УДК 37.0

И. Б. Ляпунов

Специализированный учебно-научный центр
Новосибирского государственного университета
ул. Ляпунова, 3, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: lib@sesc.nsu.ru

КЛАССИЧЕСКИЕ ОШИБКИ УЧАЩИХСЯ СУНЦ НГУ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Рассматриваются проблемы углубленного обучения математике старших школьников в условиях Специализированного учебно-научного центра Новосибирского госуниверситета (СУНЦ). На примере ряда тем подробно рассмотрены возникающие ошибки учащихся при решении задач по стереометрии и планиметрии. Проанализированы причины их возникновения, приведены конкретные опорные геометрические конструкции для анализа возникающих ошибок, практической работы учителей и самостоятельной работы учащихся. Отмечены преимущества и недостатки различных подходов к решению нестандартных задач. Даны конкретные рекомендации по оптимизации решений. Отдельное внимание уделено задачам с несколькими вариантами решений.

Ключевые слова: математика, обучение математике школьников, углубленное обучение математике, СУНЦ НГУ, школа-интернат, ошибка, планиметрия, стереометрия, перпендикуляр к плоскости, проекция, метод координат, сечение.

В предыдущих выпусках журнала были подробно рассмотрены классические ошибки обучающихся год или два в условиях школы-интерната Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) одаренных школьников старших классов при изучении конкретных разделов алгебры [Ляпунов, 2011а, б; 2012].

Настоящая статья посвящена классическим ошибкам этой категории школьников в геометрии. Несмотря на то, что программой в старших классах средней школы предусмотрено изучение стереометрии, в СУНЦ НГУ достаточно много внимания уделяется повторению планиметрии, общим приемам решения геометрических задач, как плоских, так и пространственных. Программа одногодичного потока по геометрии отличается от программы двухгодичного потока. На двухгодичном потоке обучения, когда школьникам остается два года до выпуска, больше времени, поэтому целесообразно уделить значительное время планиметрии, а затем начать решать задачи по стереометрии. На одногодичном потоке, где автор работает свыше 20 лет, ситуация принципиально иная. Поскольку времени всего один год, приоритетом обучения геометрии является стереометрия, а планиметрия повторяется попутно со стереометрическими задачами. Последние, как правило, сводятся к нескольким менее сложным планиметрическим задачам. После получения устойчивых навыков решения несложных планиметрических задач ближе к концу учебного года можно перейти к более сложным задачам, учащиеся будут уже подготовлены к их решению.

В настоящей статье мы не будем останавливаться на вычислительных ошибках, ошибках по невнимательности, а рассмотрим только ошибки, связанные с неверным пониманием геометрических конструкций, неправильным применением теории, неверным истолкованием полученных результатов, также следовать логике обучения на одногодичном потоке в анализе ошибок и последовательности их возникновения.

Попадая на один завершающий среднее образование год учебы в СУНЦ НГУ, школьники обычно имеют представления о стереометрии, поскольку занимались ей весь предыдущий год. Традиционно обучение начинается с повторения курса планиметрии в части вычисления отношений отрезков, в том числе с помощью дополнительных построений, решения треугольников, применения теорем синусов и косинусов. Затем происходит повторение курса стереометрии, в частности, аксиом стереометрии, изучение многогранников и построение плоских сечений многогранников. Здесь возникает первый тип ошибок, связанных с неверным построением сечения. Остановимся на основных. При обучении построению сечений одним из основных приемов является построение дополнительной точки искомой плоскости с использованием вспомогательной плоскости.

Рассмотрим следующую задачу: провести сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины P, Q, R ребер AA_1, B_1C_1, CD соответственно (рис. 1). Главная трудность в том, что никакие две данные точки не лежат в какой-то одной плоскости граней куба. Правильное решение в построении дополнительной точки состоит в следующем (рис. 2). В плоскости BB_1C_1C через точку Q проведем прямую $QF \parallel CC_1$. Через параллельные прямые QF и AA_1 проведем вспомогательную плоскость, которая пересекает плоскость основания по прямой FA. В пересечении прямых FA и QP, лежащих во вспомогательной плоскости, получим новую точку T_1 из искомой плоскости, лежащую в плоскости основания, её можно соединить с точкой R, получить в плоскости основания прямую T_1R, пересекая ребра куба или их продолжения с найденной прямой, можно получить новые точки T_2, T_3 и, действуя аналогично, построить плоскость сечения (рис. 3) в виде выходящего за рамки куба треугольника $T_3T_5T_7$. Само сечение является шестиугольником $T_2RT_4QT_6P$.

Распространенной ошибкой является построение на плоском чертеже несуществующей точки T_1 пересечения скрещивающихся прямых PQ и AD (рис. 4). Далее учащимися выполняются аналогичные правильным действия, приводящие к пересечению двух плоскостей по ломаной линии T_2PT_6 (рис. 5).

Привычка к кубам и параллелепипедам также ведет к распространенной ошибке – неправильному построению сечения. Рассмотрим следующую задачу. Найти площадь сечения правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1, плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону

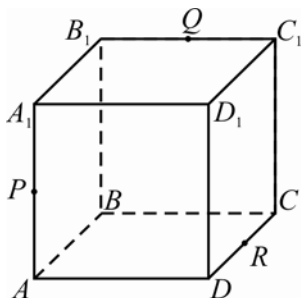

Рис. 1

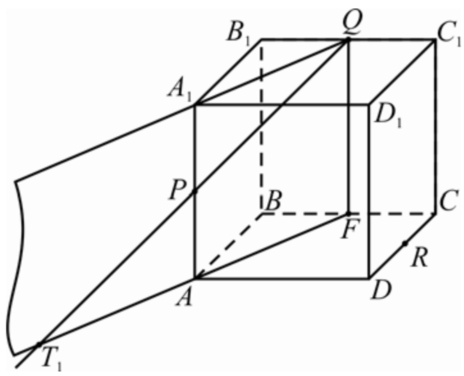

Рис. 2

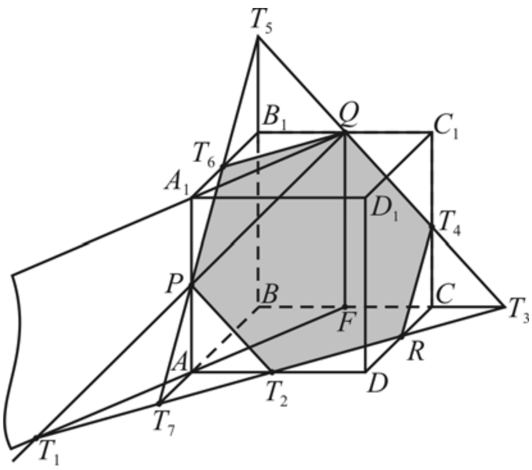

Рис. 3

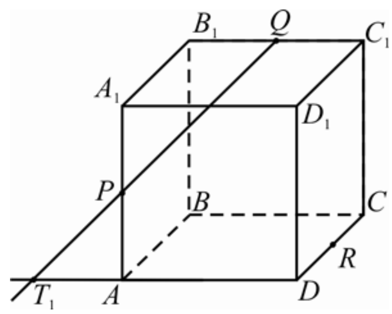

Рис. 4

верхнего основания. Распространенным неверным вариантом построения сечения является изображенный на рис. 6 прямоугольник AC_1D_1F вместо шестиугольника (рис. 7) $AT_3C_1D_1T_4F$, найденного с помощью дополнительных построений точек T_3 и T_4 в плоскостях граней BCC_1B_1 и DEE_1D_1 соответственно.

К тупику в поиске решения также часто ведет неумение или неготовность учащихся выйти за рамки фигуры при построении сечения. Рассмотрим следующую задачу из [Белоносов, 2000]. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC, в котором $AB = BC = a$, $\angle ABC = 90°$. Высота призмы равна a. На ребре AB выбрана точка D так, что $2BD = AD$. Через точки C и D параллельно AC_1 проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения. Ключевым моментом в поиске решения является построение отрезка $A_2C \parallel AC_1$ и использование признака параллельности прямой и плоскости (рис. 8). Правильный ответ $a^2\sqrt{14}/12$.

Трудности с построением сечений возникают и на пирамидах. Рассмотрим следующую задачу. Построить сечение правильной пирамиды $SABCD$ с вершиной S плоскостью, проходящей через вершину A основания и середины M и N ребер SB и SD соответственно. Найти, в каком отношении данная плоскость делит ребро SC. При решении данной задачи учащиеся легко соединяют лежащие в плоскостях боковых граней точки искомой плоскости (рис. 9), но затрудняются построить пересечение искомой плоскости с ребром SC, делают неверный вывод, что искомым сечением является треугольник AMN. Для правильного решения этой задачи можно применить два способа. Первый связан с использованием диагональных плоскостей SAC и SBD, как вспомогательных с дополнительным построением (рис. 10) $ST \parallel AC$, рассмотрением двух пар подобных треугольников APH и TPS, а также AQC и TQS. Правильный ответ 1 : 2. Вторым способом решения (рис. 11) может быть продолжение ребер основания на ту же длину с применением теоремы о том, что если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения параллельна данной прямой.

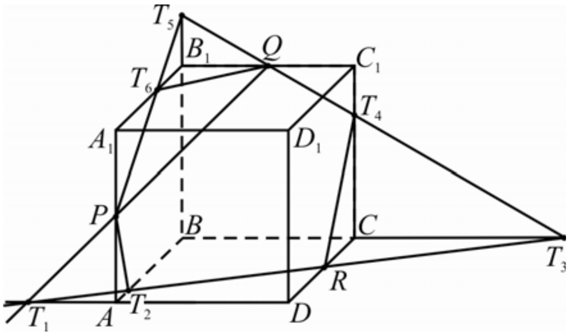

Рис. 5

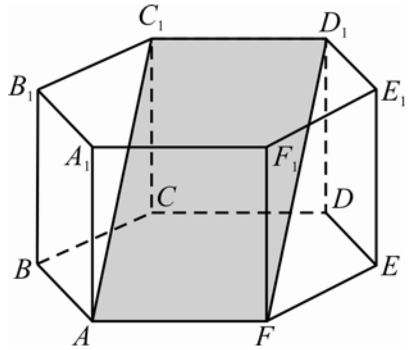

Рис. 6

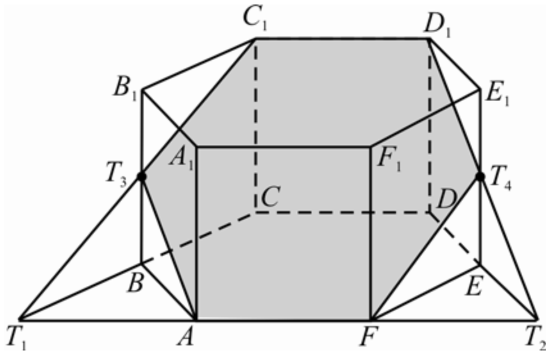

Рис. 7

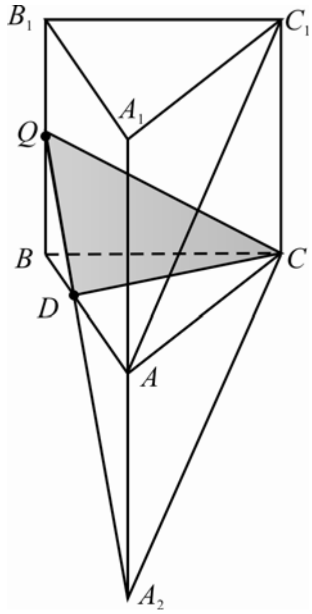

Рис. 8

Искомая плоскость *EQF*, а дополнительное построение $ST \parallel CD$ придется уже делать в плоскости *SDC*.

Большой пласт ошибок учащихся связан с построением линейных углов двугранных углов, перпендикуляра из точки к плоскости, ортогональным проектированием. Рассмотрим основные из них. Предварительно изучается стандартная конструкция (рис. 12), которая позволяет при определенных начальных данных (даны две пересекающиеся по прямой l плоскости α и β, известна длина перпендикуляра AB, соединяющего точки в указанных плоскостях α и β) гарантированно за три шага ($AM \perp l$, SM, $AN \perp SM$) наметить схему построения перпендикуляра AN из точки A к плоскости β с последующими вычислениями необходимых элементов, включая величину линейного угла AMS, образованного плоскостями α и β. Практическое применение этой конструкции начинается на правильной четырехугольной пирамиде, где требуется опустить перпендикуляр из точки пересечения диагоналей основания на боковую грань. На этом этапе многие учащиеся запоминают, что надо соединить точку пересечения диагоналей основания с серединой ребра основания, чтобы получить первый перпендикуляр изученной стандартной конструкции, однако если в основании пирамиды лежит ромб, то такое механическое запоминание ведет к ошибке. Рассмотрим следующую задачу: в основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом φ, все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом θ. Найти расстояние от точки пересечения диагоналей основания до боковой грани пирамиды. Проводя «перпендикуляр» в середину стороны основания (рис. 13), учащиеся получают неверный ответ $\frac{1}{2}a\sin\theta$, а применяя верную конструкцию, в которой перпендикуляр не попадает в середину стороны основания (рис. 14), получают верный ответ $\frac{1}{2}a\sin\varphi\sin\theta$.

Аналогичный эффект можно наблюдать, если в основании пирамиды прямоугольник.

Рассмотрим задачу из [Белоносов, 2000]. В основании пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами $AB = 3$, $BC = 4$. Боковые ребра пирамиды имеют

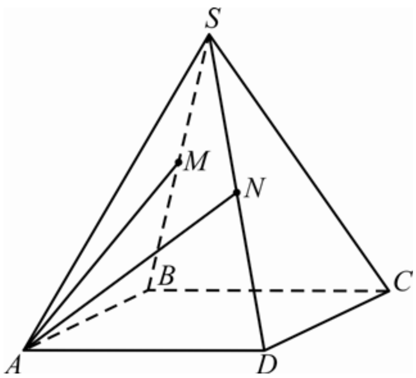

Рис. 9

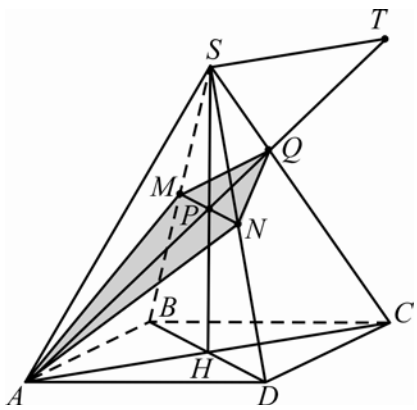

Рис. 10

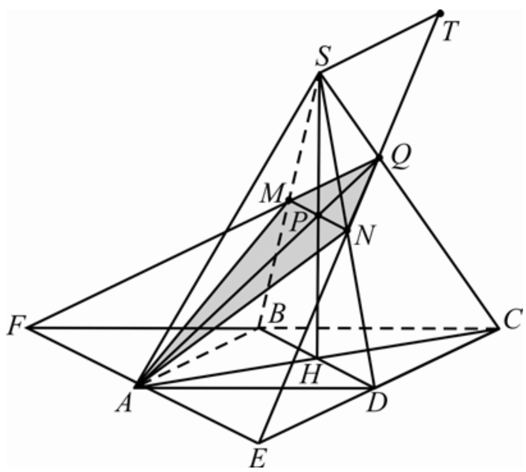

Рис. 11

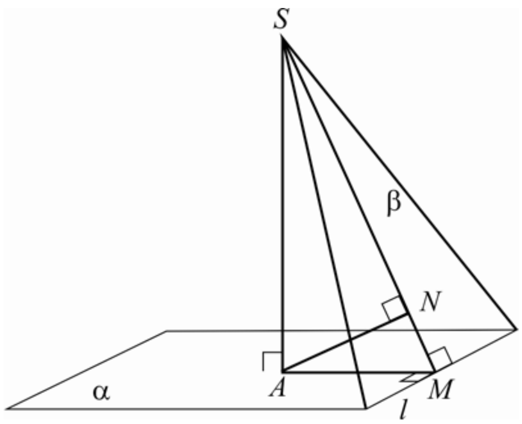

Рис. 12

одинаковую длину, ее высота равна $12/5$. Плоскость α проходит через прямую SA параллельно диагонали BD основания. Найти расстояние от вершины C до плоскости α. Правильное решение состоит в выстраивании стандартной конструкции с перпендикуляром на этой конкретной пирамиде (рис. 15). Для этого необходимо осуществить параллельный перенос естественного для данной пирамиды перпендикуляра SH в точку C, найти его пересечение с прямой SA в точке Q. Из подобия треугольников SAH и QAC легко устанавливается $CQ = 24/5$. Далее, используя признак параллельности прямой и плоскости, легко построить искомую плоскость, расстояние до которой требуется определить. Для этого продолжим ребра CB и CD на ту же длину, построив точки N и M, получим, что прямые BD и MN параллельны, а плоскость MSN полностью удовлетворяет условию задачи. До этого места решение, как правило, не вызывает трудностей у обученных школьников. Дальнейшее правильное решение (рис. 16) сводится к трем стандартным шагам: построению перпендикуляров $CF \perp MN$, $QF \perp MN$, $CP \perp FQ$. При этом длина отрезка CP – искомое расстояние. Дважды вычисляя площадь треугольника MCN по различным формулам, находим

$$CF = (8 \cdot 6)/10 = 24/5 = CQ,$$

откуда треугольник FCQ – прямоугольный равнобедренный и искомое расстояние легко находится

$$CP = CF \cdot \cos 45^\circ = \frac{24}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{5}.$$

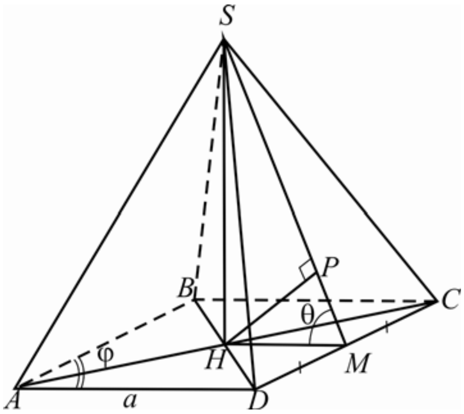

Рис. 13

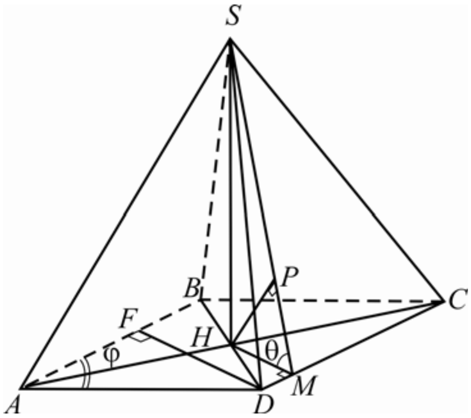

Рис. 14

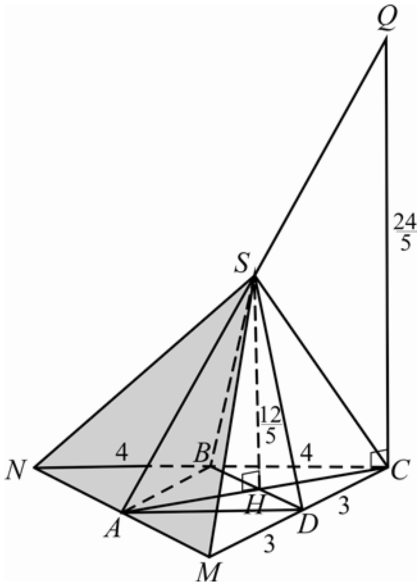

Рис. 15

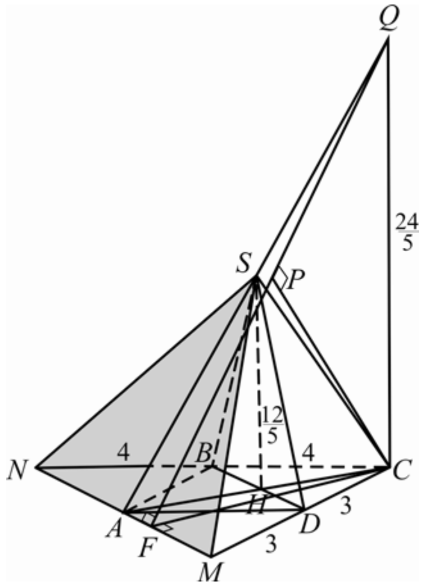

Рис. 16

Классическая ошибка при решении данной задачи состоит в том, что учащиеся забывают либо не учитывают тот факт, что диагонали прямоугольника, не являющегося квадратом, не перпендикулярны, и неверно полагают искомым отрезком $CP \perp AQ$ (рис. 17).

При решении многих задач необходимый перпендикуляр, соединяющий плоскости и участвующий в расчетах, обычно легко усматривается, однако есть задачи, где такой перпендикуляр отсутствует, а вместо него предлагается наклонный отрезок. Рассмотрим задачу из [Бунеева, Каргаполов, 2005], предлагавшуюся на выпускных экзаменах по математике в СУНЦ НГУ в 1995 г. В пирамиде $ABCD$ двугранный угол при ребре AB равен $45°$. К ребру AB из вершин C и D проводятся перпендикуляры соответственно CM и DN. Найти длину отрезка MN, если известно, что $CM = 6$, $CN = \sqrt{59}$, а высота пирамиды, проведенная из вершины D, равна 7. Главная трудность при решении данной задачи указать, куда падает высота пирамиды на плоскость основания ABC, а также построить линейный угол двугранного угла с ребром AB. В таких случаях (рис. 18) надо опускать высоту DH приблизительно, затем проводить в плоскости основания $HN \parallel CM$, угол DNH – линейный, равен $45°$ по условию, откуда можно уточнить положение точки H и вычислить $HN = 7$ из прямоугольного треугольника DNH с углом $45°$. Далее выполняется дополнительное построение $CF \perp NH$. Из прямоугольника $MCFN$ находим $MN = CF$, $MC = NF = 6$, откуда $FH = 1$. Далее из прямоугольного треугольника CDH по теореме Пифагора находим $CH = \sqrt{59-49} = \sqrt{10}$. Затем из прямоугольного треугольника CFH по теореме Пифагора находим $CF = \sqrt{10-1} = 3 = MN$. Распространенной ошибкой при решении этой задачи является утверждение, что точки M и N совпадают, поскольку, по мнению ошибающихся школьников, перпендикуляры CM и DN обязаны прийти в одну и ту же точку на ребре AB, таким образом, распространенный неверный ответ $MN = 0$. Также часто ошибочно принимают угол DMH за линейный угол двугранного угла с ребром AB.

Трудности с правильным построением линейного угла двугранного угла встречаются и в следующей задаче. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, плоскость, проведенная через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол $45°$. Полученное сечение имеет площадь Q. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда. Правильное решение состоит в последовательном изображении элементов условия на чертеже (рис. 19). Плоскость сечения AB_1C_1D, линейный угол BFB_1 двугранного угла, образованного плоскостью сечения с плоскостью основания. Пусть ребро основания равно a, высота сечения $B_1F = l$, тогда $Q = a \cdot l$, в то время как площадь одной боковой грани равна

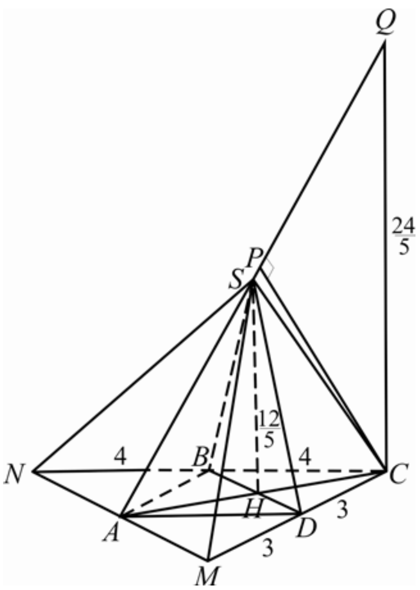

Рис. 17

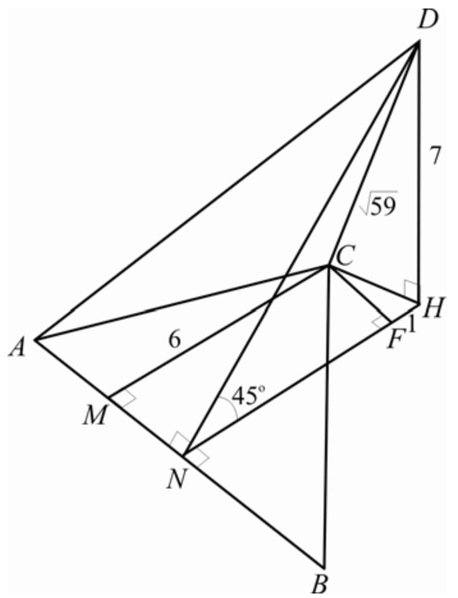

Рис. 18

$$a \cdot l \cdot \sin 45^\circ = al\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а площадь боковой поверхности (четырех боковых граней) равна $2\sqrt{2}Q$. Учащиеся часто ошибаются при решении данной задачи, принимая угол CDC_1 за линейный.

Отдельный пласт ошибок связан с построением проекций прямых и отрезков на плоскость. Заблуждения обычно основаны на неверных геометрических представлениях и неумении либо нежелании учащихся точно следовать определениям. Рассмотрим задачу из [Белоносов, 2000]. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 точки M и K – середины ребер AB и A_1C_1 соответственно. Известно, что прямая MK образует угол в 30° с плоскостью AA_1B_1B, $MK = 2\sqrt{3}$. Найти объем призмы $ABCA_1B_1C_1$. При решении подобных задач важно донести до учащихся, что правильное нанесение на чертеж данных задачи является основой успешного решения. В данной задаче главное – правильно спроектировать (рис. 20) прямую MK на плоскость AA_1B_1B для этого надо спроектировать две различные точки прямой MK на эту плоскость. Поскольку одна точка M уже лежит на плоскости AA_1B_1B, то остается опустить перпендикуляр из точки K на плоскость AA_1B_1B. Чтобы это сделать правильно, удобно воспользоваться естественным перпендикуляром C_1F к плоскости AA_1B_1B, а затем провести $KE \parallel C_1F$. Из подобия треугольников A_1KE и A_1C_1F находим, что E – середина A_1F. В итоге проекцией отрезка MK является отрезок ME, а угол между прямой MK и плоскостью AA_1B_1B равен углу KME между прямой и ее проекцией и составляет по условию 30°. Далее, используя соотношения в прямоугольном треугольнике KEM, несложно вычислить

$$EM = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3,\ EK = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

Зная EK, легко определить сторону равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$, равную 4, а из прямоугольного треугольника MEF можно по теореме Пифагора найти высоту призмы $FM = 2\sqrt{2}$, далее по формуле объема получить правильный ответ $V = 8\sqrt{6}$. Однако многие учащиеся не находят верного решения данной задачи, ошибочно полагая (рис. 21), что точка K проектируется в точку F – середину A_1B_1, неверно вычисляют сторону треугольника $A_1B_1C_1$, полагая ее равной $2\sqrt{3}$, и высоту призмы, принимая ее за 3, соответственно получают неверный объем.

Рассмотрим еще одну задачу из [Там же]. Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 1, ее высота равна 2. Плоскость α проходит через вершины A, S и середину M ребра BC, плоскость β проходит через вершину B и точки K и L – середины ребер AS и CS. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Найти угол между прямой l и плоскостью основания $ABCD$. Данная задача не вызывает трудностей, если следовать определениям и теоремам. Первым этапом следует построить линию пересечения плоскостей α и β – прямую l.

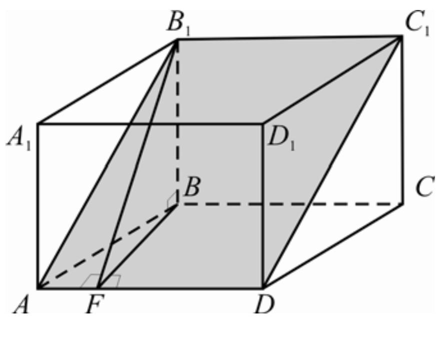

Рис. 19

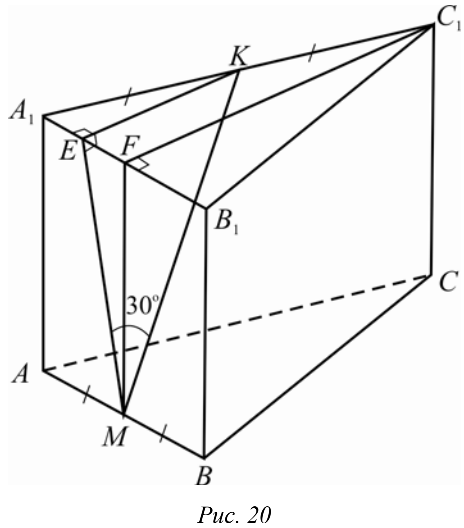

Рис. 20

На рис. 22 это EK. Далее надо спроектировать точки E и K параллельно высоте пирамиды SH, получить E_1K_1 – проекцию EK, затем параллельным переносом $EF \parallel E_1K_1$ получить искомый угол KEF в одноименном прямоугольном треугольнике. Выполнить расчеты несложно, учитывая, что E – точка пересечения медиан треугольника SBC, откуда $SE:EM = 2:1$, из подобия треугольников EE_1M и SHM легко устанавливается $EE_1 = SH/3$, а из подобия треугольников AKK_1 и ASH находим $KK_1 = \frac{1}{2}SH$, далее, вычисляя разность найденных отрезков, имеем $KF = \frac{1}{6}SH = \frac{1}{3}$. С учетом $EF = E_1K_1$ найдем E_1K_1 из треугольника K_1HE_1 с углом $135°$ и известными сторонами $K_1H = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $HE_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ по теореме косинусов, откуда $E_1K_1 = \frac{\sqrt{29}}{6\sqrt{2}}$. Искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{KF}{EF} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{29}}{2\sqrt{2}}$. Распространенной ошибкой в решении этой задачи является проектирование точек K и E либо одной точки K на прямую AM.

Более тонко возможность построить неправильную проекцию замаскирована в ряде задач из [Белоносов, 2000]. Рассмотрим одну из них. Прямоугольный параллелепипед с высотой, равной a, имеет в основании прямоугольник со сторонами a и $a\sqrt{3}$. Через одну из диагоналей основания проведена плоскость, составляющая угол в $30°$ со второй диагональю основания. Найти площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью. Первая трудность, которая возникает при решении данной задачи, это невозможность построить плоскость по данным задачи. Кроме того, положение плоскости и вид сечения заранее неизвестны и должны уточняться по ходу решения. Пусть Q – пересечение искомой плоскости с прямой BB_1, $BQ = x$, тогда если $x \le a$, то в сечении треугольник, иначе – трапеция (рис. 23). Следует отметить, что высота параллелепипеда для вычисления x не имеет значения. Проектируем прямую BD на плоскость ACQ. Точка пересечения диагоналей основания O лежит в искомой плоскости. Осталось спроектировать точку B. Для этого используем стандартную конструкцию построения перпендикуляра. Проводим $BF \perp AC$, $QF \perp AC$, $BP \perp QF$, P – проекция B, а PO – проекция BD на плоскость AQC. Таким образом, данный угол $BOP = 30°$. После того, как геометрическая конструкция исследована, расчеты провести несложно. По теореме Пифагора

$$AC = BD = 2a,\ BO = BD/2 = a,$$
$$BP = BO\cdot\sin 30° = a/2.$$

Далее, выражая удвоенную площадь прямоугольного треугольника ABC по двум различным формулам, находим $BF = a\sqrt{3}/2$. По теореме Пифагора из треугольника BFQ находим $FQ = \sqrt{x^2 + (3/4)a^2}$, выражая удвоенную площадь прямоугольного треугольника BFQ по двум различным формулам, получим

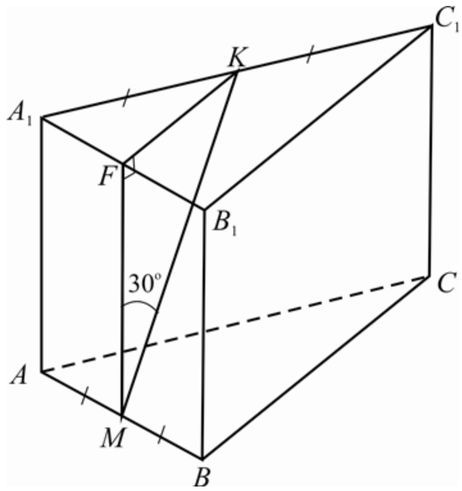

Рис. 21

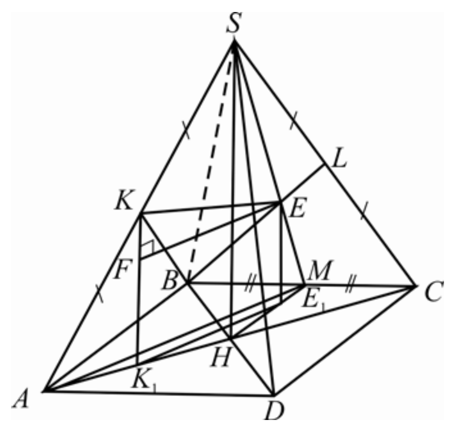

Рис. 22

$\frac{a}{2}\cdot\sqrt{x^2+\frac{3}{4}a^2}=x\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$, откуда находим $x=a\sqrt{3/8}<a$, т. е. в сечении треугольник, его площадь равна $(AC\cdot FQ)/2=3a^2\sqrt{2}/4$. Распространенную ошибку делают учащиеся при решении данной задачи, полагая, что проекцией диагонали BD является OQ, соответственно неверно применяют данный угол в 30°, неверно проводят остальные расчеты. Аналогичная трудность и классические ошибки встречаются в еще одной задаче из [Белоносов, 2000] с той лишь разницей, что пересечение прямой, содержащей боковое ребро, с искомой плоскостью выходит за рамки параллелепипеда. Для полноты картины приведем условие этой задачи и правильный ответ к ней. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=5$, $BC=4$. Высота параллелепипеда равна $10/3$. Через диагональ AC основания проведена плоскость под углом $45°$ к ребру BC. Найти отношение объемов частей, на которые эта плоскость делит параллелепипед (правильный ответ 7 : 17). Следует отметить, что данную задачу можно решить практически дословно, повторяя решение предыдущей в части нахождения положения плоскости (рис. 24). В дополнение следует заметить, что часто при проектировании в конкретной задаче бывает легче спроектировать отрезок, равный данному и параллельный ему, либо спроектировать известную часть отрезка, а потом восстановить длину проекции по ее части. Нерациональные действия учащихся по буквальному следованию условию задачи сами по себе ошибкой не являются, но создают зачастую непреодолимые технические трудности, а значит, заслуживают отдельного внимания. Так, в следующей задаче из [Там же] удобно заменить один отрезок другим. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра $AB=2$, $AD=4$, $AA_1=\sqrt{14}$. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка C_1D_1 на плоскость A_1MC, где M – середина ребра AD. При решении данной задачи (рис. 25) удобно заменить отрезок C_1D_1 равным ему и параллельным отрезком A_1B_1, что значительно упрощает проектирование, правильный ответ $\frac{3}{2}$.

А при решении аналогичной по постановке задачи из [Там же] удобнее поступить иначе. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра $AB=1$, $AD=2$, $AA_1=3$. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка A_1C на плоскость BDC_1. При решении этой задачи (рис. 26) удобно проектировать не весь отрезок A_1C, а его третью часть – отрезок EC. Полученную проекцию части следует умножить на 3, правильный ответ $\frac{\sqrt{362}}{7}$.

В геометрических задачах с параметрами учащиеся зачастую не исследуют существование фигуры в зависимости от значения параметра. Проиллюстрируем такую ошибку задачей из [Жафяров, 1972]. Через верши-

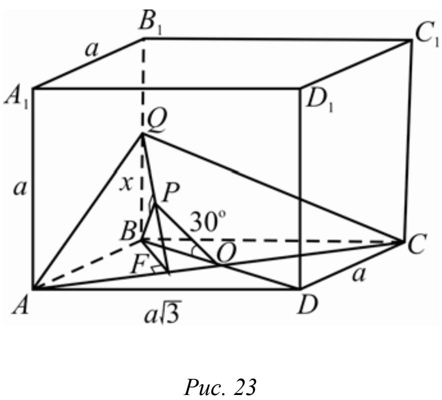

Рис. 23

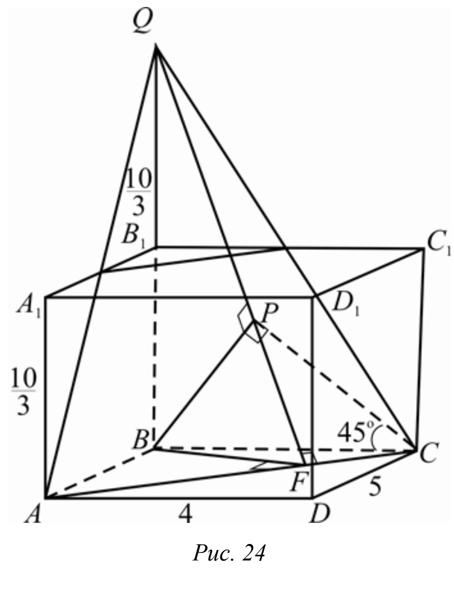

Рис. 24

ну основания правильной четырехугольной пирамиды перпендикулярно к противоположному ребру проведено сечение. Найти площадь сечения, если боковое ребро пирамиды, равное a, образует угол α с плоскостью основания. Правильное решение этой задачи основано на использовании признака перпендикулярности прямой и плоскости. Через вершину A в плоскости SAC проведем (рис. 27) $AM \perp SC$. Пусть F – пересечение AM и высоты пирамиды SH, через F проведем $NK \parallel BD$. Получим $ANMK$ – искомое сечение. Действительно ребро SC перпендикулярно каждой из двух пересекающихся прямых AM и NK, а значит, по признаку оно перпендикулярно плоскости $ANMK$. Используя данные задачи и свойства равнобедренного треугольника, подобие треугольников SNK и SBD, несложно провести вычисления основных элементов. Имеем

$$AM = a \cdot \sin(\pi - 2\alpha) = a \sin 2\alpha,$$

$$NK = BD \cdot \frac{SF}{SH},\ BD = 2a\cos\alpha,$$

$$SM = a \cdot \cos(\pi - 2\alpha) = -a\cos 2\alpha,$$

$$SF = \frac{SM}{\sin\alpha} = \frac{-a\cos 2\alpha}{\sin\alpha},\ SH = a\sin\alpha,$$

$$NK = 2a\cos\alpha \cdot \frac{-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha} = -2a\frac{\cos\alpha\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

По формуле площади четырехугольника с перпендикулярными диагоналями $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$ получим искомую площадь сечения

$$\frac{-\cos 2\alpha \sin 2\alpha \cos\alpha}{\sin^2\alpha}a^2, \text{ где } \frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}.$$

Последнее ограничение существенно, поскольку при $\alpha \le \pi/4$ перпендикуляр AM падает не на ребро SA, а на его продолжение за вершину S, и плоскость проходит вне пирамиды. Отсутствие границ для α, попытки учащихся «спрятать» знак минус или каким-то образом избавиться от него образуют классическую ошибку при решении этой задачи. Аналогичная задача разобрана в [Жафяров, 1972]. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная к противоположной боковой грани. Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, если сторона основания пирамиды равна a и двугранный угол при основании равен α. Правильный ответ $a^2 \sin^3\alpha$, где $\frac{\pi}{4} \le \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Представления учащихся, что грани пирамиды должны быть обязательно наклонены к плоскости основания под острым углом, а также знания о том, что два различных перпендикуляра к одной и той же прямой параллельны, ведут еще к одной классической ошибке в рассуждениях. Рассмотрим задачу. Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противоположные грани перпендикулярны плоскости основания? Находясь в плену стереотипов, многие учащиеся отвечают на данный вопрос отрицательно. Тем не менее такая пирамида $SABCD$ существует (рис. 28) и получается отсечением от треугольной пирамиды $SEDC$ с вертикальными гранями ее части, пирамиды $SEAB$.

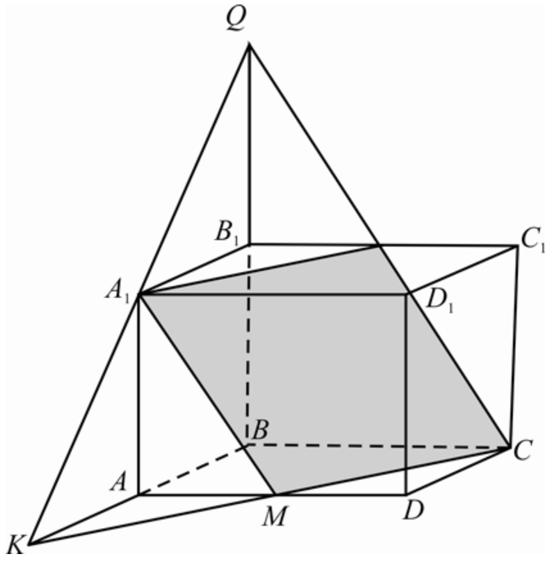

Рис. 25

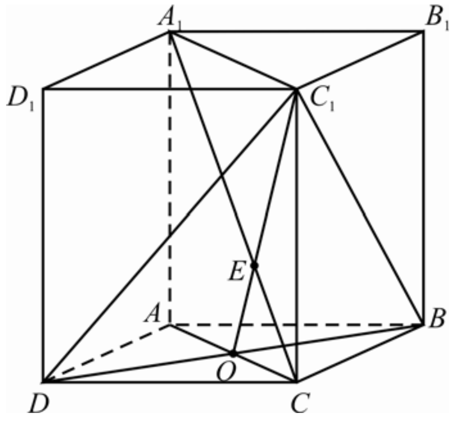

Рис. 26

Отдельный пласт ошибок возникает при изучении тел вращения и их взаимного расположения с многогранниками.

Рассмотрим следующую задачу из [Жафяров, 1972]. На диагональ единичного куба нанизано n $(n \geq 2)$ одинаковых попарно касающихся друг друга шаров так, что крайние касаются всех трех граней при вершине куба. Найти радиус шаров. Пусть x – искомый радиус. Правильное решение состоит в подсчете расстояния $x\sqrt{3}$ от вершины куба до центра ближайшего крайнего шара, а также расстояния между центрами крайних шаров $2(n-1)x$ и составлении уравнения $\sqrt{3} = 2x\sqrt{3} + 2(n-1)x$, откуда $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}+n-1\right)}$. Типичной ошибкой при решении данной задачи является неучет расстояния от вершины куба до центра ближайшего шара, уравнивание суммы диаметров шаров с диагональю куба.

Рассмотрим еще одну задачу. В конусе даны радиус основания R и высота H. Найти ребро вписанного в конус куба. При решении данной задачи учащиеся затрудняются представить взаимное расположение объектов. Следует детализировать понятие вписанного в конус куба, указать, что основание куба лежит на основании конуса, а оставшиеся вне основания вершины куба лежат на боковой поверхности конуса. Пусть искомое ребро куба равно a. Правильное решение получается построением осевого сечения конуса (рис. 29) и рассмотрением подобных треугольников KSL и ASO, откуда

$$\frac{H-a}{H} = \frac{a\left(\sqrt{2}/2\right)}{R},\ a = \frac{\sqrt{2}RH}{\sqrt{2}R+H}.$$

Распространенная ошибка при решении этой задачи, когда учащиеся берут в качестве отрезка KL половину ребра куба $a/2$ вместо половины диагонали $a\sqrt{2}/2$.

Комбинация двух тел вращения также часто вызывает трудности. Рассмотрим задачу из [Жафяров, 1972]. Найти отношение объема полушара, вписанного в конус (основание полушара лежит на основании конуса), к объему конуса, если угол между образующей и осью конуса равен α. Для решения рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 30). Пусть радиус искомого шара равен r, тогда из прямоугольных треугольников имеем $SO = \dfrac{r}{\sin\alpha}$, $OB = \dfrac{r}{\cos\alpha}$. Объем полушара $V_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3}\pi r^3$, объем конуса

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\cdot OB^2\cdot SO = \frac{1}{3}\pi\frac{r^3}{\sin\alpha\cos^2\alpha},$$

искомое отношение $\dfrac{V_1}{V_2} = \sin 2\alpha\cos\alpha$. Многие учащиеся при решении данной задачи и неаккуратном построении чертежа ошибочно принимают радиус полушара равным радиусу основания конуса.

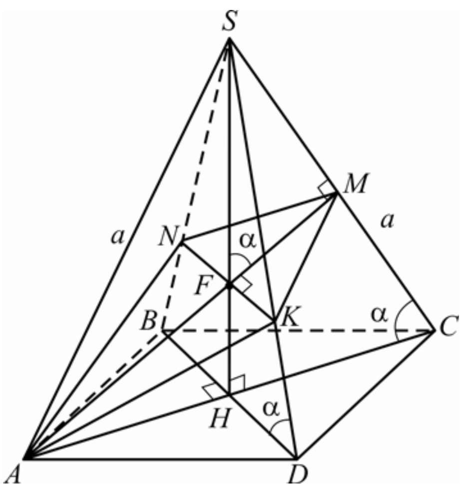

Рис. 27

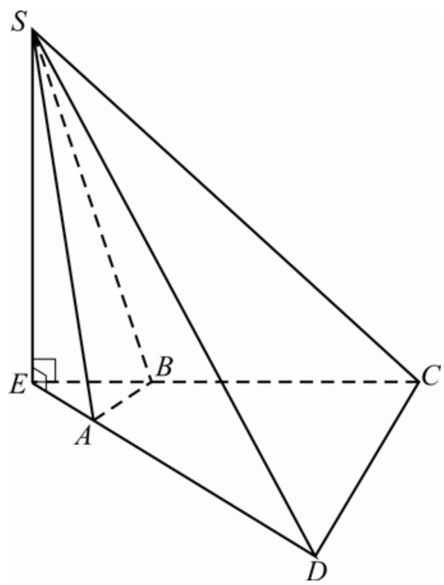

Рис. 28

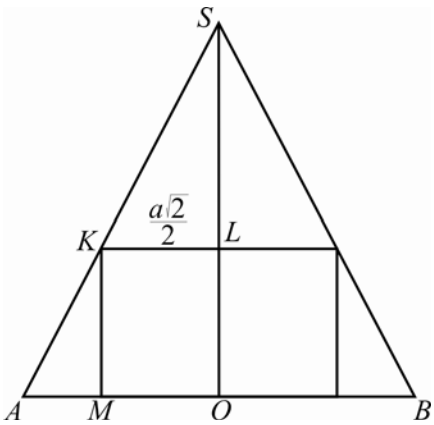

Рис. 29

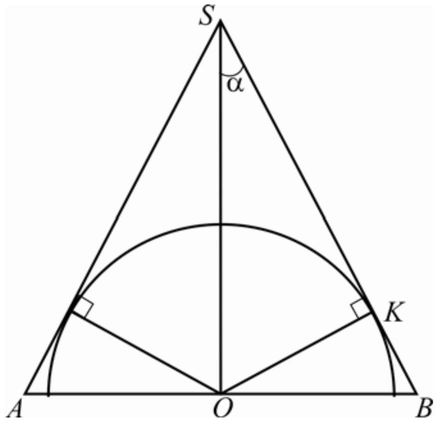

Рис. 30

Для полноты картины рассмотрим еще одну задачу из [Демидович, 1990]. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием наибольшего объема. Для решения рассмотрим осевое сечение полушара, содержащее диагональ основания параллелепипеда (рис. 31). Пусть центр полушара O, сторона основания параллелепипеда равна a, его высота h, одна из вершин M. Из прямоугольного треугольника OKM имеем $R^2 = \frac{a^2}{2} + h^2$, откуда

$$a^2 = 2\left(R^2 - h^2\right),\ V = a^2 h = 2\left(R^2 - h^2\right)h .$$

Функцию $V(h) = 2R^2h - 2h^3$ надо исследовать на максимум. Вычислив производную по h функции $V(h)$, получим $V'(h) = 2R^2 - 6h^2$. Приравняв ее к нулю, находим критическую точку $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$, исследуя знаки производной в окрестности которой, находим, что эта точка – точка максимума, $a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Таким образом, высота параллелепипеда должна быть в 2 раза меньше ребра основания. Основные ошибки при решении данной задачи это приравнивание ребра основания либо диагонали основания параллелепипеда к диаметру полушара, либо при рассмотрении осевого сечения использование стороны квадрата вместо его диагонали в качестве хорды полукруга.

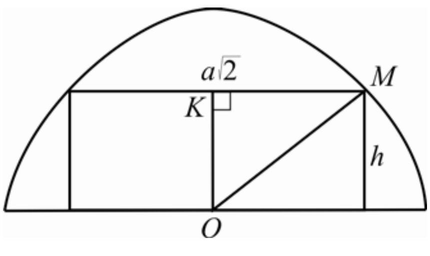

Рис. 31

Вниманию продвинутых учащихся можно предложить следующую задачу из [Жафяров, 1972]. Два прямых круговых конуса, осевое сечение каждого из которых образует равносторонний треугольник со стороной a, лежат на горизонтальной плоскости, касаясь друг друга, имея общую вершину. На какой высоте над плоскостью находится точка касания оснований этих конусов? Для решения рассмотрим данные конусы (рис. 32), где $SO_1 = a\sqrt{3}/2$ и $SO_2 = a\sqrt{3}/2$ – их высоты, точка касания оснований конусов A, искомое расстояние от нее до плоскости равно длине отрезка AB. Опустим перпендикуляры O_1K_1 и O_2K_2 из центров оснований конусов на данную плоскость, получим прямоугольник $O_1K_1K_2O_2$, плоскость которого перпендикулярна данной плоскости. Пусть E – пересечение общей образующей конусов с линией центров оснований O_1O_2. Проведем $EF \parallel AB$. В равнобедренном треугольнике SO_1O_2 угол S равен 60°, поэтому треугольник SO_1O_2 – равносторонний со стороной, равной $a\sqrt{3}/2$. Высота

$$SE = \left(a\sqrt{3}/2\right)\cos 30° = (3/4)a .$$

Из прямоугольного треугольника SO_1K_1 с острым углом O_1SK_1, равным $30°$, найдем $O_1K_1 = \left(a\sqrt{3}/2\right)\sin 30° = \left(\sqrt{3}/4\right)a$, с учетом $O_1K_1 = EF$ находим $EF = \left(\sqrt{3}/4\right)a$. Далее,

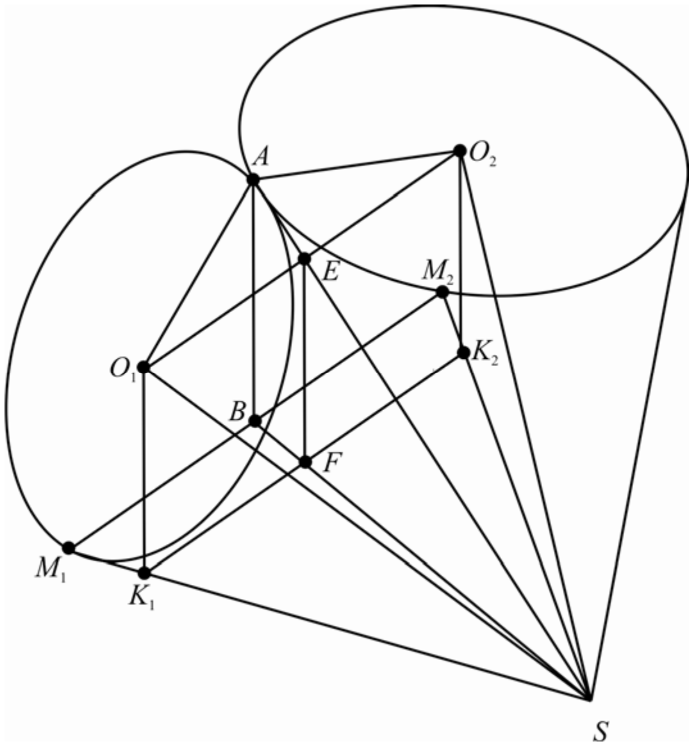

Рис. 32

из подобия прямоугольных треугольников *SAB* и *SEF* находим искомый отрезок

$$AB = \frac{SA}{SE}\cdot EF = \frac{a}{(3/4)a}\cdot a\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}a .$$

Классической ошибкой при решении данной задачи является предположение, что точка касания оснований конусов *A* лежит на линии центров оснований конусов O_1O_2, т. е. на нашем рисунке совпадает с точкой *E*, а искомое расстояние равно *EF* вместо *AB*.

Много ошибок учащихся связано с применением метода координат. Отметим наиболее характерные из них:

– неверный выбор осей координат, например, вдоль сторон равностороннего треугольника и высоты правильной треугольной призмы, без учета перпендикулярности осей;

– неверное определение координат точек, особенно при заданных отношениях отрезков;

– отсутствие знака модуля в формуле расстояния от точки до плоскости, из-за чего нередко вычисленное расстояние получается отрицательным;

– путаница формул для вычисления косинуса угла между плоскостями и угла между векторами, если в первой формуле требуется знак модуля, а во второй – нет, то учащиеся либо постоянно ставят знак модуля, либо не используют его совсем;

– неучет общематематических свойств и требований при решении геометрических задач.

Последний тип ошибок проиллюстрируем на примере из [Белоносов, 2000]. Угол между векторами $\vec{a} = \left(-\sqrt{2};\sqrt{6};a\right)$ и $\vec{b} = \left(1;0;\sqrt{2}\right)$ равен $\pi/4$. Найти α (базис прямоугольный). Правильное решение состоит в выражении скалярного произведения векторов по двум различным формулам – через координаты и длины. Откуда можно получить уравнение относительно α:

$$-\sqrt{2}\cdot 1 + \sqrt{6}\cdot 0 + \alpha\cdot\sqrt{2} =$$
$$= \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 + \alpha^2}\times$$
$$\times\sqrt{1^2 + 0^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}\cdot\cos\frac{\pi}{4},$$

или после преобразований $\sqrt{24+3\alpha^2} = 2(\alpha-1)$. При $2(\alpha-1)\geq 0$ возводим обе части в квадрат, получаем квадратное уравнение $\alpha^2 - 8\alpha - 20 = 0$, корни которого -2 и 10. С учетом неотрицательности правой части уравнения остается $\alpha = 10$. Многие учащиеся, выдавая оба полученных корня в ответ, не учитывают, что стандартное иррациональное уравнение решается возведением в квадрат при неотрицательной правой части, а условие неотрицательности правой части уравнения является основанием для отбора полученных корней.

Еще один большой пласт ошибок учащихся состоит в невнимательном прочтении условия, ведущего к рассмотрению какого-то одного частного случая вместо нескольких, а также неверной интерпретации полученных нескольких решений уравнения.

Рассмотрим следующую задачу из [Белоненко, 1997]. В основании пирамиды лежит выпуклый четырехугольник, две стороны которого равны 7, а две другие равны 3. Высота пирамиды равна 2, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $\pi/4$. Найти объем пирамиды. Многие школьники делают, как их научили. Используя высказывание «если все боковые грани пирамиды наклонены под одним углом к плоскости основания, то ее высота проектируется в центр вписанной окружности», получают только один случай (рис. 33). Так как линейный угол двугранного угла согласно условию составляет $\pi/4$, то радиус вписанной в основание окружности равен высоте пирамиды, т. е. 2. Используя формулу площади многоугольника через периметр и радиус вписанной окружности, в данном случае легко найти площадь основания

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(AB+BC+CD+DA\right)\cdot r=$$
$$=\frac{1}{2}\left(3+7+7+3\right)\cdot 2=20.$$

Затем по формуле объема пирамиды находим $V=\frac{1}{3}\cdot 20\cdot 2=\frac{40}{3}$. Это рассуждение верно, но такое решение не является полным. Дело в том, что высота пирамиды в данном случае может проектироваться вне пирамиды (рис. 34) на продолжение диагонали CA. В таком случае площадь основания вычисляется иначе. Она равна удвоенной разности площадей треугольников HBC и HAB, высотами которых является радиус 2 окружности, касающейся продолжений сторон основания. Находим площадь основания

$$S_{ABCD}=2\left(\frac{1}{2}CB\cdot r-\frac{1}{2}AB\cdot r\right)=7\cdot 2-3\cdot 2=8.$$

Затем по формуле объема пирамиды находим еще один ответ $V=\frac{1}{3}\cdot 8\cdot 2=\frac{16}{3}$.

Распространенную ошибку, когда не учитываются все решения тригонометрического уравнения, можно проиллюстрировать на планиметрической задаче из [Белоносов, 2000]. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC, $AC=\sqrt{15}$. На продолжении стороны AB выбрана точка M так, что $BM=BC$ (точка B лежит между M и A). Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4. Найти радиус окружности, описанной около треугольника AMC. Для решения задачи введем обозначения (рис. 35) $\beta=\angle ABC$, $\varphi=\angle BMC$. По теореме синусов в треугольнике ABC имеем

$$\frac{AC}{\sin\beta}=2R,\ \frac{\sqrt{15}}{\sin\beta}=2\cdot 4,\ \sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Используя теорему, по которой внешний угол треугольника равен сумме двух оставшихся, и

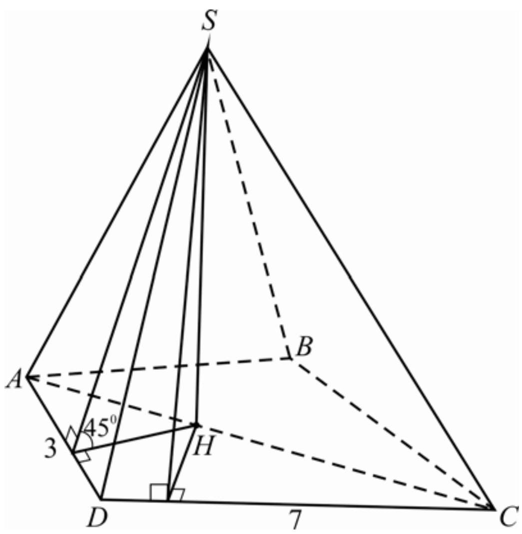

Рис. 33

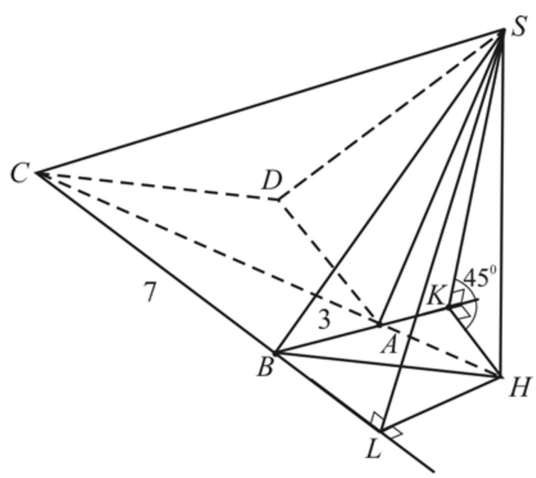

Рис. 34

равнобедренность треугольника MBC, находим $\varphi = \beta/2$. А по теореме синусов в треугольнике AMC имеем $\frac{AC}{\sin\varphi} = 2R_1$, $R_1 = \frac{\sqrt{15}}{2\sin(\beta/2)}$. По формуле синуса половинного угла $\sin\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$ приходим к вычислению по основному тригонометрическому тождеству $\cos\beta = \pm\sqrt{1-\sin^2\beta} = \pm 7/8$. Оба значения $\cos\beta$ удовлетворяют условию задачи и соответствуют двум правильным ответам $R_1 = 2\sqrt{15}$ или $R_1 = 2$. При решении этой задачи обычно не рассматривают отрицательный $\cos\beta$ и таким образом теряют одно из решений.

По существу разные конструкции могут подпадать под формулировку одной и той же задачи. Рассмотрим пример из [Созоненко, 1998]. Расстояние между центрами двух окружностей равно $10r$. Одна из окружностей имеет радиус $5r$, вторая $6r$. Прямая l пересекает меньшую окружность в точках A и B и касается большей окружности в точке C. Найти длину хорды AB, если $AB = 2BC$. Правильное решение состоит из двух случаев. Пусть O_1 – центр меньшей окружности, O_2 – центр большей окружности. Первый случай (рис. 36), точка касания C вне искомой хорды AB. Проведем $O_1M \perp AB$ и $O_1K \perp O_2C$. Пусть искомая хорда AB равна $2x$, тогда, с учетом условия задачи, $O_1K = 2x$, $O_2K = 6r - O_1M$. Из $\triangle AO_1M$ по теореме Пифагора $O_1M = \sqrt{25r^2 - x^2} = CK$. Из $\triangle O_1KO_2$ по теореме Пифагора

$$O_2K = \sqrt{100r^2 - 4x^2} = 2\sqrt{25r^2 - x^2},$$
$$2\sqrt{25r^2 - x^2} + \sqrt{25r^2 - x^2} = 6r,$$
$$3\sqrt{25r^2 - x^2} = 6r,\ 25r^2 - x^2 = 4r^2,\ x^2 = 21r^2,$$
$$x = r\sqrt{21},\ \text{искомая хорда } AB = 2r\sqrt{21}.$$

Второй случай (рис. 37), точка касания C лежит на искомой хорде AB. Имеем $O_1C = O_1O_2 - O_2C = 4r$. Из $\triangle O_1AC$ по теореме Пифагора

$$AC^2 = O_1A^2 - O_1C^2 = 25r^2 - 16r^2 = 9r^2,$$
$$AC = 3r,\ \ AB = 6r.$$

Правильный ответ $2\sqrt{21}r$ или $6r$.

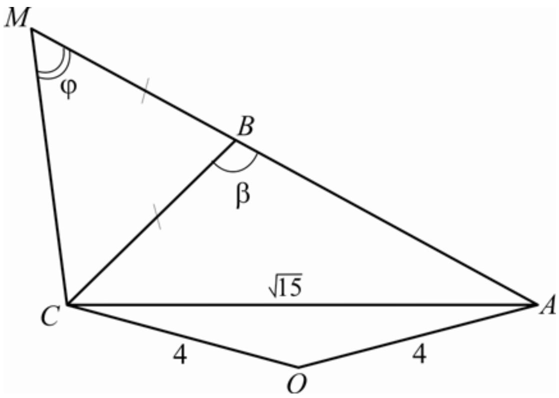

Рис. 35

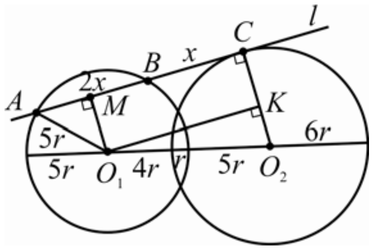

Рис. 36

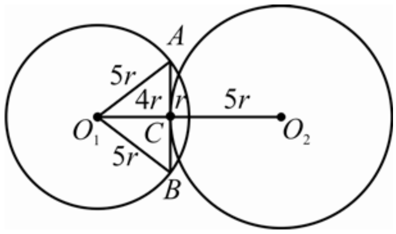

Рис. 37

Разные геометрические конструкции можно проиллюстрировать еще одной задачей из [Там же]. Расстояние между центрами двух окружностей одного и того же радиуса r равно $3r$. Продолжение хорды AB одной из окружностей касается другой окружности в точке C, причем $AB = BC$. Найти длину хорды AB. Рассмотрим путь решения данной задачи. Пусть искомая хорда $AB = 2x$ окружности с центром O_1 касается окружности с центром O_2 в точке C. Первый случай (рис. 38). Отрезок BC не пересекает линию центров O_1O_2. Проведем $O_1K \perp AB$ и $O_1M \parallel AC$.

Имеем $O_2M + MC = r$, $MC = O_1K$. Отрезок $O_1M = KC = 3x$. Из треугольников AO_1K и O_1O_2M найдем O_1K и O_2M. Получим $\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{9r^2 - 9x^2} = r$, $4\sqrt{r^2 - x^2} = r$, $16r^2 - 16x^2 = r^2$, $16x^2 = 15r^2$, $x = \frac{r\sqrt{15}}{4}$, искомая хорда $AB = 2x = \frac{r\sqrt{15}}{2}$. Второй случай (рис. 39). Отрезок BC пересекает линию центров O_1O_2. Проведем $O_1K \perp AB$ и $O_2F \parallel AC$. Имеем $O_1K + KF = O_1F$, $KF = O_2C = r$, $O_2F = KC = 3x$. Из треугольников O_1KB и O_1FO_2 получим

$$\sqrt{r^2 - x^2} + r = \sqrt{9r^2 - 9x^2},$$
$$\sqrt{r^2 - x^2} + r = 3\sqrt{r^2 - x^2},\ 2\sqrt{r^2 - x^2} = r,$$
$$4r^2 - 4x^2 = r^2,\ 3r^2 = 4x^2,\ x = \frac{r\sqrt{3}}{2},$$

искомая хорда $AB = r\sqrt{3}$. Правильный ответ $\frac{r\sqrt{15}}{2}$ или $r\sqrt{3}$.

После разбора нескольких подобных задач у учащихся может сложиться устойчивое впечатление, что случаев бывает по два. Однако встречаются задачи, в которых надо рассматривать по 3 или даже 4 случая. Рассмотрим задачу из [Белоносов, 2000] и проанализируем её авторское решение. Задан квадрат $ABCD$ со стороной 2 и построены две окружности: первая на стороне BC как на диаметре, вторая – с центром в вершине D и радиусом 2. Найти радиус третьей окружности, которая касается стороны AB и двух данных окружностей.

Для решения рассмотрим несколько случаев. Первый случай: искомая окружность касается данных внешним образом (рис. 40). Пусть O – центр искомой окружности, K, L, M – точки ее касания с данными окружностями и стороной AB, G – середина отрезка BC. Пусть x – искомый радиус. Выполним дополнительные построения $OF \parallel AB$ и $OE \parallel AB$, откуда верно $AE = x = BF$. В прямоугольном треугольнике DOE имеем $DO = 2 + x$ (сумма радиусов), $DE = 2 - x$, по теореме Пифагора

$$EO = \sqrt{(2+x)^2 - (2-x)^2} = 2\sqrt{2x}.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника OGF находим $OG = 1 + x$, $GF = 1 - x$, $OF = \sqrt{(1+x)^2 - (1-x)^2} = 2\sqrt{x}$. Учитывая, что $EO + OF = 2$, получаем уравнение $2\sqrt{2x} + 2\sqrt{x} = 2$ относительно x, решая которое получим $x = 3 - 2\sqrt{2}$. Для полноты решения надо еще рассмотреть случаи внутреннего касания (рис. 41), которые дадут еще два ответа 1 и $1/2$. Таким образом, данная задача неожиданно для многих учащихся имеет три различных решения.

Рассмотрим теперь задачу из [Белоненко, 1997] с четырьмя случаями, неоднократно дававшуюся на потоковых контрольных и экзаменах по математике в СУНЦ. В треугольнике ABC длина медианы, проведенной из C, равна $3\sqrt{21}/4$. Окружности радиусов 5 и 1 с центрами в A и B касаются, а вершина C лежит на прямой, касающейся обеих окружностей. Найти площадь треугольника ABC.

Для правильного решения надо рассмотреть несколько случаев. Первый и второй случаи (рис. 42) окружности касаются внешним образом, общая касательная не пересекает отрезок линии центров AB. Для вычисления площади надо найти высоту треугольника, опущенную из вершины C. Проведем радиусы AK и BN в точки касания. Продолжим общую касательную KN до пересечения с линией центров AB в точке F. Выполним дополнительное построение $BD \parallel NK$, обозначим $\angle AFK = \angle ABD = \varphi$. Пусть M – середина AB, проведем $ME \perp NK$. В прямоугольной трапеции $AKNB$ с основаниями 5 и 1 средняя линия $ME = 3$, что превышает длину данной медианы. Поэтому возможны два положения вершин C_1 и C_2 искомого треугольника. Пусть h_1 и h_2 – высоты искомого треугольника (на рисунке не изображены), проведенные соответственно из вершин C_1 и C_2 к основанию AB. Теперь

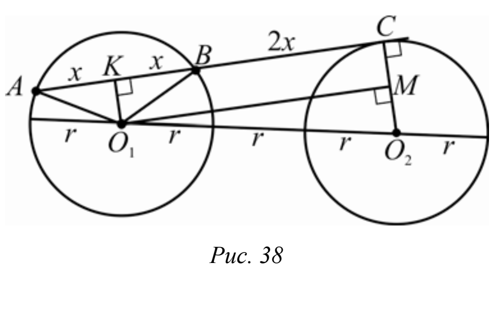

Рис. 38

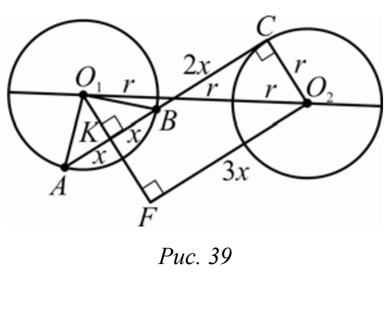

Рис. 39

можно провести необходимые вычисления. Из прямоугольного треугольника ADB имеем $BD = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5} = NK$, $\sin\varphi = 2/3$, $\cos\varphi = \sqrt{5}/3$, $\operatorname{tg}\varphi = 2/\sqrt{5}$, $EN = EK = \sqrt{5}$. Из прямоугольного треугольника BNF имеем $NF = 1 \cdot \operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{5}/2$. По теореме Пифагора $EC_1 = EC_2 = \sqrt{\frac{9 \cdot 21}{16} - 9} = \frac{3}{4}\sqrt{5}$. Далее имеем:

$$C_1N = EN - EC_1 = \sqrt{5}/4,$$

$$C_1F = EC_1 + NF = \frac{3\sqrt{5}}{4},$$

$h_1 = C_1F \cdot \sin\varphi = \sqrt{5}/2$, $AB = 5 + 1 = 6$, искомая площадь $S_1 = 3\sqrt{5}/2$. Действуя аналогично, получим $C_2N = C_2E + EN = 7\sqrt{5}/4$,

$$C_2F = C_2N + EF = 9\sqrt{5}/4,,$$

$h_2 = C_2F \cdot \sin\varphi = 3\sqrt{5}/2$, искомая площадь $S_2 = 9\sqrt{5}/2$.

Третий случай (рис. 43): окружности касаются внешним образом, общая касательная пересекает отрезок линии центров AB. Пусть C_3M – данная медиана, $h_3 = C_3L$ – высота искомого треугольника, проведенная из вершины C_3 к основанию AB. Из данных задачи имеем $ML = 3 - 1 = 2$, по теореме Пифагора

$$h_3 = \sqrt{\frac{9 \cdot 21}{16} - 4} = \frac{5\sqrt{5}}{4}, \; AB = 5 + 1 = 6,$$

искомая площадь $S_3 = 15\sqrt{5}/4$. Четвертый случай (рис. 44): окружности касаются внутренним образом. Пусть C_4M – данная медиана, $h_4 = C_4L$ – высота искомого треугольника, проведенная из вершины C_4 к основанию AB. Из данных задачи имеем $ML = \frac{5-1}{2} + 1 = 3$, по теореме Пифагора

$$h_4 = \sqrt{\frac{9 \cdot 21}{16} - 9} = \frac{3\sqrt{5}}{4}, \; AB = 5 - 1 = 4,$$

искомая площадь $S_4 = 3\sqrt{5}/2$.

Практика работы с одаренными школьниками показывает, что на финальной стадии обучения решение подобных задач с широкими формулировками очень полезно для воспитания будущих исследователей. Все рассмотренные в статье задачи из открытых источников предлагались в разные годы большому количеству учащихся, каждую приведенную в статье задачу только по заданию автора прорешало около 1 000 человек в условиях реальных контрольных и экзаменационных мероприятий. Ошибались при решении не все и не во всех задачах. За время работы автора в СУНЦ часть задач была отсеяна, часть модифицирована. Для поста-

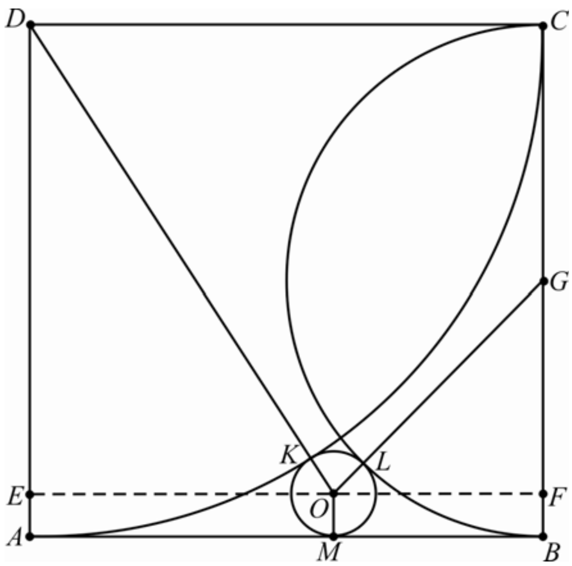

Рис. 40

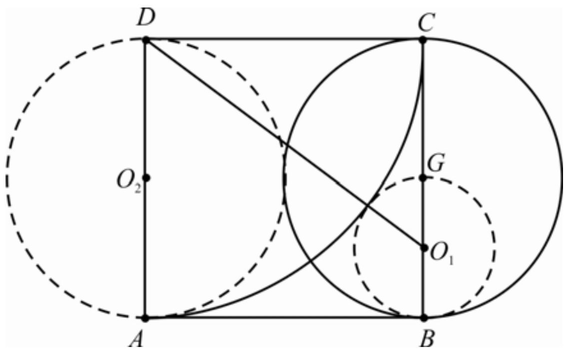

Рис. 41

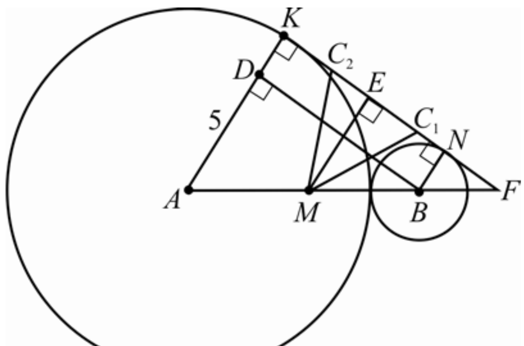

Рис. 42

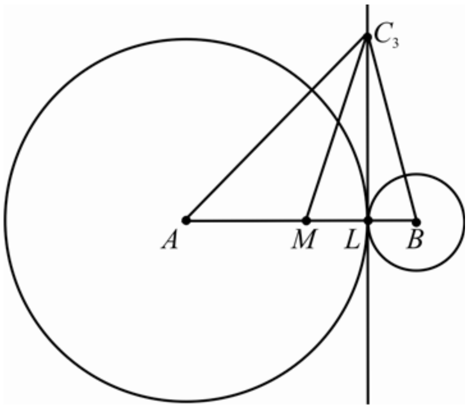

Рис. 43

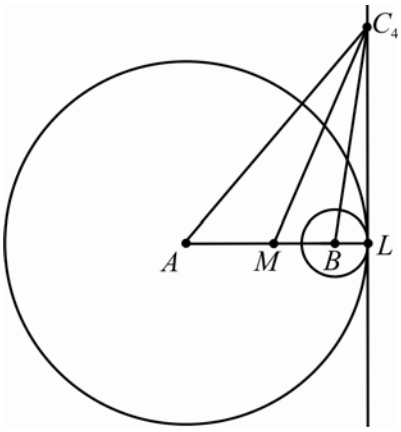

Рис. 44

новки правильного понимания предмета очень важно предлагать именно такие задачи, на которых можно выявить понимание учащимися пройденного материала. Приведенный список ошибок, безусловно, не является исчерпывающим, но, по мнению автора, достаточно полно отражает массовые заблуждения и характерные ошибки школьников при изучении геометрии, связанные именно с недопониманием геометрических конструкций. Ежедневное преодоление трудностей, систематические тренировки, благоприятная среда в условиях СУНЦ, квалифицированные педагоги позволяют одаренным школьникам в короткие сроки восполнять свои пробелы, получить новое качественное понимание и восприятие математики.

Список литературы

Белоненко Т. В., Васильев А. В., Васильева Н. И., Крымская Л. Д. Сборник конкурсных задач по математике. СПб.: Специальная литература, 1997. 560 с.

Белоносов С. В., *Фокин М. В.* Задачи вступительных экзаменов по математике. 5-е изд., испр. и доп. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2000. 480 с.

Бунеева Н. А., Каргаполов А. М. Варианты и решения выпускных экзаменов по математике в СУНЦ НГУ (1992–2005). Новосибирск: Изд-во ИДМИ, 2005. 64 с.

Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 10-е изд., испр. М.: Наука, 1990. 624 с.

Жафяров А. Ж., Созоненко Р. С. Сборник подготовительных задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. Г. П. Акилова. Новосибирск: Наука, 1972. 284 с.

Ляпунов И. Б. Использование классических ошибок школьников для углубленного обучения математике в условиях СУНЦ НГУ // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2011а. Т. 12, вып. 1. С. 106–108.

Ляпунов И. Б. Классические ошибки учащихся СУНЦ НГУ при углубленном обучении тригонометрии // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2011. Т. 12, вып. 2. С. 36–43.

Ляпунов И. Б. Классические ошибки учащихся СУНЦ НГУ при неравносильных переходах в уравнениях и неравенствах // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2012. Т. 13, вып. 1. С. 46–55.

Созоненко Р. С. Теоремы и задачи по планиметрии с перекрестными ссылками. 2-е изд., испр. и доп. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1998. 208 с.

Материал поступил в редколлегию 09.04.2012

I. B. Lyapunov

COMMON STUDENTS' ERRORS AT SESC NSU IN GEOMETRY PROBLEMS SOLUTION

The problems of profound teaching mathematics to senior school students at Specialized Educational Scientific Centre of the Novosibirsk State University are considered. Some common errors occurred in stereometry and planemetry problems solution are discussed. Several basic geometry structures to analize common errors and help teachers and students are given. Advantages and disadvantages of different approaches to solve non-standard problems are noted. Detailed instructions to obtain optimal solutions are suggested. Special attention is paid to problems with several variants of solutions.

Keywords: mathematics, teaching mathematics to school students, profound teaching mathematics, SESC NSU, boarding school, error, planemetry, stereometry, perpendicular to plane, projection, method of coordinate, section.