УДК 519, 213, 512.64

Л. Я. Савельев

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: savelev@math.nsc.ru

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ (ПРОИЗВОДНЫЕ И ПЕРВООБРАЗНЫЕ)

Описывается применение теории пределов в классическом дифференциальном и интегральном исчислении. Она продолжает серию статей автора под общим названием «Элементы теории пределов» и непосредственно примыкает к последней статье «Элементы теории пределов (направленности)». Серия рассчитана на начинающих изучать математический анализ. Нестандартное изложение материала и большое количество подробно разобранных примеров могут представлять интерес для преподавателей. В первой части статьи определяются производная и дифференциал, кратко описываются их основные свойства и правила вычисления. Главным объектом служат аналитические функции, подробно рассматривавшиеся раньше. Для них доказывается формула Тейлора. Во второй части определяются первообразные и интеграл Ньютона, кратко описываются их основные свойства и правила вычисления. Главным объектом снова служат аналитические функции. Для них доказывается теорема о почленном интегрировании. В заключение в качестве примера подробно описываются классический интеграл Пуассона и методы его вычисления.

Ключевые слова: предел, непрерывность, производная, дифференциал, первообразная, интеграл, аналитическая функция.

Основным объектом теории по-прежнему служат элементарные аналитические функции. Используются сведения о степенных рядах и их суммах, содержащиеся в предыдущих статьях. Введение и использование производных позволяет проводить более глубокое исследование свойств рассматриваемых функций. Статья позволяет получить определенное представление о классическом дифференциальном и интегральном исчислении. Кроме элементарных, в статье рассматриваются и достаточно сложные понятия, но только как примеры применения теории пределов, без углубления в связанные с этими понятиями сложные теории. В качестве основных рассматриваются комплексные переменные. Простые модификации для вещественных переменных достаточно очевидны. Специальные свойства вещественных переменных описываются отдельно.

1. Производные

Речь не идет об изложении дифференциального исчисления, тем более функций комплексной переменной. Производные служат прекрасным примером применения теории пределов. Определния, как правило, даются общие, но основным объектом служат аналитические функции.

1.1. ***Производные полиномов***. Дифференцирование полинома сводится к простым алгебраическим операциям с его коэффициентами.

1.1.1. ***Общие определения***. По аналогии с определением скорости движения локальное изменение числовой функции числовой переменной характеризуется пределом отношения приращения функции в данной точке к стремящемуся к нулю приращению аргумента.

Рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C}$, точку $z_0 \in \mathbb{C}$, круг

$$B[z_0, r_0] = \{z : |z - z_0| < r_0\} \subseteq \mathbb{C}$$

с центром z_0 и радиусом $r_0 > 0$, *окрестность* $A \supseteq B[z_0, r_0]$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и функцию $f : A \to \mathbb{C}$. Так как множество A содержит круг $B[z_0, r_0]$, то для A определено направление $z \to z_0$, $z \neq z_0$.

Определение. Если существует предел

$$f'[z_0] = \lim_{z \to z_0,\, z \neq z_0} \frac{f[z] - f[z_0]}{z - z_0},$$

то говорят, что функция f дифференцируема в точке z_0, *а число* $f'[z_0]$ *называют производной функции f в точке* z_0.

Для краткости $z \neq z_0$ часто не пишут: при $z = z_0$ рассматриваемое отношение приращений не определено. Предполагается также, что $z \in A$ и значение $f[z]$ определено. Вместо *дифференцируемая* функция говорят также *гладкая*. Это объясняется характером графика дифференцируемой функции.

Вместо комплексной плоскости $\mathbb{C}$ можно взять вещественную прямую $\mathbb{R}$, точку $x_0 \in \mathbb{R}$, ее *окрестность*

$$J[x_0, r_0] =]x_0 - r, x_0 + r_0[\subseteq \mathbb{R},\ r_0 > 0,$$

множество $A \supseteq J[x_0, r_0]$ и функцию $f : A \to \mathbb{C}$. Так как множество A содержит интервал $]x_0 - r_0, x_0 + r_0[$ с центром x_0 и радиусом $r_0 > 0$, то для A определено направление $x \to x_0$, $x \neq x_0$. Сформулированное определение производной при $z_0 = x_0$ применимо и к такой числовой функции вещественной переменной.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого множества, то говорят, что она дифференцируема на этом множестве. Дифференцируемую в каждой точке области определения функцию называют *всюду дифференцируемой* или просто *дифференцируемой*.

Из определения следует, что *постоянная функция дифференцируема и ее производная тождественно равна нулю*.

Замечание. Возникает естественный вопрос: существуют ли функции, имеющие тождественно равные нулю производные и не являющиеся постоянными? Для ответа на этот вопрос нужно знать не только определение производной.

Часто удобно переменную $z \in B[z_0, r_0]$ заменять на переменную $v = z - z_0 \in B[0, r_0]$, направление $z \to z_0$, $z \neq z_0$ в круге $B[z_0, r_0]$ заменять направлением $v \to 0$, $v \neq 0$ в круге $B[0, r_0]$. При такой замене определяющее производную равенство превращается в

$$f'[z_0] = \lim_{v \to 0,\, v \neq 0} \frac{f'[z_0 + v] - f'[z_0]}{v}.$$

Для краткости $v \neq 0$ часто не пишут: при $v = 0$ рассматриваемое отношение приращений не определено. Предполагается также, что $|v| < r_0$, $z = z_0 + v \in A$ и значение $f[z] = f[z_0 + v]$ функции f определено.

Если производная f' функции f определена в некоторой окрестности $A_1 \supseteq B[z_0, r_1]$, $r_1 > 0$, точки c и существует предел

$$f''[z_0] = \lim_{v \to 0,\, v \neq 0} \frac{f'[z_0 + v] - f'[z_0]}{v},$$

то говорят, что функция *f дважды дифференцируема* в точке z_0, а число $f''[z_0]$ называют *второй производной* функции f в точке z_0. Вместо f' пишут также $f^{(1)}$, а вместо f'' пишут $f^{(2)}$.

При аналогичных условиях равенство $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)^{(1)}$ определяет по *n-й производной* следующую ($n+1$)-*ю*. Показатель $n \geq 1$ называют *порядком* производной $f^{(n)}$. Функции, имеющие производные всех порядков на всей области определения, называются *бесконечно дифференцируемыми*. В частности, постоянные функции бесконечно дифференцируемы и все их производные тождественно равны нулю.

Определяющее производную равенство

$$f'[z_0] = \lim_{v \to 0,\, v \neq 0} \frac{f[z_0 + v] - f[z_0]}{v}$$

эквивалентно равенствам

$$\frac{f[z_0 + v] - f[z_0]}{v} = f'[z_0] + \alpha[v],$$

$$f[z_0 + v] = f[z_0] + f'[z_0]v + \alpha[v]v,$$

где α – некоторая бесконечно малая: $\alpha[v] \to 0$, $v \to 0$. Заметим, что второе равенство верно и при $v = 0$.

Для упрощения формул удобно использовать обозначение $o[1]$ для произвольной бесконечно малой и $o\left[v^n\right]$ для бесконечно малой более высокого порядка, чем v^n:

$$o\left[v^n\right] = o[1]v^n,\ o\left[v^n\right] \big/ v^n = o[1] \to 0.$$

Здесь $v \to 0$ и $n \geq 0$, $v^0 = 1$. Выписанные равенства приобретают классический вид:

$$\frac{f[z_0 + v] - f[z_0]}{v} = f'[z_0] + o[1],$$

$$f[z_0 + v] = f[z_0] + f'[z_0]v + o[v].$$

Замена $z = z_0 + v$, $v = z - z_0$ и направления $v \to 0$ на $z \to z_0$ превращает второе равенство в

$$f[z]=f[z_0]+f'[z_0](z-z_0)+o[z-z_0],$$

где $o[z-z_0]/(z-z_0)\to 0$, $z\to z_0$. Оно эквивалентно равенству

$$f[z]-f[z_0]\approx f'[z_0](z-z_0),\ z\to z_0.$$

Такое линейное приближение приращения функции часто бывает удобно.

1.1.2. Производные степенной функции. Рассмотрим число $n\in\mathbb{N}$ и степенную функцию $f[z]=z^n$, $z\in\mathbb{C}$. Ее производная служит основой для вычисления производных аналитических функций.

Лемма о производной степенной функции. *Для производной $f'[z]$ функции $f[z]=z^n$ в точке $z\in\mathbb{C}$ верно равенство $f'[z]=nz^{n-1}$.*

□ Применяя биномиальную формулу, находим

$$(z+v)^n-z^n=nz^{n-1}v+o[v],\ o[v]/v\to 0$$

при $v\to 0$. Поэтому

$$f'[z]=\lim_{v\to 0}\frac{nz^{n-1}v+o[v]}{v}=$$

$$=\lim_{v\to 0}\left(nz^{n-1}+\frac{o[v]}{v}\right)=nz^{n-1}.$$

Равенство верно для любой точки $z\in\mathbb{C}$. ■

Равенство для производной степенной функции можно записать более выразительно:

$$(z^n)'=nz^{n-1}.$$

Дифференцирование степенной функции z^n сводится к алгебраической операции: из показателя n вычитается единица и результат z^{n-1} умножается на n.

Из доказанной леммы индуктивно выводится равенство для m -й производной степенной функции z^n $(1\le m\le n)$:

$$(z^n)^{(m)}=n^{(m)}z^{n-m}.$$

Здесь $n^{(m)}$ есть m-я *обобщенная степень* числа n, определяемая равенствами $n^{(1)}=n$, $n^{(2)}=n(n-1)$, $n^{(3)}=n(n-1)(n-2)$ и $n^{(m)}=n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))$ при $m>3$. В частности, $n^{(n)}=n!$ и $n^{(m)}=0$ при $m>n$. Общая формула имеет вид

$$n^{(m)}=\prod_{k=0}^{m-1}(n-k).$$

Заметим, что обобщенную степень можно определить такой формулой для любого комплексного числа. Если $n\neq\mathbb{N}$ и $n\neq 0$, то $n^{(m)}\neq 0$ при любом $m\ge 1$. Обобщенные степени подробно рассматривались в [Савельев, 2011а, б].

Степенная функция z^n бесконечно дифференцируема и все ее производные, начиная с ($n+1$)-й, тождественно равны нулю.

1.1.3. Правила вычисления производных. Эти правила легко выводятся из определения производной и правил действий с пределами. Доказательства служат упражнениями на вычисление пределов.

Добавим к обозначениям, введенным при определении производной, функцию $g:A\to\mathbb{C}$ и числа $a,b\in\mathbb{C}$. Верна

Лемма о линейности производной. *Если функции f и g дифференцируемы в точке z_0, то их линейная комбинация $af+bg$ дифференцируема в точке z_0 и верно равенство*

$$(af+bg)'[z_0]=af'[z_0]+bg'[z_0].$$

□ Применяя правила действий с пределами, находим

$$(af+bg)'[z_0]=a\lim_{v\to 0,\,v\neq 0}\frac{f[z_0+v]-f[z_0]}{v}+$$

$$+b\lim_{v\to 0,\,v\neq 0}\frac{g[z_0+v]-g[z_0]}{v}=af'[z_0]+bg'[z_0].$$

Это равенство и означает линейность производной. ■

Если функции *f* и *g* дифференцируемы на области определения, то равенство леммы верно в каждой ее точке z_0. В этом случае пишут

$$(fg)'=f'g+fg'.$$

Правило дифференцирования сложной функции формулируется и доказывается несколько сложнее. Рассмотрим точку $w_0=f[z_0]$ и круг

$$B[w_0,s_0]=\{w:|w-w_0|<s_0\},$$

содержащий множество

$$f[B[z_0,r_0]]=\{w=f[z]:|z-z_0|<r_0\}.$$

Пусть теперь функция *g* определена в некоторой окрестности точки $w_0=f[z_0]$, содержащей круг $B[w_0,s_0]=\{w:|w-w_0|<s_0\}$. Для этой окрестности определено направление $w\to w_0$ и *сложная функция* $g[f]$ со значениями $g[f][z]=g[f[z]]$, $|z-z_0|<r_0$.

В этих обозначениях верна

Лемма о производной сложной функции. *Пусть функция f дифференцируема по переменной z в точке* z_0 *и функция g дифференцируема по переменной w в точке* $w_0 = f[z_0]$.

Тогда сложная функция $g[f]$ *дифференцируема по переменной z в точке* z_0 *и верно равенство*

$$g[f]'_z[z_0] = g'_w[f[z_0]]f'_z[z_0].$$

□ Для упрощения формул не будем явно выписывать переменные, по которым берутся производные: каждая из функций *f*, *g*, $g[f]$ дифференцируется по своей переменной. Так как функции *g* дифференцируемы в точке w_0, то

$$g[w] = g[w_0] + g'[w_0](w - w_0) + \beta[w](w - w_0),$$

где $\beta[w] \to 0$, $w \to w_0$. Пусть $w = f[z]$, $w_0 = f[z_0]$. Так как функция *f* дифференцируема в точке z_0, то

$$w - w_0 = f[z] - f[z_0] = f'[z_0](z - z_0) + \\ + \alpha[z](z - z_0),$$

где $\alpha[z] \to 0$, $z \to z_0$. Следовательно, $w \to w_0$ и $\beta[f[z]] \to 0$ при $z \to z_0$. Поэтому

$$g[f[z]] = g[f[z_0]] + g'[f[z_0]]\times \\ \times(f'[z_0](z - z_0) + \alpha[z](z - z_0)) + \\ + \beta[f[z]](f'[z_0](z - z_0) + \alpha[z](z - z_0)) = \\ = g[f[z_0]] + g'[f[z_0]]f'[z_0](z - z_0) + \\ + o[z - z_0],$$

$$o[z - z_0] = (\alpha[z]f'[z_0] + \beta[f[z]]f'[z_0] + \\ + \beta[f[z]]\alpha[z])(z - z_0),$$

откуда следует равевство леммы. ■

Если функции *f*, *g*, $g[f]$ дифференцируемы на области определения, то равенство леммы верно в каждой ее точке z_0. В этом случае пишут

$$g[f]'_z = g'_w[f]f'_z.$$

Эффектна классическая запись такого *цепного правила*:

$$\frac{dg[f]}{dz} = \frac{dg[f]}{df}\frac{df}{dz}.$$

Замечание. Тот факт, что $\beta[f[z]] \to 0$ при $z \to z_0$, сразу следует из определений. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что $|\beta[w]| < \varepsilon$ при $|w - w_0| < \eta$. Для каждого $\eta > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f[z] - f[z_0]| < \eta$ при $|z - z_0| < \delta$. Следовательно, при $w = f[z]$, $w_0 = f[z_0]$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|\beta[f[z]]| < \varepsilon$, когда $|z - z_0| < \delta$. То, что $f[z] \to f[z_0]$ при $z \to z_0$, выражает непрерывность функции *f* в точке z_0.

Примеров на применение правил дифференцирования будет много в дальнейшем. Благодаря линейности производной и формуле для производной степенной функции верна

Формула производной для полинома. *При* $n \geq 1$ *верно равенство*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} k c_k z^{k-1}.$$

При дифференцировании степень полинома уменьшается на единицу и исчезает свободный член c_0.

Равенство для *m*-й производной $(m \leq n)$ имеет вид

$$\left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)^{(m)} = \sum_{k=m}^{n} k^{(m)} c_k z^{k-m}.$$

При $m = n$ формула дает $n^{(n)}c_n = n!c_n$. Все производные порядка $m > n$ полинома степени не выше *n* тождественно равны нулю. Это выделяет полиномы среди бесконечно дифференцируемых функций.

1.1.4. ***Дифференциал***. С помощью производной можно линейно приближать дифференцируемую функцию в окрестности данной точки.

Говорят, что линейная функция $df[z] = f'[z_0](z - z_0)$ *является главной линейной частью* приращения $\Delta f[z] = f[z] - f[z_0]$ функции *f* в точке z_0. Линейная функция $\Delta f[z]$ называется *дифференциалом* функции *f* в точке z_0. Дифференциал $df[z]$ бесконечно мало отличается от приращения $\Delta f[z]$] при $z \to z_0$ и хорошо приближает его в окрестности точки z_0. А полином $tf[z] = f[z_0] + f'[z_0](z - z_0)$ бесконечно мало отличается от значения $f[z]$ при $z \to z_0$ и хорошо приближает функцию *f* в окрестности точки z_0. График полинома $tf[z]$ есть *касательная* к графику функции f в точке z_0.

Пример. Пусть $f[x]=(1-x^2)^{1/2}$, $-1<x<1$ и $x_0=1/\sqrt{2}$, $v=x-x_0$, $x=x_0+v$. Производную функции f в точке x_0 легко вычислить с помощью искусственного приема:

$$\frac{f[x]-f[x_0]}{x-x_0}=\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-1/2}}{x-1/\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{x+1/\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-1/2}}\to -1,$$

при $x\to 1/\sqrt{2}$. Поэтому

$$tf[x]=f[x_0]+f'[x_0](x-x_0)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Близость $f[x]$ и $tf[x]$ в окрестности точки $x_0=1/\sqrt{2}$ хорошо видна на графике (см. рис. 1). Для сравнения добавлен график постоянной $f[x_0]=1/\sqrt{2}$. Линейное приближение существенно точнее.

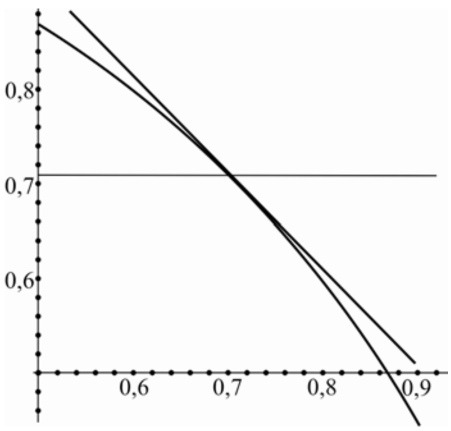

Рис. 1

1.1.5. Дифференцируемость и непрерывность. Существование производной функции в точке влечет непрерывность функции в точке. В принятых в предыдущих пунктах обозначениях верна

Лемма. *Если функция f дифференцируема в точке z_0, то функция f непрерывна в точке z_0.*

□ Если функция f дифференцируема в точке z_0, то

$$f[z]=f[z_0]+f'[z_0](z-z_0)+o[z-z_0],$$

где $o[z-z_0]/(z-z_0)\to 0$, $z\to z_0$. Следовательно, $f[z]\to f[z_0]$, $z\to z_0$. Значит функция f непрерывна в точке z_0. ■

Если функции f дифференцируема на области определения, то она непрерывна на области определения. Простота доказательства не делает сформулированные факты менее важными. Непрерывность дифференцируемой функции уже использовалась при выводе формулы для производной сложной функции. Классическим примером недифференцируемой непрерывной функции служит функция $f[z]=|z|$.

1.1.6. Вещественные непрерывные функции. Используя аппарат теории пределов, исследуем некоторые важные свойства вещественных функций, заданных на интервалах вещественной прямой. В этом пункте рассматриваются только такие функции.

Рассмотрим непустой открытый интервал $A\subseteq\mathbb{R}$, точки $a\in A$, $b\in A$, $a<b$, непрерывную функцию $f:A\to\mathbb{R}$ и ее сужение на отрезок $[a,b]$. Непрерывность функции на объемлющем интервале позволяет не делать оговорок для концов отрезка о непрерывности только слева и только справа. Верна

Лемма. *Непрерывная функция $f:A\to\mathbb{R}$ ограничена на каждом отрезке $[a,b]\subset A$.*

□ Если функция f не ограничена на отрезке $[a,b]$, то для каждого номера n существует точка $x[n]\in[a,b]$ такая, что $\left|f[x[n]]\right|>n$. По теореме Вейерштрасса [Савельев, 2010б] существует подпоследовательность $x[n[m]]$, сходящаяся к некоторой точке $x[0]\in[a,b]$. Так как функция f непрерывна, то из $x[n[m]]\to x[0]$, $m\to\infty$, следует, что

$$f[x[n[m]]]\to f[x[0]],\ m\to\infty.$$

При $\left|f[x[n[m]]]\right|>n[m]\to\infty$, $m\to\infty$, это невозможно. ■

По теореме о гранях [Там же] из ограниченности множества

$$f[a,b]=\{f[x]:x\in[a,b]\}$$

значений $f[x]$ функции f следует существование нижней и верхней граней

$\alpha = \inf f[a, b]$ и $\beta = \sup f[a, b]$ этого множества. Это значит, что верны неравенства $\alpha \le f[x] \le \beta$, $a \le x \le b$ и существуют последовательности точек $u[n] \in [a, b]$ и $v[n] \in [a, b]$ такие, что

$$0 \le f[u[n]] - \alpha \le 1/n \text{ и}$$
$$0 \le \beta - f[v[n]] \le 1/n .$$

Грани $\alpha = \inf f[a, b]$ и $\beta = \sup f[a, b]$ существуют у любой ограниченной функции *f*, непрерывной или разрывной. Но у разрывной функции они могут не быть ее значениями. Пусть, например, $[a, b] = [0, 1]$, $f[0] = 1$ и $f[x] = x^2$, $0 < x \le 1$. Тогда $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и $f[x] \ne 0$, $0 \le x \le 1$. Следующую теорему о достижении непрерывной функцией на отрезке своих граней тоже доказал Вейерштрасс.

Теорема Вейерштрасса*. Непрерывная функция f на отрезке* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *имеет в некоторых его точках u, v наименьшее и наибольшее значения*: $f[u] = \min f[a, b]$ *и* $f[v] = \max f[a, b]$.

□ Возьмем последовательности точек $u[n]$ и $v[n]$ отрезка $[a, b]$ такие, что

$$0 \le f[u[n]] - \alpha \le 1/n \text{ и}$$
$$0 \le \beta - f[v[n]] \le 1/n .$$

По теореме Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности существуют подпоследовательность $u[n[m]] \in [a, b]$, сходящаяся к некоторой точке $u \in [a, b]$, и подпоследовательность $v[n[m]] \in [a, b]$, сходящаяся к некоторой точке $v \in [a, b]$. Так как функция *f* непрерывна, то

$$f[u[n[m]]] \to f[u],\ m \to \infty, \text{ и}$$
$$f[v[n[m]]] \to f[v],\ m \to \infty .$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенствах

$$0 \le f[u[n[m]]] - \alpha \le 1/n[m] \text{ и}$$
$$0 \le \beta - f[v[n[m]]] \le 1/n[m]$$

и учитывая, что по определению подпоследовательности $n[m] \to \infty$, получаем равенства $f[u] = \alpha$ и $\beta = f[v]$. Ясно, что в этом случае

$$\alpha = \inf f[a, b] = \min f[a, b]$$

и $\beta = \sup f[a, b] = \max f[a, b]$. ■

Примерами могут служить элементарные функции (в частности, тригонометрические). Они же показывают, что на произвольных интервалах ограниченные непрерывные функции могут не иметь наименьших и наибольших значений.

Возникает естественный вопрос: принимает ли непрерывная функция все значения между наименьшим и наибольшим? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, доказанная Больцано. Как и прежде, будем рассматривать непустой открытый интервал $A \subseteq \mathbb{R}$ и непрерывную функцию $f : A \to \mathbb{R}$ на нем.

Теорема Больцано*. Пусть*

$$y_1 = f[x_1] < y_0 < y_2 = f[x_2]$$

для точек $x_1 \in A$, $x_2 \in A$. *Тогда* $y_0 = f[x_0]$ *для некоторой точки* $x_0 \in]x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2[$.

□ Доказательство проводится предложенным Больцано методом последовательного деления выбранного отрезка пополам. Этот метод подробно описывался при доказательстве теоремы о корне в [Савельев, 2010a], где решалось уравнение $y_0 = x^m$ для степенной функции $f[x] = x^m$.

По условию теоремы Больцано $f[x_1] \ne f[x_2]$ и, следовательно, $x_1 \ne x_2$. Обозначим точки так, чтобы $a_0 = x_1 < x_2 = b_0$ и, следовательно, $f[a_0] < y_0 < f[b_0]$. По индукции определяется стягивающаяся к некоторой точке $x_0 \in A$ последовательность отрезков $[a_n, b_n] \subset A$ таких, что $f[a_n] < y_0 < f[b_n]$, $b_n - a_n = (b_n - a_n)/2^n$. Так как функция *f* непрерывна и $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то переход к пределу в неравенствах $f[a_n] < y_0 < f[b_n]$ дает $f[x_0] = y_0 = f[x_0]$, $y_0 = f[x_0]$. По построению $x_1 \le x_0 \le x_2$. А так как по условию

$$y_1 = f[x_1] \ne y_0 = f[x_0], \text{ то } x_1 \ne x_0.$$

Точно так же $x_0 \ne x_2$. Следовательно, $x_1 < x_0 < x_2$. При произвольном порядке точек x_1, x_2 это означает, что $x_0 \in]x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2[$. ■

Следствие 1. *При непрерывном отображении образом интервала является интервал.*

□ Интервал $B \subseteq \mathbb{R}$ характеризуется свойством: если $y_1 \in B$, $y_2 \in B$, $y_1 < y_2$, то $[y_1, y_2] \subseteq B$. Для непрерывной функции это сразу следует из теоремы Больцано. ■

Следствие 1 является эквивалентной формулировкой теоремы Больцано. Рассматриваемые интервалы могут быть неограниченными.

Из теорем Больцано и Вейерштрасса вытекает общее

Следствие 2. *Непрерывная функция f на отрезке* $[a, b]$ *отображает его на отрезок* $[\alpha, \beta]$, *где* $\alpha = \min f[a, b]$ *и* $\beta = \max f[a, b]$.

□ В самом деле, из теоремы Вейерштрасса следует, что $\alpha = f[u] = \min f[a, b]$ и $\beta = f[v] = \max f[a, b]$ для некоторых точек u, v отрезка $[a, b]$. Если функция f постоянная со значением γ, то $\alpha = \beta = \gamma$ и $[\alpha, \beta] = \{\gamma\}$ есть вырожденный точечный отрезок. Если функция f не постоянная, то $\alpha < \beta$ и по теореме Больцано каждая точка $y_0 \in [\alpha, \beta]$ принадлежит образу $f[a, b]$. Поэтому $f[a, b] = [\alpha, \beta]$. ■

Теоремы Больцано и Вейерштрасса для непрерывных на отрезке функций в свою очередь непосредственно вытекают из следствия 2.

Важным свойством непрерывной на отрезке функции является ее равномерная непрерывность. Функция $f : A \to \mathbb{R}$ на интервале $A \subseteq \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при всех $x \in A$ и $y \in A$, для которых $|x - y| < \delta$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
$$(x \in A, \ y \in A, \ |x - y| < \delta).$$

Равномерная непрерывность означает, что значения функции произвольно близки для всех достаточно близких друг другу аргументов. Из определений следует, что равномерно непрерывная функция непрерывна в каждой точке области определения. Для непрерывной функции на отрезке верно и обратное утверждение.

Теорема Гейне. *Если функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она равномерно непрерывна на нем.*

□ Предположим противное. Тогда существуют $\alpha > 0$ и последовательности точек $x_n \in [a, b]$, $y_n \in [a, b]$ такие, что

$$|f(x_n) - f(y_n)| > \alpha \text{ и } |x_n - y_n| < 1/n .$$

По теореме Вейерштрасса у последовательности (x_n) существует подпоследовательность $(x_{n[m]})$, сходящаяся к некоторой точке $u \in [a, b]$. Так как $y_{n[m]} = x_{n[m]} + (y_{n[m]} - x_{n[m]})$ и $|x_{n[m]} - y_{n[m]}| < 1/n[m] \to 0$ при $m \to \infty$, то $y_{n[m]} \to u$ вместе с $x_{n[m]} \to u$. А так как по условию функция f непрерывна в точке u, то $f[x_{n[m]}] \to f[u]$, $f[y_{n[m]}] \to f[u]$ и $f[x_{n[m]}] - f[y_{n[m]}] \to 0$ при $m \to \infty$. Это противоречит неравенствам

$$|f(x_{n[m]}) - f(y_{n[m]})| > \alpha > 0 . ■$$

Таким образом, для функций на отрезках понятия непрерывности и равномерной непрерывности эквивалентны. Для функций на произвольных интервалах – нет. Примерами могут служить функции $f :]0, 1] \to R$, $g : R \to R$, $h :]0, \infty[\to R$ со значениями $f(x) = 1/x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sin(1/x)$. Все они непрерывны, но не равномерно непрерывны.

Замечание. Нетрудно доказать, что взаимно однозначная непрерывная на интервале функция строго монотонна. Отсюда следует, что обратная к взаимно однозначной непрерывной на интервале функции тоже непрерывна. Композиция непрерывных функций непрерывна. Подробные доказательства есть в первом томе курса Г. М. Фихтенгольца [1970]. Вместе с теоремами Вейерштрасса, Больцано и Гейне эти утверждения достаточно полно описывают свойства вещественных непрерывных функций.

1.2. Дифференцирование аналитических функций. Дифференцирование этих функций, как и полиномов, сводится к простым алгебраическим операциям с его коэффициентами.

1.2.1. Равномерная суммируемость степенного ряда. Равномерная суммируемость степенных рядов позволяет дифференцировать их почленно. Степенные ряды рассматривались в [Савельев, 2011а, б]. Там много подробно разобранных примеров.

Каждое число z и последовательность чисел c_k определяют *степенной ряд* $\left(c_k z^k\right)$. Конечные суммы такого ряда являются полиномами

$$s_n[z] = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n \quad (n \geq 0).$$

Если последовательность конечных сумм $s_n[z]$ сходится, то ее предел $s[z]$ называют суммой ряда $\left(c_k z^k\right)$ и пишут

$$s[z] = \lim_{n\to\infty} s[z] = \lim_{n\to\infty} s\left[\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Ряд $\left(c_k z^k\right)$ называют *суммируемым* или, имея в виду последовательность его конечных сумм $s_n[z]$, *сходящимся*. Нужно только не смешивать эту сходимость со сходимостью самой последовательности $\left(c_k z^k\right)$. Термины *последовательность* и *ряд* считаются здесь синонимами. Второй термин короче. Можно говорить и о *суммируемой последовательности*.

Во многих вопросах для данной последовательности коэффициентов c_k важно знать, при каких z ряд $\left(c_k z^k\right)$ суммируем, а при каких нет. Нередко дать полный ответ на этот вопрос трудно. Частичный ответ на этот вопрос дает формула Адамара, доказанная в [Там же]. Условимся для этой формулы считать, что верхний предел неограниченной положительной последовательности равен бесконечности и что $1/\infty = 0$, $1/0 = \infty$.

Формула Адамара. *Пусть*

$$r = 1\Big/\limsup |c_k|^{1/k}.$$

Тогда при $|z| < r$ *ряд* $\left(c_k z^k\right)$ *абсолютно суммируем, а при* $|z| > r$ *не суммируем.*

В частности, если $\limsup |c_k|^{1/k} = 0$, то $r = \infty$ и ряд $\left(c_k z^k\right)$ абсолютно суммируем при любом z. Если $\limsup |c_k|^{1/k} = \infty$, то $r = 0$ и ряд $\left(c_k z^k\right)$ суммируем только при $z = 0$. Абсолютная суммируемость ряда $\left(c_k z^k\right)$ означает суммируемость положительного ряда $\left(|c_k||z|^k\right)$.

Геометрически формула Адамара означает, что степенной ряд $\left(c_k z^k\right)$ абсолютно суммируем *внутри* замкнутого круга $\overline{B}[0,r] = \{z : |z| \leq r\}$ с центром 0 и радиусом r (в открытом круге $B[0,r] = \{z : |z| < r\}$) и не суммируем вне круга $\overline{B}[0,r]$. Число r называется *радиусом суммируемости* или, коротко, просто *радиусом* степенного ряда $\left(c_k z^k\right)$. Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ считается кругом бесконечного радиуса: $\mathbb{C} = B[0,\infty]$. Для $r < \infty$ поведение ряда при $|z| = r$ на окружности $S[0,r] = \{z : |z| = r\}$ с центром 0 и радиусом r, ограничивающей область суммируемости, требует особого исследования: в некоторых граничных точках ряд может иметь сумму, а в некоторых нет. В дальнейшем под *областью суммируемости* степенного ряда с радиусом суммируемости r будем понимать открытый круг $B[0,r] = \{z : |z| < r\}$, во всех точках которого ряд имеет сумму.

Для абсолютно суммируемого ряда $\left(c_k z^k\right)$ верно *неравенство треугольника*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\left(|c_k||z|^k\right).$$

Это неравенство следует из неравенства треугольника для конечных сумм и правила перехода к пределу в неравенствах.

Степенной ряд $\left(c_k z^k\right)$ с коэффициентами c_k и радиусом суммируемости $r > 0$ определяет функцию $f : B[0,r] \to \mathbb{C}$ со значениями

$$f[z] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \ |z| < r.$$

Такие функции, представляемые суммами невырожденных степенных рядов, называются аналитическими. В [Там же] были приведены примеры.

Замечание. В теории аналитических функций рассматриваются функции, имеющие более сложные области определения и представляющиеся суммами семейств степенных рядов $\left(c_k[z_0](z - z_0)^k\right)$.

Условимся говорить, что степенной ряд с радиусом $r>0$ *равномерно суммируем*, если сходимость $s_n[z]\to s[z]\to\infty$ *равномерна* на каждом круге $B[0,q]$ с радиусом $q<r$.

Лемма. *Степенной ряд равномерно суммируем.*

□ Рассмотрим степенной ряд $\left(c_k z^k\right)$ с радиусом $r>0$. По формуле Адамара положительный ряд $\left(|c_k|q^k\right)$ суммируем при $0<q<r$ и, следовательно, его остаток бесконечно мал:

$$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k|q^k\to 0,\ n\to\infty.$$

Применяя неравенство треугольника для рядов, получаем при $|z|<q$

$$\left|s[z]-s_n[z]\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k z^k\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k|q^k=r_n\to 0,$$

когда $n\to\infty$. Значит, $s_n[z]\to s[z]$, $n\to\infty$, равномерно в круге $B[0,q]$. ■

Заметим, что для каждой точки z_0 круга суммируемости $B[0,r]$ существует круг $B[z_0,r_0]$ некоторого радиуса $r_0>0$, целиком содержащийся в круге суммируемости: $B[z_0,r_0]\subseteq B[0,r]$. Это следует из неравенств $|z|\le|z-z_0|+|z_0|<r_0+|z_0|<r$, верных при $|z_0|<r$, $|z-z_0|<r_0$ и $0<r_0<r-|z_0|$. Поэтому для каждой точки $z_0\in B[0,r]$ определено направление $z\to z_0$ ($z\ne z_0$). Замена $v=z-z_0$ превращает его в направление $v\to 0$ ($v\ne 0$).

Из определения равномерной сходимости и доказанной леммы вытекает

Следствие. *Пусть* $z_0\in B[0,r]$. *Тогда степенной ряд равномерно суммируем на круге* $B[z_0,r_0]$ *с некоторым радиусом* $r_0>0$.

Равномерность сходимости $s_n[z]\to s[z]$, $n\to\infty$, на круге $B[z_0,r_0]$ важна для вычисления пределов по направлению $z\to z_0$ ($z\ne z_0$).

1.2.2. Производные аналитической функции. Почленная дифференцируемость и равномерная суммируемость степенных рядов позволяют вычислять производные аналитических функций так же, как производные полиномов.

Рассмотрим степенной ряд $\left(c_k z^k\right)$ с коэффициентами c_k, радиусом $r>0$ и определяемую им функцию $f:B[0,r]\to\mathbb{C}$ со значениями

$$f[z]=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,\quad |z|<r.$$

Лемма. *Радиус ряда* $\left(kc_k z^{k-1}\right)$ *равен радиусу ряда* $\left(c_k z^k\right)$.

□ Так как $kc_k z^{k-1}=z^{-1}\left(kc_k z^k\right)$ при $z\ne 0$, то

$$\limsup\left|z^{-1}kc_k\right|^{1/k}=$$
$$=\lim\left(\left|z^{-1}\right|^{1/k}\right)\lim\left(k^{1/k}\right)\limsup|c_k|^{1/k}.$$

В [Савельев, 2011а, б] было доказано, что $\left|z^{-1}\right|^{1/k}\to 1$, $k^{1/k}\to 1$, $k\to\infty$. Поэтому

$$\limsup\left|z^{-1}kc_k\right|^{1/k}=\limsup|c_k|^{1/k}.$$

Отсюда по формуле Адамара следует равенство радиусов суммируемости степенных рядов $\left(kc_k z^{k-1}\right)$ и $\left(c_k z^k\right)$. ■

Верна

Теорема о почленной дифференцируемости. *Функция f дифференцируема в каждой точке* z_0 *круга суммируемости ряда* $\left(c_k z^k\right)$, *и для ее производной верно равенство*

$$f'[z_0]=\sum_{k=1}^{\infty}kc_k z_0^{k-1}.$$

□ Это легко доказать с помощью теорем о повторных и двойных пределах. Рассмотрим двойную направленность

$$h[n,z]=\frac{s_n[z]-s_n[z_0]}{z-z_0},\ n\in\mathbb{N},\ z\in B[0,r].$$

По формуле для производной полинома при z, $z_0\in B[0,r]$ находим простой предел при $z\to z_0$:

$$s'_n[z_0]=\lim_{z\to z_0}h[n,z]=\sum_{k=1}^{n}kc_k z_0^{k-1}.$$

По доказанной лемме ряд $\left(kc_k z_0^{k-1}\right)$ имеет сумму. Следовательно, повторный предел a (сначала по z, а потом по n) существует, и верны равенства

$$a = \lim_{n\to\infty}\lim_{z\to z_0} h[n, z] = \lim_{n\to\infty} s'_n[z_0] = \sum_{k=1}^{n} kc_k z_0^{k-1}.$$

Так как $z,\ z_0 \in B[0, r]$, то $s_n[z] \to f[z]$ и $s_n[z_0] \to f[z_0]$ при $n \to \infty$. Поэтому для каждого z существует простой предел

$$g[z] = \lim_{n\to\infty} h[n, z] = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n[z] - s_n[z_0]}{z - z_0} =$$
$$= \frac{f[z] - f[z_0]}{z - z_0}.$$

По лемме о равномерной суммируемости степенного ряда сходимость $s_n[z] \to s[z]$, $n \to \infty$, равномерна на круге $B[0, r]$. Вместе с нею равномерна сходимость

$$h[n, z] \to g[z],\ n \to \infty.$$

Как было доказано в п. 1.2.2, по теоремам о повторных и двойных пределах из существования всех простых пределов, повторного предела a и равномерной сходимости $s_n[z] \to s[z]$, $n \to \infty$, следует существование второго повторного предела $b = \lim_{z\to z_0}\lim_{n\to\infty} h[n, z]$ (сначала по n, а потом по z) и равенство $a = b$. Заметим, что

$$b = \lim_{z\to z_0}\lim_{n\to\infty} h[n, z] = \lim_{z\to z_0} \frac{f[z] - f[z_0]}{z - z_0} = f'[z_0].$$

Равенство $b = a$ означает равенство

$$f'[z_0] = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k z_0^{k-1}.$$

Теорема доказана. ■

Заменим z_0 на z. По индукции из доказанного равенства получается равенство для m-й производной $(m \ge 1)$ суммы f степенного ряда $(c_k z^k)$:

$$f^{(m)}[z] = \sum_{k=m}^{\infty} k^{(m)} c_k z^{k-m}.$$

У аналитических функций, в отличие от полиномов, производные всех порядков могут не быть тождественными нулями. Каждая производная $f^{(m)}$ аналитической функции f дифференцируема и, следовательно, непрерывна в круге суммируемости.

1.2.3. Примеры. Приведем примеры почленного дифференцирования. Рассматриваемые ряды подробно описывались в [Савельев, 2011а, б].

Пример 1. Для геометрической прогрессии со знаменателем z, $|z| < 1$, верны равенства

$$f[z] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad f'[z] = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}.$$

Вместе с тем

$$f'[z] = \lim_{v\to 0} \frac{1}{v}\left(\frac{1}{1-(z+v)} - \frac{1}{1-z}\right) =$$
$$= \lim_{v\to 0} \frac{1}{(1-z)(1-z-v)} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Это равенство нередко бывает полезно.

Пример 2. Для экспоненциального ряда $\left(z^n/n!\right)$, $z \in \mathbb{C}$, верны равенства

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

$$\left(e^z\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Экспоненциальная функция равна своей производной. Вместе с равенством $e^0 = 1$ это свойство выделяет ее среди заданных на всей комплексной плоскости аналитических функций. Ясно, что и производные всех порядков экспоненциальной функции тоже равны ей.

Пример 3. Комплексная функция $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ вещественной переменной, имеющая значения $\phi[t] = e^{it}$, есть сумма экспоненциального ряда $\left((it)^k/k!\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Верны равенства

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{t^k}{k!},$$

$$\left(e^{it}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} i^k k \frac{t^{k-1}}{k!} = i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^{k-1}}{(k-1)!} = i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} = ie^{it}.$$

Производная *мнимой экспоненты* $\phi[t] = e^{it}$ получается умножением ее на i. Зная, что $(ez)' = e^z$, равенство $\left(e^{it}\right)' = ie^{it}$ можно сразу получить по правилу дифференцирования сложной функции.

Пример 4. Ряды $\left((-1)^k z^{2k}/(2k)!\right)$, $z \in \mathbb{C}$, и $\left((-1)^k z^{2k+1}/(2k+1)!\right)$, $z \in \mathbb{C}$, определяют функции

$$\mathrm{Cos}[z]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k},$$

$$\mathrm{Sin}[z]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}z^{2k-1}.$$

Почленное дифференцирование дает:

$$\mathrm{Cos}'[z]=\sum_{k=0}^{\infty}2k\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k-1}=$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}z^{2k-1}=\mathrm{Sin}[z];$$

$$\mathrm{Sin}'[z]=\sum_{k=0}^{\infty}(2k-1)\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}z^{2k-1}=$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2(k-1))!}z^{2(k-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}=\mathrm{Cos}[z].$$

Дифференцируя повторно, получаем:

$$\mathrm{Cos}''[z]=-\mathrm{Sin}'[z]=-\mathrm{Cos}[z];$$

$$\mathrm{Sin}''[z]=\mathrm{Cos}'[z]=-\mathrm{Sin}[z].$$

Повторное дифференцирование сводится к изменению знака. Различаются функции значениями $\mathrm{Cos}[0]=1$, $\mathrm{Cos}'[0]=0$ и $\mathrm{Sin}[0]=0$, $\mathrm{Sin}'[0]=1$.

Заметим, что поведение функций Cos и Sin на комплексной плоскости гораздо сложнее, чем поведение их сужений на вещественную прямую. В частности, на комплексной плоскости они становятся неограниченными.

Пример 5. Рассмотрим логарифмический ряд $\left((-1)^{k-1}x^k/k\right)$, $-1<x<1$, и его сумму

$$\mathrm{Log}[1+x]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$$

Почленное дифференцирование и формула для суммы геометрической прогрессии дают

$$\mathrm{Log}'[1+x]=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^{k-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k=\frac{1}{1+x}.$$

Это равенство позволяет легко вычислять производные всех порядков для логарифмической функции $\mathrm{Log}[1+x]$. Замена переменной $1+x$ на x дает равенство $\mathrm{Log}'[x]=1/x$. При соответствующем продолжении логарифмической функции это равенство верно для всех $x>0$.

Пример 6. Возьмем $m\in\mathbb{N}$ и рассмотрим биномиальный ряд $\left(\binom{1/m}{k}v^k/k\right)$, $-1<v<1$, имеющий сумму

$$f[v]=(1+v)^{1/m}=\sum_{k=0}^{\hbar}\binom{1/m}{k}v^k=1+\frac{1}{m}v+o[v],$$

где

$$\binom{1/m}{k}=\left(\frac{1}{m}\right)^{(k)}\Big/k!,\quad \left(\frac{1}{m}\right)^{(k)}=\prod_{j=0}^{k=1}\left(\frac{1}{m}-j\right).$$

Вычислим производную функции f в точке $v_0=0$. Заметим, что

$$\frac{f[v]-f[0]}{v}=\frac{1+(1/m)v+o[v]-1}{v}=\frac{1}{m}+o[1],$$

при $v\to 0$. Значит, $f'[0]=1/m$.

Вычислим производную функции f в произвольной точке $x_0\in\,]-1,1[$. Пусть $x=x_0+v$, $v=x-x_0\in\,]-1,1[$. Тогда

$$f[x_0+v]-f[x_0]=(1+x_0+v)^{1/m}-(1+x_0)^{1/m}=$$

$$=(1+x_0)^{1/m}\left(\left(1+\frac{v}{1+x_0}\right)^{1/m}-1\right)=$$

$$=(1+x_0)^{1/m}\left(\frac{1}{m}\frac{v}{1+x_0}+o[v]\right).$$

Следовательно,

$$\frac{f[x_0+v]-f[x_0]}{v}=\frac{1}{m}(1+x_0)^{1/m-1}+o[1],$$

при $v\to 0$. Значит,

$$f'[x_0]=(1/m)(1+x_0)^{1/m-1}.$$

Заменяя x_0 на x, получаем равенство

$$\left((1+x)^{1/m}\right)'=(1/m)(1+x)^{1/m-1}.$$

В частности, при $m=2$ верно равенство

$$\left(\sqrt{1+x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$

Замечание. Как нетрудно проверить индуктивно, при $m=2$ и $n\geq 2$ верны равенства

$$\binom{1/2}{n}=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{(2n-3)!!}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\binom{2(n-1)}{n-1}.$$

Полученные равенства полезны для приближенных вычислений корней.

Пример 7. Пусть $f[x]=\left(1-x^2\right)^{1/2}$,

$$-1<x<1 \text{ и } x_0=1/\sqrt{2}.$$

Производную функции f в точке x_0 можно вычислить, используя результат примера 6 и замену переменной $u=-x^2$, $u_0=-x_0^2$. Так как $u\to u_0$, $x\to x_0$, то верны равенства $f[x_0]=1/\sqrt{2}$ и

$$\frac{f[u]-f[u_0]}{x-x_0}=\frac{f[u]-f[u_0]}{u-u_0}\frac{u-u_0}{x-x_0}=$$

$$=-\frac{f[u]-f[u_0]}{u-u_0}(x+x_0),$$

$$\frac{f[u]-f[u_0]}{x-x_0}\to\frac{1}{2\sqrt{1+u_0}}2x_0=-\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}=-1,$$

при $x\to x_0=1/\sqrt{2}$. Значит, $f'[x_0]=-1$.

Эти равенства служат иллюстрацией применения цепного правила дифференцирования сложной функции: $f[u]'_x=f'_u u'_x$. Производная f'_u попеременной u вычисляется в точке u_0, а производная u'_x попеременной x вычисляется в точке x_0.

Легко вычислить производную $f'[x_0]$ и непосредственно, используя свойства биномиального ряда. Пусть $x_0=1/\sqrt{2}$, $v=x-x_0$, $x=x_0+v$. Верны равенства $f[x_0]=1/\sqrt{2}$ и

$$\left(1-(x_0+v)^2\right)^{1/2}-\left(1-x_0^2\right)^{1/2}=$$

$$=\left(1-x_0^2\right)^{1/2}\left(\left(1-\frac{2(x_0+v)}{1-x_0^2}v\right)^{1/2}-1\right)=$$

$$=\left(1-x_0^2\right)^{1/2}\frac{x_0}{1-x_0^2}v+o[v].$$

Следовательно,

$$\frac{f[x_0+v]-f[x_0]}{v}=\left(1-x_0^2\right)^{1/2}\frac{x_0}{1-x_0^2}+o[1]$$

при $v\to 0$. Значит,

$$f'[x_0]=-x_0\left(1-x_0^2\right)^{1/2-1}=-1.$$

Пример 8. Пусть

$$f[z]=\mathrm{Cos}[z],\ g[z]=\mathrm{Sin}[z],\ z\in\mathbb{C}.$$

Тогда по правилу дифференцирования произведения и результатам примера 4 верны равенства

$$(fg)'[z]=f'[z]g[z]+f[z]g'[z]=$$

$$=-\mathrm{Sin}^2[z]+\mathrm{Cos}^2[z]=\mathrm{Cos}[2z].$$

Тот же результат дают правило дифференцирования сложной функции и равенство $\mathrm{Sin}[2z]=2\mathrm{Cos}[z]\mathrm{Sin}[z]$:

$$\left(\frac{1}{2}\mathrm{Sin}[2z]\right)'=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Sin}[2z]\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Cos}[2z](2z)'=\mathrm{Cos}[2z].$$

Этот простой пример иллюстрирует удобство применения правил. Вычислить соответствующие пределы непосредственно было бы сложнее.

1.2.4*. *Формула Тейлора. Почленная дифференцируемость степенных рядов позволяют выражать их коэффициенты через производные и локально приближать аналитические функции специальными полиномами.

В п. 1.2.2 было доказано равенство

$$f^{(m)}[z]=\sum_{k=m}^{\infty}k^{(m)}c_k z^{k-m}$$

для m-й производной $(m\ge 1)$ суммы f степенного ряда $\left(c_k z^k\right)$. Это равенство позволяет выразить коэффициенты ряда через производные его суммы. Заметим, что $m^{(m)}=m!$, и поэтому

$$f^{(m)}[z]=m!c_m+R_m[z],\ R_m[z]=\sum_{k=m+1}^{\infty}k^{(m)}c_k z^{k-m}.$$

Лемма об оценке остатка. *Пусть ряд* $\left(c_k z^k\right)$ *имеет радиус* $r>0$ *и* $0<|z|<q<r$. *Тогда*

$$|R_m[z]|\le C_m[q]|z|,\ C_m[q]=\sum_{k=m+1}^{\infty}k^{(m)}|c_k|q^{k-(m+1)}.$$

□ Применяя неравенство треугольника для рядов, получаем

$$|R_m[z]|=\left|z\sum_{k=m+1}^{\infty}k^{(m)}c_k z^{k-(m+1)}\right|\le$$

$$\le|z|\sum_{k=m+1}^{\infty}k^{(m)}|c_k||z|^{k-(m+1)}\le$$

$$\le|z|\sum_{k=m+1}^{\infty}k^{(m)}|c_k|q^{k-(m+1)}=C_m[q]|z|.$$

Так как $|z|<q<r$, то все эти ряды суммируемы вместе с $\left(c_k z^k\right)$. ■

Данную оценку остатка можно эффективно использовать в различных вычислениях.

Замечание. Следующее из леммы равенство $\lim_{z\to 0,\,z\ne 0}R_m[z]=0$ можно получить и так:

$$\lim_{z\to 0,\,z\ne 0}R_m[z]=\lim_{z\to 0,\,z\ne 0}\lim_{n\to\infty}\left(z\sum_{k=m+1}^{n}k^{(m)}c_k z^{k-(m+1)}\right)=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{z\to 0,\, z\neq 0} \left(z \sum_{k=m+1}^{n} k^{(m)} c_k z^{k-(m+1)} \right) = 0.$$

Возможность перестановки пределов обеспечивается равномерной сходимостью рассматриваемого ряда. Подчеркнем, что условие $z \neq 0$ не позволяет просто подставлять $z = 0$ в формулу. Равенство $R_m[z] = 0$ получается в результате *непрерывного продолжения функции* R_m. Подстановка значений в слагаемые бесконечных сумм вообще требует особой осторожности.

Лемма о коэффициентах.

$$c_m = f^{(m)}[o]/m!$$

□ Так как все производные аналитической функции непрерывны, то $f^{(m)}[z] \to f^{(m)}[0]$, $z \to 0$. По лемме об оценке остатка $R_m[z] \to 0$, $z \to 0$. Отсюда и из равенства $f^{(m)}[z] = m!c_m + R_m[z]$ следует, что $f^{(m)}[0] = m!c_m$. Это равенство эквивалентно доказываемому. ■

Полученное равенство для коэффициентов дает специальную форму равенства для суммы ряда $(c_k z^k)$:

$$f[z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}[0]}{k!} z^k.$$

Степенной ряд с коэффициентами $f^{(k)}[0]/k!$ называется *рядом Маклорена* для функции *f*. Замена $z \to z - z_0$ дает равенство

$$f[z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}[z_0]}{k!} (z - z_0)^k$$

для точек z, z_0 из круга суммируемости ряда $(c_k z^k)$. Степенной ряд с коэффициентами $f^{(k)}[z_0]/k!$ называется *рядом Тейлора* в точке z_0 для функции *f*. Ряд Маклорена является рядом Тейлора в точке $z_0 = 0$.

Из определения следует, что

$$f[z] = T_m[z, z_0] + R_m[z, z_0],$$

где

$$T_m[z, z_0] = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}[z_0]}{k!} (z - z_0)^k,$$

$$R_m[z, z_0] = \sum_{k=m+1}^{\infty} k^{(m)} c_k (z - z_0)^{k-m}.$$

Полином $T_m[z, z_0]$ называется m-м *полиномом Тейлора* в точке z_0 для функции *f*. Он приближает функцию *f* в окрестности точки z_0. Лемма об оценке остатка дает погрешность такого приближения.

Пример. Рассмотрим сумму *f* экспоненциального ряда $(z^n/n!)$, $z \in \mathbb{C}$, m-й полином Тейлора $T_m[z] = T_m[z, 0]$ в точке $z = 0$ для функции *f* и остаток $R_m[z] = R_m[z, 0]$:

$$f[z] = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

$$T_m[z] = \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^m}{m!},$$

$$R_m[z] = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{z^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{z^{m+2}}{(m+2)!} + \ldots$$

Оценим $R_m[z]$ непосредственно, не используя лемму об оценке остатка. По неравенству треугольника для рядов и формуле для суммы геометрической прогрессии верны соотношения:

$$|R_m[z]| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+1)!}{(m+1+n)!} |z|^n \leq$$

$$\leq \frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(m+2)^n} |z|^n,$$

$$|R_m[z]| = \frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!} \frac{1}{1 - |z|/(m+2)}, \quad |z| < m+2.$$

Были использованы неравенство

$$(m+2)\ldots(m+1+n) \geq (m+2)^n$$

и равенство

$$(m+1+n)! = (m+1)!\big((m+2)\ldots(m+1+n)\big).$$

Можно взять $(m+2)\ldots(m+1+n) \geq n!$ и получить неравенство

$$|R_m[z]| \leq \left(|z|^{m+1}/(m+1)!\right) e^{|z|}.$$

В вещественном случае $z = x$ графики функции $f[x] = e^x$ и тейлоровских полиномов $T_1[x] = 1 + x$, $T_2[x] = 1 + x + x^2/2$ в окрестности точки $x_0 = 0$ имеют вид, приведенный на рис. 2.

Видно, что парабола $T_2[x]$ лучше приближает экспоненту e^x в окрестности точки $x_0 = 0$, чем касательная $T_1[x]$ в этой точке. Хорошо виден и локальный характер тейлоровского приближения: погрешность растет при удалении от точки $x_0 = 0$.

1.2.5. Вещественные гладкие функции. Используя аппарат теории пределов, исследуем некоторые важные свойства вещественных функций с непрерывной производной, заданных на интервалах вещественной прямой. Будем называть их *гладкими*. В этом пункте прежде всего имеются в виду гладкие функции.

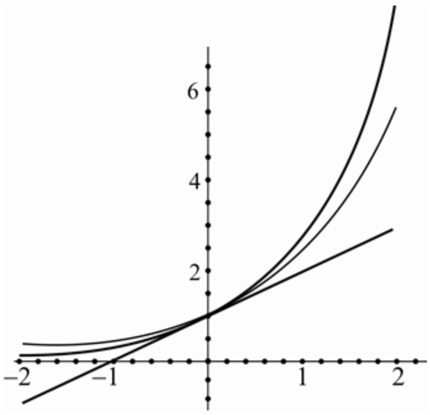

Рис. 2

С помощью производных удобно исследовать локальное и глобальное поведение гладкой функции. Чтобы не делать постоянных оговорок о граничных точках, удобно рассматривать функции, определенные и дифференцируемые на открытых интервалах. Утверждения о локальных свойствах таких функций переходом к сужениям автоматически переносятся на функции с любыми областями определения, содержащими открытые интервалы.

Рассмотрим открытый интервал $A \subseteq \mathbb{R}$, точку $a \subseteq A$ и гладкую функцию $f : A \to \mathbb{R}$. Из определения производной следует, что

$$f[x] - f[a] = (f'[a] + \alpha[x])(x - a),$$
$$\alpha[x] \to 0 \ (x \to a).$$

Возможны три случая: $f'[a] > 0$, $f'[a] = 0$, $f'[a] < 0$. Если $f'[a] > 0$, то $f'[a] + \alpha[x] > 0$ при $a - \delta < x < a + \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Следовательно, $f[x] < f[a]$ при $a - \delta < x < a$ и $f[a] < f[x]$ при $a < x < a + \delta$. В этом случае говорят, что функция *f строго возрастает* в окрестности точки *a*. Если $f'[a] < 0$, то неравенства для значений функции *f* и ее производной заменяются на противоположные. В этом случае говорят, что функция *f строго убывает* в окрестности точки *a*. При $a - \delta < x < a + \delta$ для некоторого $\delta > 0$ верны также равенства

$$\operatorname{sgn}\big[f[x] - f[a]\big] =$$
$$= \operatorname{sgn}\big[f'[a] + \alpha[x]\big]\operatorname{sgn}[x - a] =$$
$$= \operatorname{sgn}\big[f'[a]\big]\operatorname{sgn}[x - a].$$

Если $f'[a] = 0$, то, как показывают примеры, функция f может вести себя поразному. Если $f[x] \geq f[a]$ при $a - \delta < x < a + \delta$ для некоторого $\delta > 0$, то говорят, что функция *f* имеет в точке *a локальный минимум*. Если, кроме того, $f[x] > f[a]$ при $x \neq a$, то этот локальный минимум называют *строгим*. При противоположных неравенствах для значений функции говорят о *локальном максимуме* и о *строгом локальном максимуме*. Минимум и максимум объединяют термином *экстремум*.

Заметим, что переход от максимума к минимуму можно осуществлять заменой функции *f* на функцию $g = -f$, так как неравенство $g[x] \geq g[a]$ эквивалентно $f[x] \leq f[a]$. Это позволяет не дублировать общие рассуждения.

Примеры. Сказанное хорошо поясняется поведением квадратичных и кубических парабол x^2, $-x^2$, x^3, $-x^3$ на интервалах, которым принадлежит точка $a = 0$. Графики все прекрасно показывают, особенно если провести касательные в различных точках.

Связанные с исследованием функций свойства производных описывают классические теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа. Необходимое условие локального экстремума формулирует

Теорема Ферма. *Если функция $f : A \to \mathbb{R}$ на интервале $A \subseteq \mathbb{R}$ имеет в точке $a \in A$ локальный экстремум и дифференцируема в точке a, то $f'[a] = 0$.*

□ При $f'[a] > 0$ или $f'[a] < 0$ функция *f* строго возрастает или убывает в окрестности точки *a* и не имеет в ней локального экстремума. ■

Как показывает пример с кубической параболой x^3, *необходимое* равенство $f'[a] = 0$ не является *достаточным* условием для локального экстремума.

В следующих двух теоремах не требуется дифференцируемость функции в концах рассматриваемого отрезка. Это не усложняет доказательства и расширяет класс функций, для которых теоремы верны.

Теорема Ролля. *Пусть функция* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *R непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *дифференцируема в интервале* $]a,b[$ *и имеет равные значения в его концах:* $f[a]=f[b]$. *Тогда существует промежуточная точка* $c\in]a,b[$ *такая, что* $f'[c]=0$.

□ Если функция *f* постоянна, то $f'[x]=0$ для всех $x\in]a,b[$. Пусть функция *f* непостоянна. По теореме Вейерштрасса *f* имеет глобальный минимум $f[u]=\min f[a,b]$ и глобальный максимум $f[v]=\max f[a,b]$ в некоторых точках *u*, *v* отрезка $[a,b]$. Так как функция *f* не постоянна, то $f[u]<f[v]$. А так как $f[a]=f[b]$, то $f[u]<f[a]=f[b]$ или $f[v]>f[a]=f[b]$ и соответственно

$$c=u\in]a,b[\text{ или } c=v\in]a,b[.$$

В любом случае по теореме Ферма $f'[c]=0$. ■

Теоремы Ферма и Ролля имеют простой геометрический смысл: в точках, где достигаются локальные экстремумы, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Пример. Пусть

$$f[x]=\left(1-x^2\right)^{1/2},\ -1\le x\le 1.$$

Тогда $f'[x]=x\left(1-x^2\right)^{-1/2}$, $-1<x<1$ и $f'[0]=0$.

Теорему Ролля обобщает

Теорема Лагранжа. *Пусть функция f непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируема в интервале* $]a,b[$. *Тогда существует точка* $c\in]a,b[$ *такая, что*

$$f[b]-f[a]=f'[c](b-a).$$

□ Введем вспомогательную функцию $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ со значениями

$$F[x]=f[x]-f[a]-\frac{f[b]-f[a]}{b-a}(x-a).$$

Она удовлетворяет условиям теоремы Ролля: непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в $]a,b[$ вместе с *f*, а, кроме того, $F[a]=F[b]=0$. Следовательно, существует точка $c\in]a,b[$ такая, что $F'[c]=0$. А так как

$$F'[x]=f'[x]-\frac{f[b]-f[a]}{b-a},$$

то при $x=c$ верно доказываемое равенство. ■

Теорема Лагранжа тоже имеет простой геометрический смысл: касательная к графику функции *f* в точке *a* параллельна секущей, проходящей через точки $(a,f[a])$ и $(b,f[b])$.

Следствие. *Пусть* $f:A\to\mathbb{R}$ *– гладкая функция на непустом открытом интервале* $A\subseteq\mathbb{R}$. *Тогда:*

1) *если* $f'=0$, *то f постоянна*;
2) *если* $f'\ge 0$, *то f возрастает*;
3) *если* $f'>0$, *то f строго возрастает*.

□ Подчеркнем, что в условиях теоремы равенство и неравенства для производной f' должны выполняться для значений $f'[x]$ во всех точках $x\in A$. Рассмотрим произвольные точки $a<b$ интервала *A*. Из теоремы Лагранжа следует, что

$$\operatorname{sgn}\left[f[b]-f[a]\right]=\operatorname{sgn}\left[f'[c]\right]$$

для некоторой точки $c\in]a,b[\subset A$. Из равенства для знаков сразу следуют все три утверждения теоремы. ■

Переход к функции $g=-f$ дает утверждения:

4) *если* $f'\le 0$, *то f убывает*;
5) *если* $f'<0$, *то f строго убывает*.

Они сразу следуют и из равенства для знаков.

Замечание. Для (1), (2), (4) верны и обратные утверждения. Они сразу следуют из определения производной и правил действий с пределами. Как показывают примеры, обратные утверждения для (3) и (5) не верны.

2. Первообразные

В математическом анализе решаются две фундаментальные задачи.

Прямая задача. *Дана функция F. Найти скорость ее изменения* f.

Обратная задача. *Дана скорость изменения* f *функции F. Найти функцию F.*

Решение прямой задачи сводится к вычислению производной. Обратная задача решается с помощью операции, обратной дифференцированию. Она называется интегрированием. Этим операциям посвящены дифференциальное и интегральное исчисления. Составлены обширные таблицы производных и интегралов. Разработаны компьютерные программы для их вычисления.

2.1. ***Неопределенный интеграл***. Обратную задачу можно формулировать как задачу о решении дифференциального уравнения $F' = f$. Для аналитических функций дело сводится к алгебраическим операциям. В тексте рассматриваются комплексные переменные, но, когда нет специальных оговорок, сказанное верно и для вещественных при замене кругов интервалами.

2.1.1. ***Единственность коэффициентов ряда***. Рассмотрим степенные ряды $\left(a_k z^k\right)$ и $\left(b_k z^k\right)$ с коэффициентами a_k и b_k, радиусом $r > 0$ и определяемые ими аналитические функции $f : B[0, r] \to \mathbb{C}$ и $g : B[0, r] \to \mathbb{C}$ со значениями

$$f[z] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g[z] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Равенство $f = g$ означает, что $f[z] = g[z]$ при $|z| < r$.

Лемма о коэффициентах. *Равенство $f = g$ верно тогда и только тогда, когда $a_k = b_k$ для всех k.*

□ Если $a_k = b_k$ для всех k, то $f = g$. Нужно доказать обратное утверждение. Пусть $f = g$. Тогда $a_0 = f[0] = g[0] = b_0$ и, следовательно,

$$g[z] - f[z] = z\left(b_1 - a_1 + z\sum_{k=2}^{\infty}\left(b_k - a_k\right)z^{k-2}\right) = 0,$$

$|z| < r$. Сокращение на $z \neq 0$ в последнем равенстве дает

$$b_1 - a_1 + z\sum_{k=2}^{\infty}\left(b_k - a_k\right)z^{k-2} = 0, \ |z| < r.$$

При $z \to 0$, $z \neq 0$ получаем $b_1 - a_1 = 0$. Следовательно,

$$b_2 - a_2 + z\sum_{k=3}^{\infty}\left(b_k - a_k\right)z^{k-3} = 0, \ |z| < r.$$

Возьмем номер $n \geq 1$. Если $b_k - a_k = 0$, $k \leq n$, то

$$b_{n+1} - a_{n+1} + z\sum_{k=n+2}^{\infty}\left(b_k - a_k\right)z^{k-(n+2)} = 0, \ |z| < r.$$

При $z \to 0$, $z \neq 0$ получаем $b_{n+1} - a_{n+1} = 0$. По принципу индукции из сказанного следует, что $b_n - a_n = 0$ и $a_n = b_n$, $n \geq 1$. ■

Эквивалентноя формулировка леммы: *суммы невырожденных степенных рядов равны тогда и только тогда, когда у этих рядов равны коэффициенты при одинаковых степенях*. В частности, если сумма степенного ряда тождественно равна нулю, то все коэффициенты ряда равны нулю.

2.1.2. ***Однородное уравнение***. Рассмотрим степенной ряд $\left(b_k z^k\right)$ с коэффициентами b_k, радиусом $r > 0$ и определяемую им аналитическую функцию $F : B[0, r] \to \mathbb{C}$ со значениями $F[z] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$.

Лемма о постоянных. *Равенство $F' = 0$ верно тогда и только тогда, когда функция F постоянная.*

□ Тот факт, что производная постоянной тождественно равна нулю, следует из определения производной. Обратно, пусть $F' = 0$. Тогда по теореме о почленной дифференцируемости производная есть сумма ряда $\left((k+1)b_{k+1}z^k\right)$, $k \geq 0$. По лемме о коэффициентах из равенства $F' = 0$ следуют равенства $b_{k+1} = 0$, $k \geq 0$, и $F[z] = b_0$, $|z| < r$. Функция F – постоянная. ■

Замечание. Утверждение о том, что *функция имеет тождественно равную нулю производную тогда и только тогда, когда она постоянная*, верно для любых дифференцируемых функций, а не только для аналитических. Но для доказательства нужна теория [Фихтенгольц, 1970].

Следствие. *Решениями однородного уравнения $F' = 0$ являются постоянные и только они.*

Это утверждение является просто переводом леммы о постоянных на язык дифференциальных уравнений.

2.1.3. ***Неоднородное уравнение***. Рассмотрим степенной ряд $\left(a_k z^k\right)$ с коэффициентами a_k, радиусом $r > 0$ и определяемую им аналитическую функцию $f : B[0, r] \to \mathbb{C}$ со значениями $f[z] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Лемма. *Аналитическая функция*

$$F : B[0, r] \to \mathbb{C},$$

являющаяся решением уравнения $F' = f$, имеет значения

$$F[z] = c + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1},$$

где c – произвольное число.

□ Равенство $F' = f$ следует из теоремы о почленной дифференцируемости и равенства для производной степенной функции:

$$F'[z] = \left(c + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \left(z^{k+1} \right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = f[z],$$

при $|z| < r$. Обратно, пусть сумма $F : B[0, r] \to \mathbb{C}$ ряда $\left(b_k z^k\right)$ является решением уравнения $F' = f$. По теореме о почленной дифференцируемости производная F' есть сумма ряда $\left((k+1) b_{k+1} z^k\right)$, $k \geq 0$. По лемме о коэффициентах из равенства $F' = f$ следуют равенства $(k+1) b_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = a_k / (k+1)$, $k \geq 0$. Коэффициент b_0 может быть равен любому числу c. Функция F имеет указанные в условии значения. ■

Возьмем произвольное число c и обозначим F_c функцию со значениями

$$F_c[z] = c + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1}, \ |z| < r.$$

Заметим, что $F_c[0] = c$. По лемме решениями уравнения $F' = f$ являются функции $F = F_c$ и только они. В частности, решением уравнения $F' = f$ является функция $F = F_0$ со значениями $F_0[0] = 0$ и

$$F_0[z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1}, \ |z| < r.$$

Заметим, что $F_0[0] = 0$. Каждая функция $F = F_c$ называется *частным решением* уравнения $F' = f$. Оно выделяется условием $F[0] = c$. А множество $\{F_c : c \in \mathbb{C}\}$ всех решений уравнения $F' = f$ называется его *общим решением*. Общее решение уравнения $F' = f$ принято обозначать $F + \mathbb{C}$, где F – произвольное частное решение уравнения $F' = f$, а $\mathbb{C}$ обозначает множество всех постоянных на рассматриваемой области. Отождествление постоянной с ее значением не приводит к путанице. Возможность выбирать любое частное решение F обеспечивается равенствами

$$F_c = F_0 + c, \ F_c - c = F_0,$$

$$F_a - a = F_b - b, \ F_f - F_b = a - b$$

для любых чисел и постоянных a, b, c. Из равенства $F_c - c = F_0$ следует, что

$$F_c + \mathbb{C} = \{F_c : c \in \mathbb{C}\} = \{F_0 + c : c \in \mathbb{C}\} = F_0 + \mathbb{C}$$

и $F_a + \mathbb{C} = F_0 + \mathbb{C} = F_b + \mathbb{C}$ для любых чисел и постоянных a, b, c.

Равенство $F_a - F_b = a - b$ означает, что $F_a[z] - F_b[z] = a - b$ при $|z| < r$. Этот факт выражает также

Лемма о частных решениях. *Разность любых двух частных решений уравнения $F' = f$ равна постоянной.*

□ Выведем это непосредственно из леммы о постоянных. Пусть $F' = f$, $G' = f$ и $H = G - F$. Тогда $H' = G' - F' = f - f = 0$ и по лемме о постоянных $H = c_0$, $c_0 \in \mathbb{C}$. ■

Замечание. Разность $H = G - F$ частных решений уравнения $F' = f$ является решением однородного уравнения $H' = 0$. Из равенств $G - F = c_0$, $G = F + c_0 \in F + \mathbb{C}$, $F = G - c_0 \in G + \mathbb{C}$ следует равенство $F + \mathbb{C} = G + \mathbb{C}$.

Основной результат этого пункта формулирует

Теорема. *Функция $F = F_c$ является единственным решением уравнения $F' = f$, удовлетворяющим условию $F[0] = c$.*

□ По лемме функции $F = F_c$ является решением уравнения $F' = f$. Равенство $F_c[0] = c$ следует из определения функции F_c. Все остальные решения F отличаются от F_c на постоянную, и поэтому $F[0] \neq F_c[0]$, $F[0] \neq c$. ■

Частные решения F_c уравнения $F' = f$ называются *первообразными* функции f. По определению первообразная есть *функция, производная которой равна данной функции*. Лемма о частных решениях означает, что разность любых двух первообразных является постоянной.

2.1.4. Неопределенные интегралы. Обозначим A множество всех аналитических функций на круге $B[0, r]$ с радиусом $0 < r \leq \infty$ $(B[0, \infty] = \mathbb{C})$. Эти функции образуют алгебру, их линейные комбинации и произведения принадлежат A. Алгебра A

содержит алгебру постоянных $\mathbb{C}$. Для производных будем кроме штриха использовать и другие классические обозначения: $F' = f$ эквивалентно каждому из равенств

$$\partial F = f, \frac{d}{dx}F = f, \ \frac{dF}{dx} = f, \ dF = f\,dx.$$

Когда это нужно, явно отмечаются переменная, по которой производится дифференцирование, и точка, в которой вычисляется производная:

$$\partial_x F[x_0] = f[x_0], \ \frac{dF}{dx}[x_0] = f[x_0].$$

Оператор дифференцирования $\partial : A \to A$ отображает алгебру A на себя: каждая функция $F \in A$ отображается в ее производную $\partial F = f \in A$, и в каждую функцию $f \in A$ отображается любая ее первообразная $F \in A$. В частности, оператор ∂ отображает множество $\mathbb{C}$ всех постоянных в тождественный нуль: $\partial\mathbb{C} = 0$. По лемме п. 2.1.2 производные всех остальных аналитических функций не равны тождественному нулю. Значит, множество $\mathbb{C}$ есть прообраз тождественного нуля: $\partial^{-1}\{0\} = \mathbb{C}$. Точно так же из леммы п. 2.1.3 следует, что прообразом функции $f \in A$ является множество $\partial^{-1}\{f\} = F + \mathbb{C}$ всех ее первообразных, являющихся частными решениями дифференциального уравнения $\partial F = f$. Множество $\partial^{-1}\{f\}$ всех первообразных функции f (общее решение уравнения $\partial F = f$) называют также *неопределенным интегралом* функции f. Операцию ∂^{-1}, обратную дифференцированию ∂, называют *интегрированием* и обозначают $\int$ – стилизованной буквой S. При этой операции образом функции f является ее неопределенный интеграл: $\int f = F + \mathbb{C}$. В классических обозначениях добавляется символ dz, записываются эквивалентные дифференциальные и интегральное равенства:

$$dF = f\,dz, \quad d(F + \mathbb{C}) = f\,dz,$$

$$\int f[z]dz = F[z] + \mathbb{C}.$$

Рассмотрим несколько примеров. В них используются производные, вычисленные в п. 1.2.3.

Пример 1. $f[z] = c$, $\int c\,dz = cz + \mathbb{C}$.

Условие $F[0] = 0$ выделяет первообразную $F_0[z] = cz$ постоянной c.

Пример 2. $f[z] = z$, $\int z\,dz = (z^2/2) + \mathbb{C}$.

Условие $F[0] = 0$ выделяет первообразную $F_0[z] = z^2/2$ тождественной функции z.

Пример 3.

$$f[z] = z^n, \ \int z^n dz = \left(z^{n+1}/(n+1)\right) + \mathbb{C}.$$

Условие $F[0] = 0$ выделяет первообразную $F_0[z] = z^{n+1}/(n+1)$ функции z^n.

Пример 4. $f[z] = e^z$, $\int e^z dz = e^z + \mathbb{C}$.

Условие $F[0] = 1$ выделяет первообразную $F_1[z] = e^z$. А условие $F[0] = 0$ выделяет первообразную $F_0[z] = e^z - 1$ функции e^z.

Пример 5.

$$f[z] = \mathrm{Cos}[z], \ \int \mathrm{Cos}[z]dx = \mathrm{Sin}[z] + \mathbb{C}.$$

Условие $F[0] = 0$ выделяет первообразную $F_0[z] = \mathrm{Sin}[z]$ функции $\mathrm{Cos}[z]$.

Пример 6.

$$f[z] = \mathrm{Sin}[z], \ \int \mathrm{Sin}[z]dz = -\mathrm{Cos}[z] + \mathbb{C}.$$

Условие $F[0] = 1$ выделяетпервообразную $F_1[z] = -\mathrm{Cos}[z]$ функции $\mathrm{Sin}[z]$.

Когда рассматривают веществе*нную переменную, то обычно вместо z и dz* пишут x и dx. Функции в примерах определены на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

2.2. Интеграл Ньютона. Переход от неопределенного интеграла к определенному состоит в выборе какой-нибудь первообразной и вычислении разности ее значений в данных точках. Неопределенный интеграл есть множество функций, а определенный интеграл есть число. Будем называть такой интеграл, определенный как разность первообразных, *интегралом Ньютона*.

Здесь рассматриваются аналитические функции, но сказанное верно и для гораздо более широкого класса функций.

2.2.1. Определение и примеры. Рассмотрим аналитическую функцию $f : B[0, r] \to \mathbb{C}$, ее произвольную первообразную F и точки a, b из круга $B[0, r]$.

Определение. *Разность $F[b] - F[a]$ значений произвольной первообразной F функции f называется интегралом Ньютона от a до b функции f.*

В классических обозначениях это определение выражается формулой

$$\int_a^b f[z]dz = F[b]-F[a].$$

Замечание. Разность $F[b]-F[a]$ не зависит от выбора первообразной F функции f. В самом деле, пусть F, G – две первообразные функции f. Разность $G-F$ равна постоянной: $G-F=c$, $G=F+c$. Поэтому

$$G[b]-G[a]=(F[b]+c)-(F[a]+c)=$$
$$=F[b]-F[a].$$

Для вычисления интеграла Ньютона можно выбирать любую удобную первообразную F подынтегральной функции f.

Из определения следует, что

$$\int_a^a f[z]dz=0,\ \int_b^a f[z]dz=-\int_a^b f[z]dz.$$

Второе равенство выражает изменение знака интеграла при изменении ориентации точек a, b на b, a. Так как $F'=f$, то определяющая интеграл формула дает *правило интегрирования производной*:

$$\int_a^b F'[z]dz = F[b]-F[a].$$

Приведем несколько примеров интегралов, используя найденные в п. 1.1.4 первообразные.

Пример 1.

$$f[z]=c,\ F[z]=z,\ \int_a^b cdz = c(b-a).$$

Пример 2.

$$f[z]=z,\ F[z]=z^2/2,$$
$$\int_a^b zdz=(b^2-a^2)/2.$$

Пример 3.

$$f[z]=z^n,\ F[z]=z^{n+1}/(n+1),$$
$$\int_a^b z^n dz=(b^{n+1}-a^{n+1})/(n+1).$$

Пример 4.

$$f[z]=e^z,\ F[z]=e^z,\ \int_a^b e^z dz = e^b-e^a.$$

Пример 5.

$$f[z]=\mathrm{Cos}[z],\ \int_a^b \mathrm{Cos}[z]dz=\mathrm{Sin}[b]-\mathrm{Sin}[a].$$

Пример 6.

$$f[z]=\mathrm{Sin}[z],\ \int_a^b \mathrm{Sin}[z]dz=\mathrm{Cos}[a]-\mathrm{Cos}[b].$$

Когда рассматривают вещественную переменную, то обычно вместо z и dz пишут x и dx. Функции в примерах определены на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Замечание. Если a, b, c вещественные, $a<b$ и $c>0$, то интеграл в примере 1 равен площади $c(b-a)$ прямоугольника с основанием $[a,b]$ и высотой c. А интеграл в примере 2 при $a=0$, $b>0$ равен площади $b^2/2$ прямоугольного треугольника с катетами b. Связь интегралов с площадями имеет общий характер.

2.2.2. Правила интегрирования. Рассмотрим аналитические функции f, g на круге $B[0,r]$, их произвольные первообразные F, G, числа α, β и точки a, b из круга $B[0,r]$. Сформулируем три общие правила интегрирования, следующие из общих правил дифференцирования.

Правило линейности.

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)dz=\alpha\int_a^b fdz+\beta\int_a^b gdx.$$

□ Функция $h=\alpha f+\beta g$ имеет первообразную $H=\alpha F+\beta G$. Поэтому

$$H[b]-H[a]=\alpha(F[b]-F[a])+$$
$$+\beta(G[b]-G[a]).$$

Это равенство эквивалентно доказываемому. ■

По индукции правило линейности обобщается на любые линейные комбинации интегрируемых функций.

Пример.

$$\int_a^b\left(\sum_{m=0}^n a_m x^m\right)dx=\sum_{m=0}^n a_m\int_a^b x^m dx=$$
$$=\sum_{m=0}^n a_m\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

Для записи правила интегрирования по частям используем дифференциальные обозначения $df=f'dz$, $dg=g'dz$ для производных и введем сокращенное обозначение для разности значений:

$$f[b]g[b]-f[a]g[a]=fg\begin{cases}b\\a\end{cases}.$$

Интегрирование по частям.

$$\int_a^b fdg+\int_a^b gdf=fg\begin{cases}b\\a\end{cases}.$$

□ Формула интегрирования по частям получается интегрированием формулы производной произведения. По правилу дифференцирования произведения верны эквивалентные равенства $(fg)'=fg'+f'g$ и $d(fg)=fdg+gdf$. Интегрирование производной $(fg)'$ дает $f[b]g[b]-f[a]g[a]$ – правую часть доказываемого равенства. Ее равенство левой части следует из линейности интеграла. ■

Эквивалентная формула интегрирования по частям с производными имеет вид

$$\int_a^b f[z]g'[z]dz+\int_a^b g[z]f'[z]dz=$$

$$=f[z]g[z]\begin{cases} b \\ a \end{cases}.$$

Интегрирование по частям эффективно применяется в случаях, когда один из интегралов в левой части вычисляется проще другого.

Пример. Пусть $f[x]=x,\quad g[x]=-\mathrm{Cos}[x]$ и $g'[z]=\mathrm{Sin}[x]$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{Sin}[x]dx-\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Cos}[x]dx=$$

$$=-x\,\mathrm{Cos}[x]\begin{cases} \pi \\ -\pi \end{cases}=2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{Sin}[x]dx=2\pi+\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Cos}[x]dx=$$

$$=2\pi+\mathrm{Sin}[x]\begin{cases} -\pi \\ \pi \end{cases}=2\pi.$$

Пусть функция g определена в некоторой окрестности точки $w_0=f[0]$, содержащей круг $B[w_0,s_0]=\{w:|w-w_0|<s_0\}$ и $|f[z]-f[0]|<$ $<s_0$ при $|z|<r_0$. Тогда на круге $B[0,r_0]$ определена сложная функция $g[f]$ со значениями $g[f][z]=g[f[z]]$, $|z|<r_0$. Возьмем точки a, b из круга $B[0,r_0]$. Для записи формулы замены переменной в интеграле используются дифференциальные обозначения для производных:

$$df[z]=f'[z]dz,\ dG[f][z]=G[f]'_z[z]dz.$$

Замена переменной.

$$\int_a^b g[f[z]]df[z]=G[f[b]]-G[f[a]].$$

□ Формула замены переменной z на $w=f[z]$ в интеграле получается интегрированием формулы производной сложной функции. По правилу дифференцирования сложной функции и определению первообразной G верны эквивалентные равенства

$$G[f]'_z[z]=G'_w[f[z]]f'_z[z]=g[f[z]]f'[z]$$

и

$$dG[f][z]=G[f]'_z[z]dz=g[f[z]]f'[z]dz=$$

$=g[f[z]]df[z]$. Интегрирование производной $G[f[z]]'_z$ дает $G[f[b]]-G[f[a]]$ – правую часть доказываемого равенства. В его левой части записан интеграл функции $g[f[z]]f'[z]$. ■

Формулу замены переменной z на $w=f[z]$ в интеграле подробнее можно записать так:

$$\int_a^b g[f[z]]f'[z]dz=\int_{f[a]}^{f[b]}g[w]dw=$$

$$=G[f[b]]-G[f[a]].$$

Замена переменной эффективно применяется при вычислении интегралов.

Пример. Пусть $f[z]=-z^2$,

$$g[w]=\mathrm{Exp}[w]=e^w \text{ и}$$

$$g[f[z]]=\mathrm{Exp}[-z^2]=e^{-z^2}.$$

Тогда для точек a, b комплексной плоскости при замене $w=f[z]=-z^2$ верны равенства

$$\int_a^b e^{-z^2}zdz=-\frac{1}{2}\int_a^b e^{-z^2}(-2z)dz=$$

$$=-\int_{-a^2}^{-b^2}e^w dw=-\frac{1}{2}e^w\begin{cases} -b^2 \\ -a^2 \end{cases}=\frac{1}{2}\left(e^{-a^2}-e^{-b^2}\right).$$

В частности, при $a=0$ и вещественном b получаем:

$$\int_{-a}^{a}e^{-z^2}zdz=0,\ \int_0^b e^{-z^2}zdz=\frac{1}{2}\left(1-e^{-b^2}\right)\to\frac{1}{2}$$

при $b\to\pm\infty$. Запись $b\to\pm\infty$ означает любое из направлений $b\to\infty$, $b\to-\infty$ или их объединение $|b|\to\infty$.

2.2.3. ***Монотонность интеграла Ньютона***. Рассмотрим вещественные аналитические функции f, g, h на открытом интервале $A\subseteq\mathbb{R}$, их произвольные первообразные F, G, H и точки $a<b$ интервала A. Если $f-g=h$, то по линейности интеграла

$$\int_a^b fdx-\int_a^b gdx=\int_a^b hdx.$$

Пусть $H'[x]=h[x]\geq 0$, $a\leq x\leq b$. Тогда, как было показано в п. 1.2.5, первообразная H возрастает на $[a,b]$, и поэтому

$$\int_a^b hdx=H[b]-H[a]\geq 0,\ \int_a^b fdx\geq\int_a^b gdx.$$

Таким образом, для интеграла Ньютона верно

Правило монотонности. *Интеграл положительной функции положителен. Интегрирование сохраняет неравенство для функций.*

Имея в виду это свойство, интеграл называют *положительным функционалом* (как предел и сумму).

Пример. Пусть $f[x]=1$, $0\le x\le 1$ и $f[x]=e^{-x}$, $x>1$, а $g[x]=e^{-x^2}$, $x\ge 0$. Ясно, что $f[x]\ge g[x]$, $x\ge 0$. Поэтому для любого $b>1$ верны соотношения

$$\int_a^b e^{-x^2}dx \le \int_0^1 dx + \int_1^b e^{-x}dx = 1+e^{-1}-e^{-b}\le 1+e^{-1}.$$

Этот пример понадобится в дальнейшем при вычислении интеграла Пуассона.

2.2.4. Интегрирование аналитических функций. Почленная дифференцируемость степенных рядов позволяет их и почленно интегрировать, и вычислять интегралы аналитических функций.

Рассмотрим степенной ряд $\left(c_k z^k\right)$ с коэффициентами c_k, радиусом $r>0$ и определяемую им аналитическую функцию $f:B[0,r]\to\mathbb{C}$ со значениями

$$f[z]=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,\ |z|<r.$$

Лемма. *Радиус ряда* $\left((k+1)^{-1}c_k z^{k+1}\right)$ *равен радиусу ряда* $\left(c_k z^k\right)$.

□ *Так как*

$(k+1)^{-1}c_k z^{k+1}=z\left((k+1)^{-1}c_k z^k\right)$, *то*

$$\left|z\left((k+1)^{-1}c_k z^k\right)\right|^{1/k}=$$

$$=\lim\left(|z|^{1/k}\right)\lim\left((k+1)^{-1/k}\right)\limsup|c_k|^{1/k}.$$

При $z\ne 0$, как было доказано в [Савельев, 2011а, б], $|z|^{1/k}\to 1$, $(k+1)^{-1/k}\to 1$, $k\to\infty$. Поэтому

$$\limsup\left|z\left((k+1)^{-1}c_k z^k\right)\right|^{1/k}=\limsup|c_k|^{1/k}.$$

Отсюда по формуле Адамара следует равенство радиусов суммируемости степенных рядов $\left((k+1)^{-1}c_k z^{k+1}\right)$ и $\left(c_k z^k\right)$. ■

Возьмем произвольные точки *a*, *b* из круга $B[0,r]$ суммируемости ряда $\left(c_k z^k\right)$ с суммой $f:B[0,r]\to\mathbb{C}$.

Теорема о почленной интегрируемости. *Интеграл от a до b функции f получается почленным интегрированием ряда* $\left(c_k z^k\right)$.

$$\int_a^b f[z]dz=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\int_a^b z^k dz=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right).$$

□ Как было показано в 1.1.3, функция $F_0:B[0,r]\to\mathbb{C}$ со значениями

$$F_0[z]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}z^{k+1},\ |z|<r,$$

является первообразной для *f*, и для любого $n\in N$ верно равенство

$$\int_a^b z^n dz=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}.$$

По определению интеграла

$$\int_a^b f[z]dz=F_0[b]-F_0[a].$$

Из полученных равенств следует равенство теоремы. ■

Примеры почленного дифференцирования в 1.2.3 дают и примеры почленного интегрирования. Рассматриваемые в примерах функции определены на всей комплексной плоскости и точки *a*, *b* произвольны.

Пример 1. Равенство $\int_a^b e^z dz=e^b-e^a$ следует из равенств

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b\frac{z^k}{k!}dz=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^k}{k!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}.$$

Пример 2. Равенство

$$\int_a^b \mathrm{Cos}[z]dz=\mathrm{Sin}[b]-\mathrm{Sin}[a]$$

следует из равенств

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}dz=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(b^{2k+1}-a^{2k+1}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k b^{2k+1}}{(2k+1)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Пример 3. Равенство

$$\int_a^b \mathrm{Sin}[z]dz=-\left(\mathrm{Cos}[b]-\mathrm{Cos}[a]\right)$$

следует из равенств

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}dz=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+2)!}\left(b^{2k+2}-a^{2k+2}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}b^{2k}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}a^{2k}}{(2k)!}.$$

Замечание. Теорема о почленном интегрировании степенных рядов тесно связана с теоремой об их почленном дифференцировании. Эти теоремы можно вывести друг из друга.

2.3. Интеграл Пуассона

Этот классический интеграл и его модификации встречаются при решении самых разных задач. Методы его вычисления тоже представляют интерес.

2.3.1. Исследование подынтегральной функции. Подынтегральной функцией в интеграле Пуассона служит функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ со значениями

$$f[u]=e^{-u^2} \quad (u\in\mathbb{R}).$$

График функции *f* представлен на рис. 3.

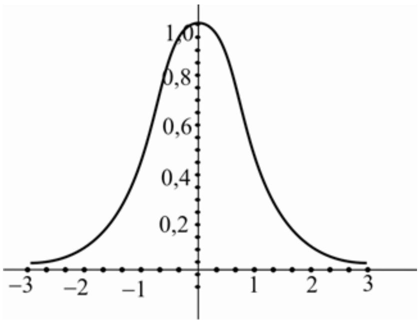

Рис. 3

Исследуем функцию *f*, используя стандартные правила математического анализа. Функция *f* четная: $f[-u]=f[u]$]. Ее график симметричен относительно вертикальной координатной оси. Так как

$$f[u]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{n!}=1-\frac{u^2}{1!}+\frac{u^4}{2!}-\frac{u^6}{3!}+\ldots$$
$$(u\in\mathbb{R}),$$

то функция *f* аналитическая и поэтому дифференцируема сколько угодно раз. Первая и вторая производные функции *f* выражаются равенствами

$$f'[x]=-2xe^{-x^2}, \quad f''[x]=\left(4x^2-2\right)e^{-x^2}.$$

Так как

$$f'[x]>0 \ (x<0), f'[0]>0, \ f'[x]<0$$

($x>0$), то функция *f* возрастает при $x<0$, убывает при $x>0$ и в точке $x=0$ имеет единственный локальный максимум $f[0]=1$. Этот максимум является и глобальным (наибольшим значением функции f). Локальных минимумов и наименьшего значения функция *f* не имеет. Нижняя грань множества ее значений равна 0.

Нулями второй производной f'' являются корни $c=1/\sqrt{2}$ и $-c=-1/\sqrt{2}$ уравнения $4x^2-2=0$. Кроме того,

$$f''[x]<0 \ \ (0<x<c), \ \ f''[x]>0 \ \ (x>c).$$

Следовательно, первая производная f' убывает при $0<x<c$ и возрастает при $x>c$. Значит, $x=c$ есть точка перегиба функции *f*. Вогнутость графика функции переходит в выпуклость. По симметрии $x=-c$ тоже является точкой перегиба функции *f*. В ней выпуклость графика функции переходит в вогнутость. На графике это хорошо видно.

2.3.2. Определение интеграла Пуассона. Интегрируя почленно ряд для функции *f*, получаем ее первообразную

$$f[u]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)(n!)}=$$
$$=u-\frac{u^3}{3(1!)}+\frac{u^5}{5(2!)}-\frac{u^7}{7(3!)}+\ldots$$

Для каждых вещественных чисел $a<b$ интеграл Ньютона для функции *f* выражается равенствами

$$\int_a^b f[u]du=F[b]-F[a]=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(b^{2n+1}-a^{2n+1}\right)}{(2n+1)(n!)}.$$

В частности, при $a=-3$ и $b=3$ этот интеграл приближенно равен $\sqrt{\pi}\approx 1{,}772415$. Для всех $a<-3$ и $b>3$ приближенное равенство $\sqrt{\pi}$ сохраняется. Естественно возникает задача: проверить равенство

$$\lim_{a\to-\infty,\, b\to+\infty}\left(F[b]-F[a]\right)=\sqrt{\pi}.$$

Двойной предел слева и определяет интеграл Пуассона. Этот интеграл выражает площадь подграфика функции *f*. Его конечность объясняется быстрым убыванием функции *f* при стремлении аргумента к минус и плюс бесконечности. В принятых обозначениях проверяемое равенство имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}.$$

Геометрические соображения, связанные с вращением графика функции *f* вокруг вертикальной оси, и равенство $S=\pi r^2$ для площади круга радиуса r объясняют присутствие числа π в проверяемом равенстве.

Было бы интересно доказать конечность предела в нем, используя свойства определяющего первообразную F ряда.

Введем обозначения

$$P=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du,\ K=\int_{0}^{\infty}e^{-u^2}du=\lim_{b\to+\infty}F[b].$$

Так как функция f четная

$$(f[u]=e^{-u^2}=e^{-(-u)^2}=f[-u]),$$

то, используя замену переменной $v=-u$ и правила действий с пределами, получаем равенство $P=2K$:

$$P=\int_{0}^{\infty}e^{-u^2}du+\int_{-\infty}^{0}e^{-u^2}du=\int_{0}^{\infty}e^{-u^2}du+\int_{0}^{\infty}e^{-v^2}dv=2K.$$

Из соотношений в примере п. 2.2.3 следует, что

$$K=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}e^{-x^2}dx\le\lim_{b\to\infty}\left(1+e^{-1}-e^{-b}\right)=1+e^{-1}.$$

Значит, $P\le 2\left(1+e^{-1}\right)<\infty.$

Конечность рассматриваемых пределов позволяет применять правила действий с интегралами также для $a=-\infty$ и $b=\infty$, не выписывая переходы к пределам. Интегралы на бесконечных интервалах, получающиеся из интегралов на отрезках $[a,b]$ с помощью предельных переходов $a=-\infty$ и $b=\infty$, называют *несобственными*.

***2.3.3*. Вычисление интеграла Пуассона (*способ 1*)**. Так как $P=2K$, то достаточно вычислить интеграл K. Введем параметр $t>0$ и сделаем замену $u=tx$. Тогда для каждого $x>0$

$$K=\int_{0}^{\infty}e^{-t^2x^2}xdt.$$

Умножим обе части этого равенства на e^{-x^2} и проинтегрируем их по x на интервале $]0,\infty[$:

$$\int_{0}^{\infty}Ke^{-x^2}dx=\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-t^2x^2}xdt\right)dx. \quad (1)$$

Для интеграла в левой части верны равенства

$$\int_{0}^{\infty}Ke^{-x^2}dx=K\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx=K^2. \quad (2)$$

Для правой части равенства (1), внося не зависящую от t функцию e^{-x^2} во внутренний интеграл, применяя теорему о двойных и повторных пределах и меняя порядок интегрирования по переменным x и t, получаем

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-t^2x^2}xdt\right)dx=\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-\left(1+t^2\right)x^2}xdx\right)dt. \quad (3)$$

Внутренний интеграл легко вычисляется ($u=\left(1+t^2\right)x^2$):

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\left(1+t^2\right)x^2}xdx=\frac{1}{2\left(1+t^2\right)}\int_{0}^{\infty}e^{-u}du=\frac{1}{2\left(1+t^2\right)}.$$

Интегрируя повторно, получаем:

$$\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-\left(1+t^2\right)x^2}xdx\right)dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt. \quad (4)$$

Так как $F'[t]=1/\left(1+t^2\right)$ для $F[t]=$ $=\arctan[t]$, то

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\lim_{b\to\infty}\left(F[b]-F[0]\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\arctan[b]-\arctan[0]=\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-\left(1+t^2\right)x^2}xdx\right)dt=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}, \quad (5)$$

и равенства (1)–(5) дают:

$$K^2=\frac{\pi}{4},\ K=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ P=2K=\sqrt{\pi}.$$

***2.3.4*. Вычисление интеграла Пуассона (*способ 2*)**. Рассмотрим стандартную декартову систему координат (x, y, z) в пространстве $\mathbb{R}^3$ и функцию $f[x,y]=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$, определенную на горизонтальной плоскости $\mathbb{R}^2=\{(x,y,0)\}$. По правилам действий с пределами и интегралами получаются равенства

$$P^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dx\right)dy. \quad (6)$$

Каждое сечение функции f плоскостью $z=c$ $(0<c<1)$, параллельной горизонтальной координатной плоскости, дает окружность радиуса $r[z]=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{-\ln[z]}$ ($0<z<1$). Площадь круга радиуса $r[z]$ равна $S[z]=\pi r^2[z]=-\pi\ln[z]$. Интеграл (6) выражает объем $V[f]$ подграфика $\{(x,y,z):0:<z\le f[x,y]\}$ функции f. Этот объем равен интегралу площадей $S[z]$ сечений:

$$V[t] = \int_0^1 S[z]dz = -\pi\int_0^1 \ln[z]dz.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$\int_0^1 \ln[z]dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln[z]dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln[1] - \varepsilon\ln[\varepsilon] - \int_\varepsilon^1 zd\ln[z] \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 dz = -1.$$

Отсюда и из равенства (6) следует, что

$$P^2 = V[f] = \pi,\ P = \sqrt{\pi}.$$

Связь между площадями сечений и объемами подробно описывается в третьем томе курса Г. М. Фихтенгольца [1970].

Список литературы

Савельев Л. Я. Элементы теории пределов (последовательности) (часть 1) // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2010а. Т. 11, вып. 1. С. 3–23.

Савельев Л. Я. Элементы теории пределов (последователности) (часть 2) // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2010б. Т. 11, вып. 2. С. 3–29.

Савельев Л. Я. Элементы теории пределов (ряды) (часть 1) // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2011а. Т. 12, вып. 1. С. 3–26.

Савельев Л. Я. Элементы теории пределов (ряды) (часть 2) // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2011б. Т. 12, вып. 2. С. 3–35.

Савельев Л .Я. Элементы теории пределов (направленности) // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2012. Т. 13, вып. 1. С. 10–45.

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Ч. 1–3.

Материал поступил в редколлегию 20.02.2012

L. Y. Savelyev

ELEMENTS OF THE THEORY OF LIMITS (DERIVATIVES AND ANTIDERIVATIVES)

The application of the theory of limits in classical differential and integral calculus is described. It continues the author’s series of articles «Elements of the theory of limits» and is closely related to the last article «Elements of the theory of limits (directivity)». The series is intended for beginners studying mathematical analysis. The non-standard delivery of material and a number of detailed examples are illustrated to cause teachers’ interest. The derivative and differential are defined, their main properties and calculation rules are given in brief. The main focus is on analytical functions. Taylor's formula is proved. Antiderivatives and Newton integral are defined, their basic properties and calculation rules are presented. The theorem of term by term integration is proved for analytical functions. Classical Poisson’s integral and methods of its calculation are specified.

Keywords: limit, continuity, derivative, differential, antiderivative, integral, analytical function.