и инкремента γ различают два режима неустойчивости: гидродинамический ($k\Delta v \ll \gamma$) и кинетический ($k\Delta v \gg \gamma$). В обоих режимах зависимость $\gamma(k)$ и скейлинги для максимального значения инкремента легко находятся. В данной статье мы исследуем поведение неустойчивости в переходном режиме (при $k\Delta v \sim \gamma$), для которого нет общеизвестных скейлингов.

Интерес к этой классической задаче вызван недавними экспериментами по нагреву плазмы мощными электронными пучками [5–7]. Есть указания на то, что важную роль на стадии насыщения неустойчивости в этих экспериментах играют эффекты захвата электронов пучка полем резонансных плазменных колебаний, а именно: распределение энергодвыделения пучка по длине плазменного столба, вычисленное в данном предположении, оказывается в хорошем со-

гласии с экспериментальными наблюдениями [8]. В свою очередь, энергия колебаний, при которой эффекты захвата становятся существенными, очень чувствительна к инкременту неустойчивости. В одномерном нерелятивистском случае [9] она пропорциональна γ^4 . Таким образом, для детального изучения релаксации пучка необходимо знать инкремент неустойчивости с хорошей точностью в широкой области параметров.

Рассмотрим самую простую одномерную модель. Пусть нерелятивистский электронный пучок с плотностью n_b и распределением по скоростям

$$f(v) = \frac{1}{\Delta v \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(v-v_0)^2}{\Delta v^2}\right) \quad (1)$$

распространяется в холодной однородной плазме плотности n_0 . Эта модель может оказаться слишком простой для описания реальных физических систем, где картина неустойчивости усложняется наличием косых неустойчивых волн, конечной шириной пучка или наличием внешнего магнитного поля. Однако простота модели позволит нам представить основные черты переходного режима в наглядной и универсальной форме. Кроме того, эта модель может быть по-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, Президента РФ (проекты № НШ-2749.2006.2 и МД-4704.2007.2), РФФИ (проекты № 06-02-1657; 08-01-00622), Рособразования (проект РНП. 2.2.1.1.3653 и инновационный образовательный проект № 456).

лезной при тестировании кинетических компьютерных кодов, для которых работа в заведомо кинетическом режиме требует больших затрат времени из-за малой плотности пучка и, соответственно, малого инкремента.

Похожая задача решалась и раньше [10; 11], однако эти работы были посвящены, главным образом, изменению топологии дисперсионных кривых в переходном режиме. Мы же сделаем основной акцент на сравнении точного решения и его традиционных аппроксимаций.

В рамках стандартной техники [12] можно получить дисперсионное соотношение для быстрых продольных волн и записать его в виде

$$\tilde{k}^2 = \frac{1}{(1 + \xi \Delta \tilde{v})^2} - \frac{2\tilde{n}_b}{\Delta \tilde{v}^2} (1 - Z(\xi)), \quad (2)$$

где

$$Z(\xi) = 2\xi e^{-\xi^2} \int_0^\xi e^{x^2} dx - i\sqrt{\pi}\xi e^{-\xi^2} \quad (3)$$

есть дисперсионная функция плазмы,

$$\xi = \frac{\omega_r - kv_0}{k\Delta v} + i\frac{\gamma}{k\Delta v}, \quad (4)$$

ω_r – действительная часть частоты волны, и $\tilde{n}_b = n_b / n_0$. Знак тильда обозначает безразмерные величины, причем за единицу скорости возьмем v_0 , а за единицу частоты – плазменную частоту $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m}$.

При $|\xi| \gg 1$ (гидродинамический режим) уравнение (2) принимает вид

$$\tilde{k}^2 = \frac{1}{(1 + \xi \Delta \tilde{v})^2} - \frac{\tilde{n}_b}{\xi^2 \Delta \tilde{v}^2}, \quad (5)$$

откуда для действительного \tilde{k} получается известный результат: максимальное значение инкремента достигается при $\tilde{k} = \tilde{k}_m \approx 1$ (или $k_m \approx \omega_p / v_0$) и соответствует

$$\tilde{\omega}_r(\tilde{k}_m) \approx 1 - \frac{\tilde{n}_b^{1/3}}{2^{4/3}}, \quad \tilde{\gamma}(\tilde{k}_m) \approx \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \tilde{n}_b^{1/3}. \quad (6)$$

Предел $|\xi| \ll 1$ соответствует кинетическому режиму. Здесь мы можем положить $Z(\xi) \approx -i\sqrt{\pi}\xi e^{-\xi^2}$ и найти

$$\tilde{\omega}_r(\tilde{k}) \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tilde{n}_b / (\tilde{k}^2 \Delta \tilde{v}^2)}}, \quad (7)$$

$$\tilde{\gamma}(\tilde{k}) \approx \frac{\tilde{n}_b \sqrt{\pi} (\tilde{k} - 1)}{\tilde{k}^3 \Delta \tilde{v}^3} \exp\left(-\frac{(1 - \tilde{k})^2}{\tilde{k}^2 \Delta \tilde{v}^2}\right). \quad (8)$$

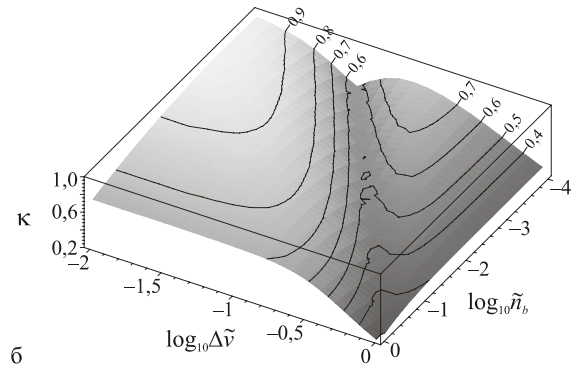
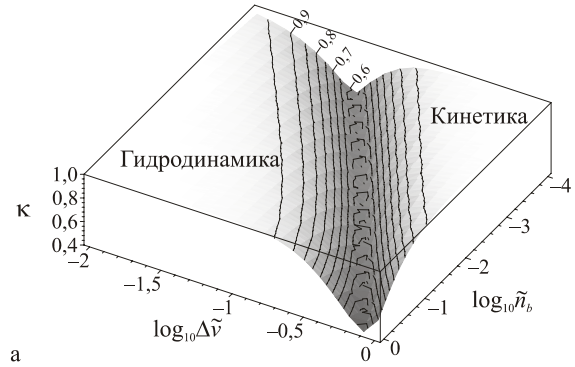


Рис. 1. Корректирующий коэффициент для максимального инкремента неустойчивости, полученного строгим (а) и приближенным (б) решением в рамках кинетического или гидродинамического режима

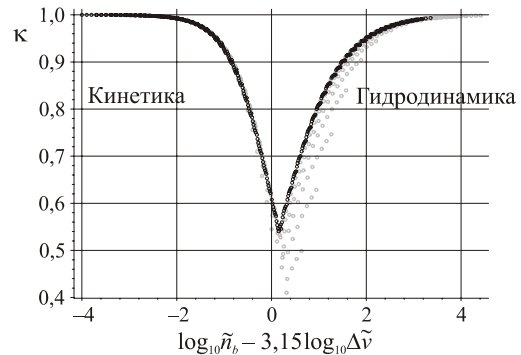


Рис. 2. Зависимость корректирующего коэффициента k от комбинации параметров пучка при $1 > \Delta \tilde{v} > 0,01$ (черные точки соответствуют интервалу плотностей $10^{-2} > \tilde{n}_b > 10^{-4}$, серые точки – интервалу $1 > \tilde{n}_b > 0,01$)

Для $\Delta\tilde{\nu} \ll 1$ выражение (8) достигает максимума при

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \tilde{k}_m \approx 1 + \Delta\tilde{\nu} / \sqrt{2}, \\ \tilde{\gamma}(\tilde{k}_m) &\approx 0,76\tilde{n}_b / \Delta\tilde{\nu}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

При произвольных \tilde{n}_b и $\Delta\tilde{\nu}$ уравнение (2) решается численно. Так могут быть най-

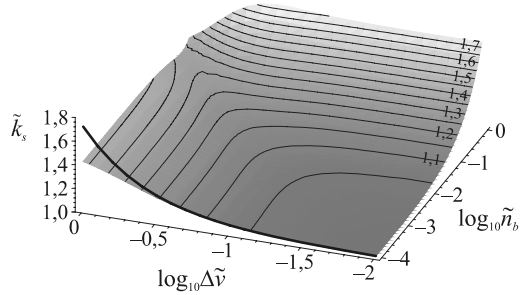


Рис. 3. Волновое число самой неустойчивой волны. Толстая линия показывает зависимость (9)

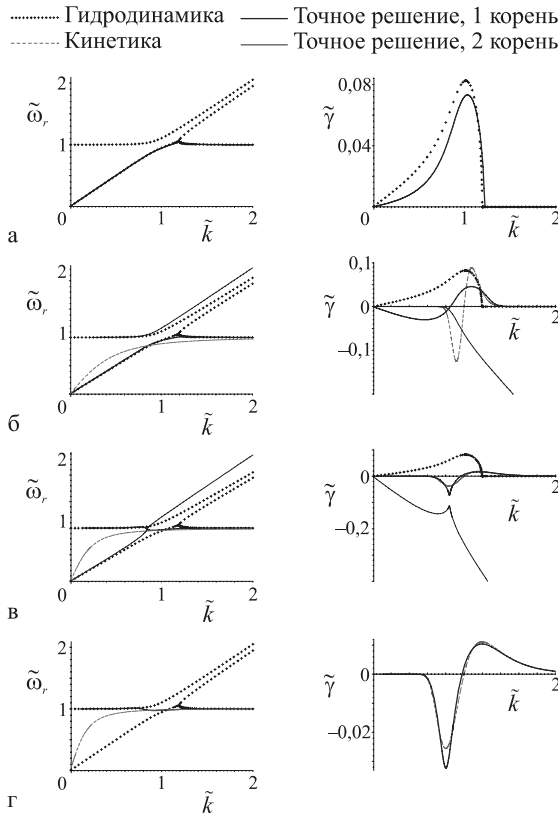


Рис. 4. Эволюция дисперсионных кривых: сплошные линии – численное решение полного дисперсионного уравнения (2); точечные линии – численное решение гидродинамического дисперсионного уравнения (5); пунктирные линии – кинетические выражения (7) и (8). В левой колонке показана действительная часть частоты $\tilde{\omega}_r(\tilde{k})$, в правой – инкремент $\tilde{\gamma}(\tilde{k})$

дены функции $\omega_r(\tilde{k})$ и $\gamma(\tilde{k})$, а также зависимость максимального инкремента неустойчивости $\gamma_m = \gamma(\tilde{k}_m)$ и соответствующего ему волнового числа \tilde{k}_m от параметров пучка \tilde{n}_b и $\Delta\tilde{\nu}$. Функция $\gamma_m(\tilde{n}_b, \Delta\tilde{\nu})$ сама по себе не очень информативна, поэтому на рис. 1, а представлен корректирующий коэффициент κ , т. е. отношение точного значения γ_m к значению, полученному либо решением уравнения (5), либо максимизацией выражения (8) в зависимости от того, что дает лучшую аппроксимацию. Для сравнения на рис. 1, б показано отношение $\tilde{\gamma}_m$ к максимальному инкременту, определяемому формулами (6) или (9). Как видно, в широкой области параметров простые формулы (6) и (9) оказываются верными лишь по порядку величины, в то время как сами по себе гидродинамическая и кинетическая модели имеют неплохую точность в областях своей применимости. Особо отметим, что упрощающие предположения, заложенные в гидродинамическое и кинетическое приближения, приводят к преувеличению инкремента неустойчивости.

Как видно из рис. 1, а, «желоб», отвечающий переходу между режимами, оказывается прямым и имеет неизменное сечение. Следовательно, с хорошей точностью можно считать, что функция $\kappa(\tilde{n}_b, \Delta\tilde{\nu})$ зависит от параметров пучка в комбинации $\tilde{n}_b \Delta\tilde{\nu}^{-s}$, где показатель степени $s \approx 3,15$ находится эмпирическим путем. Точность такой зависимости иллюстрируется рис. 2.

При $\tilde{n}_b \ll 0,1$ волновое число самой неустойчивой моды \tilde{k}_m не зависит от плотности пучка, оказывается таким же, как в кинетическом пределе, и при $\Delta\tilde{\nu} \ll 1$ хорошо аппроксимируется формулой (9) (рис. 3). По мере того, как плотность пучка приближается к плотности плазмы, \tilde{k}_m растет и приближается к $\sqrt{3}$, т. е. к значению, соответствующему встречным электронным потокам равной плотности [3].

Интересно проследить эволюцию точных и приближенных дисперсионных кривых по мере перехода от гидродинамического режима к кинетическому. Для этого зафиксируем плотность пучка ($\tilde{n}_b = 0,002$) и будем увеличивать его разброс по скоростям:

$\Delta\tilde{\nu} = 0,05$ (почти гидродинамический режим, рис. 4, а); $\Delta\tilde{\nu} = 0,12$ (наибольшее различие между точным и приближенными максимумами инкремента, рис. 4, б); $\Delta\tilde{\nu} = 0,24$ (близко к пересоединению дисперсионных кривых, рис. 4, в); $\Delta\tilde{\nu} = 0,3$ (почти кинетический режим, рис. 4, г). С увеличением $\Delta\tilde{\nu}$ инкремент убывает (рис. 4, а), интервал неустойчивых волновых чисел смещается в область больших \tilde{k} и сужается, в то время как действительная часть частоты меняется незначительно (рис. 4, б). При некотором значении $\Delta\tilde{\nu}$ (когда инкремент уже достаточно близок к кинетическому пределу) происходит пересоединение дисперсионных кривых (рис. 4, в) [10; 11], после которого и действительная, и мнимая части частоты близки к кинетическим значениям (7) и (8).

Список литературы

1. Бриггс Р. Двухпучковая неустойчивость // Достижения физики плазмы / Под ред. М. С. Рабиновича. М.: Мир, 1974. С. 132–171.
2. Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 525 с.
3. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1975. Т. 1. 272 с.
4. Иванов А. А. Физика сильнонеравновесной плазмы. М.: Атомиздат, 1977. 352 с.
5. Burdakov A., Azhannikov A., Astrelin V. et al. Plasma heating and confinement in GOL-3 multi mirror trap // Transactions of Fusion Science and Technology. 2007. Vol. 51. P. 106–111.
6. Аржанников А. В., Астрелин В. Т., Бурдаков А. В. и др. Исследование механизма быстрого нагрева ионов в многопучковой ловушке ГОЛ-3 // Физика плазмы. 2005. Т. 31. С. 506–520.
7. Аржанников А. В., Астрелин В. Т., Бурдаков А. В. и др. Прямое наблюдение аномально низкой продольной электронной теплопроводности во время коллективной релаксации сильнооточного релятивистского электронного пучка в плазме // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77. С. 426–429.
8. Timofeev I. V., Lotov K. V. Relaxation of a relativistic electron beam in plasma in the trapping regime // Phys. Plasmas. 2006. Vol. 13. P. 062312.
9. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. Нелинейная теория плазмы // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973. Т. 7. С. 3–145.
10. O'Neil T. M., Malmberg J. H. Transition of the dispersion roots from beam-type to Landau-type solutions // Phys. Fluids. 1968. Vol. 11. P. 1754–1760.
11. Dum C. T. Transition in the dispersive properties of beam-plasma and two-stream instabilities. // Journal of Geophysical Research. 1989. Vol. 94. P. 2429–2442.
12. Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Росатомиздат, 1963. Т. 3. С. 3–140.

Материал поступил в редколлегию 04.11.2007