УДК 330.4519.2+330.43

**М. М. Морозова, В. Н. Пырлик**

Институт экономики
и организации промышленного производства СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: morozova.marianna@gmail.com;
vladimir.pyrlik@gmail.com

# УСТОЙЧИВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ЕГО МОДИФИКАЦИИ И ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Представлен обзор устойчивых распределений, их основных модификаций: усеченное, сглажено-усеченное, с облегченными хвостами, модифицированное с облегченными хвостами, Кима – Рачева и некоторые их частные случаи. Приведены методы работы с этими распределениями в модели риск-нейтрального ценообразования производных финансовых активов.

*Ключевые слова*: модификации устойчивого распределения, усеченное устойчивое распределение, сглажено-усеченное устойчивое распределение, модифицированное устойчивое распределение с облегченными хвостами, экспоненциальная модель Леви, ценообразование производных инструментов, европейские опционы.

## Введение

Понятие устойчивые распределения введено Леви в 1925 г. в результате изучения свойств сумм одинаково распределенных случайных величин [1; 2]. Этот класс распределений включает в себя распределения с толстыми хвостами и несимметричными плотностями распределения [2; 3]. Долгое время этим распределениям не находилось применения [1], в силу чего они мало освещались в литературе. Впервые устойчивый закон был использован в астрономии в 1919 г. еще до выхода монографии Леви [1]. Позже эти распределения были использованы в различных областях физики, биологии, геологии [2; 3].

В финансах эти распределения также получили широкое применение. Стохастические процессы с устойчиво распределенными приращениями пришли на смену основанным на нормальном распределении вариантам броуновского движения [2–4], с которыми, начиная с работы Башелье (1900), был связан анализ динамики финансовых показателей (в первую очередь, цен и доходностей активов) в непрерывном времени. Первые аргументы против «нормальности» привел в 1963 г. Мандельброт, показав эмпирически, что динамика цен активов включает в себя дискретную составляющую [3]. Он описывал динамику процесса приращений цены как диффузионный процесс типа Леви с бесконечной дисперсией.

Однако нормальное распределение в силу своей привычности и простоты расчетов продолжало держать первенство в качестве основы различных моделей финансовых данных (регрессионных, стохастических). Знаменитая модель ценообразования опционов, принесшая своим авторам – Блэку, Шоулзу и Мертону премию им. Нобеля, также основывалась на нормальном распределении. Работа с устойчивыми стохастическими процессами в этой сфере существенно осложнилась рядом свойств устойчивых распределений. Прежде всего тем, что они не имеют конечных моментов за исключением одного частного случая – нормального распределения. Кроме того, они не имеют аналитически выражаемых функций плотности вероятности за исключением трех частных случаев (распределение нормальное, Коши, Леви).

Несмотря на это, в теории ценообразования производных финансовых инструментов был разработан ряд моделей, основанных на устойчивых распределениях в качестве закона распределения доходностей базовых активов [2; 4; 5]. Причем некоторые модификации, сохра-

ISSN 1818-7862. Вестник НГУ. Серия: Социально-экономические науки. 2009. Том 9, выпуск 1

няя свойство толстых хвостов, имеют конечный первый и второй моменты [4]. Это сделало допустимым важный в финансах анализ дисперсии.

Такие неотъемлемые свойства финансовых данных, как несимметричность, лептокуртозис и толстые хвосты эмпирических распределений доходностей и прочих финансовых рядов способствовали отходу от нормальности. Нормальное распределение, неспособное уловить эти показатели данных, уступило место таким распределениям с толстыми хвостами, как Лапласа, $t$-Стьюдента [5], обобщенное распределение ошибок (GED) и их несимметричным вариантам [4]. Они хорошо улавливают эмпирические свойства данных, не усложняя расчетов, но не обладают свойством устойчивости к суммированию. Удобство расчетов и формальное соблюдение эмпирических свойств данных – единственный источник мотивации подобного применения этих распределений.

В отличие от несимметричных неустойчивых распределений с толстыми хвостами устойчивое распределение и его модификации можно считать обоснованной заменой нормальному распределению ввиду обобщенной центральной предельной теоремы, доказанной Леви [3].

Данная статья состоит из трех разделов. В первых двух частях описано устойчивое распределение и его модификации; приведены основные параметризации распределений, их функциональные и числовые характеристики. Особое внимание уделено представлению этих распределений как подкласса безгранично делимых. Поскольку в экономическом анализе эти распределения применяются преимущественно в моделировании ценообразования производных финансовых активов, в третьем разделе приведены основные положения теории риск-нейтрального ценообразования производных инструментов и основные методы работы с ней для безгранично-делимых распределений доходностей активов.

## Класс устойчивых распределений

*Простые определения устойчивости.* В современной литературе под устойчивостью принято понимать так называемую устойчивость в широком смысле. Иногда это свойство называют устойчивостью к суммированию. Его определение впервые было сформулировано в работе Леви и Хинчина в 1937 г. [1; 2].

Закон распределения случайной величины $\xi$ является устойчивым, если для любых идентично распределенных и независимых (между собой и $\xi$) случайных величин $\xi_1$, $\xi_2$ найдутся такие константы $a$, $b$, $c$, $d$, что

$$\left(a\xi_1 + b\xi_2\right) \sim \left(c\xi + d\right), \tag{1}$$

где $X \sim Y$ означает, что случайные величины $X$ и $Y$ распределены одинаково.

Строго устойчивым называется закон распределения, для которого (1) выполняется при любых $a$ и $b$, некоторого $c > 0$ и $d = 0$.

Распределение симметрично устойчиво, если оно симметрично вокруг нуля и устойчиво; например, $\xi \sim (-\xi)$.

Существуют различия в терминологии, принятой ранее и в настоящее время. Первоначально устойчивыми называли законы, которые определены выше, как строго устойчивые, а устойчивость в широком смысле называли квази-устойчивостью [2].

Одним из способов определения устойчивости является использование понятия однотипных распределений. Распределения случайных величин $X$ и $Y$ называют однотипными, если существуют такие константы $k > 0$ и $q \in R$, что $X \sim \left(kY + q\right)$. Тогда определение устойчивости будет заключаться в том, что распределения случайных величин $\left(a\xi_1 + b\xi_2\right)$ и $\xi$ однотипны.

*Параметризации устойчивых распределений. Характеристические функции устойчивых распределений.* Приведенные определения устойчивости считаются простыми, они используют термины идентичности законов распределения и удобны для понимания смысла устойчивости к суммированию. Однако они не дают представления об устойчивых распределениях как параметрическом классе. Основное определение устойчивости, позволяющее исследовать аналитически свойства этих распределений, приводит к следующему утверждению.

Закон распределения случайной величины $\xi$ является устойчивым тогда и только тогда, когда $\xi \sim (a\varepsilon + b)$, где $a > 0$, $b \in R$, а $\varepsilon$ – случайная величина, распределение которой задано характеристической экспонентой (отрицательный логарифм характеристической функции):

$$-\ln Ee^{-it\varepsilon} = \begin{cases} |t|^{\alpha}\left[1 - i\beta\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}\,\mathrm{sign}\,t\right], \alpha \neq 1; \\ |t|\left[1 - i\beta\dfrac{2}{\pi}\ln|t|\,\mathrm{sign}\,t\right], \alpha = 1. \end{cases} \quad (2)$$

При $\beta = 0$, $b = 0$ такие распределения симметричны вокруг нуля и представляются характеристической экспонентой

$$-\ln Ee^{-ita\varepsilon} = a^{\alpha}|t|^{\alpha}.$$

Доказательство устойчивости таких распределений привели Леви и Хинчин [1; 2].

Таким образом, класс устойчивых распределений является 4-параметрическим. В настоящее время существует несколько способов обозначения принадлежности закона распределения случайных величин к устойчивым. Хотя наиболее распространенным является обозначение $\xi \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$, авторы данной статьи следуют предлагаемому Ноланом [2] варианту $\xi \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, не выделяя в отдельное множество параметр $\alpha$, и во избежание путаницы с распространенным обозначением нормального распределения $N(\mu, \sigma^2)$, которое частным случаем устойчивого (при $\alpha = 2$, $\beta = 0$). Параметры $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ называют соответственно индексом устойчивости $\alpha$, скошенностью $\beta$, масштабом $\gamma$ и параметром положения (сноса) $\delta$.

В этих обозначениях закон случайной величины $\xi \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ тогда и только тогда, когда

$$\xi \sim \begin{cases} \gamma\left(\varepsilon - \beta\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) + \delta, \alpha \neq 1 \\ \gamma\varepsilon + \delta, \alpha = 1 \end{cases},$$

где распределение случайной величины $\varepsilon$ задано характеристической экспонентой (2). Тогда распределение величины $\xi$ задается характеристической экспонентой

$$-\ln Ee^{-it\varepsilon} = \begin{cases} \gamma^{\alpha}|t|^{\alpha}\left[1 - i\beta\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}\,\mathrm{sign}\,t\left(|\gamma t|^{1-\alpha} - 1\right)\right] + \delta,\ \alpha \neq 1, \\ \gamma|t|\left[1 - i\beta\dfrac{2}{\pi}\ln|t|\,\mathrm{sign}\,t\ln\left(\gamma|t|\right)\right] + i\delta t,\ \alpha = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Характеристическая экспонента (3) является одной из основных параметризаций устойчивого распределения общего вида.

*Устойчивые распределения как подкласс безгранично делимых.* Устойчивые распределения возникают как пределы сумм одинаково распределенных случайных величин. Однако предел не каждой суммы имеет устойчивое распределение. Существует более широкий класс распределений, для которого устойчивые законы представляет собой частный случай.

Распределение случайной величины $\xi$ называют безгранично делимым, если для любого $n \geq 1$ можно найти такие независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$, что $\xi \square \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$.

Очевидно, что устойчивые распределения являются безгранично делимыми, однако последний класс явно шире, поскольку для разных значений $n$ нет никакой связи между последовательностями случайных величин $\{\xi_{nk}\}_{k=1,\ldots,n}$ [6].

Вложенность класса устойчивых распределений в класс безгранично делимых важна в связи с представлением последних характеристической функцией по формуле Леви – Хинчина. Характеристическая экспонента случайной величины $\xi$, имеющей безгранично делимое распределение, имеет вид

$$-\ln Ee^{-it\xi} = -it\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2 - \int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx} - 1 - itx1_{\{|x|\le 1\}})\nu(dx), \tag{4}$$

где $1_{\{|x|\le 1\}} = 1$, если $|x| \le 1$, и 0 иначе. Эта функция и, следовательно, распределение случайной величины $\xi$ однозначно определяются совокупностью параметров ($\mu$, $\sigma^2$, $\nu(dx)$), называемой триплетом Леви.

Если исключить из формулы (4) последнее слагаемое (т. е. положить $\nu(dx) = 0$), то $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$. Поэтому параметры $\mu$ и $\sigma^2$ называют соответственно средним и дисперсией гауссовской составляющей, а функцию $\nu(dx)$ – мерой Леви. Специфицируя различные компоненты триплета Леви, получим различные распределения из класса безгранично делимых.

Особый интерес представляет многомерный случай безгранично делимого распределения. Если случайный вектор $\eta \in R^m$ имеет безгранично делимое распределение, то формула Леви – Хинчина (4) приобретает следующий вид:

$$-\ln Ee^{-i\langle\theta,\eta\rangle} = -i\langle\theta, M\rangle + \frac{1}{2}\langle\theta, \Omega\theta\rangle - \int_{R^m}(e^{i\langle\theta, x\rangle} - 1_m - i\langle\theta, x\rangle 1_{\{|x|\le 1\}})\nu(dx), \tag{5}$$

где ($M$, $\Omega$, $\nu(dx)$) – триплет Леви; $M$ – вектор длины $m$; $\Omega$ – матрица ($m \times m$); $1_m$ – единичный вектор из $R^m$; $\langle x, y\rangle$ – скалярное произведение векторов $x$ и $y$.

В терминах такого представления безгранично делимых распределений частым является определение вида многомерного устойчивого распределения.

Случайный вектор $\eta \in R^m$ имеет многомерное устойчивое распределение, если он имеет безгранично делимое распределение с триплетом Леви ($M$, 0, $\nu$), где

$$\begin{aligned} &\nu(A) = \int_{\omega\in S}\int_0^{\infty} 1_{\{r\omega\in A\}} r^{-(1+\alpha)} dr \lambda(d\omega), \\ &A \in \mathscr{B}, \\ &S = \{\omega \in R^m : |\omega| = 1\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\lambda(.)$ – некоторая ненулевая конечная мера на $S$, $\alpha \in (1; 2)$.

Это представление также называют записью меры Леви в полярных координатах. Как видно из структуры множества $S$, $\omega$ принимают значения $m$-мерных векторов единичной длины (направляющие вектора), а $r \in R^+ \cup \{0\}$ и определяет радиус. Функцию $r^{-(1+\alpha)}dr$ называют радиальной составляющей меры Леви, и она определяет поведение хвостов распределения. Если $\alpha$ убывает, то $r^{-(1+\alpha)}$ возрастает при $r \in (0; 1)$ и убывает при $r > 1$, т. е. при значениях $\alpha$ близких к нулю вероятность больших отклонений от некоего центра больше, чем при $\alpha$ близком к 2 [6].

В одномерном случае ($m = 1$), подстановка (6) в (5) приводит к соответствующему $\alpha \in (0; 2)$ случаю формулы (3) (см., например, [3; 6]).

Представление (6) устойчивого распределения исключает случай $\alpha = 2$ – нормальное распределение. Его спецификация уже была приведена выше, триплетом Леви для нормального распределения является ($M$, $\Omega$, 0).

*Некоторые свойства устойчивых распределений.* Одно из самых важных свойств устойчивых распределений описано в работах Леви, Леви и Хинчина, доказано Золотаревым [1; 2]. Определение законов распределения дается в терминах характеристических функций в основном потому, что за исключением нескольких значений параметров устойчивые распределения не имеют представимых в элементарных функциях плотностей и функций распределения. Исключением являются распределения: нормальное $N(\mu, \sigma^2) = S(2, 0, \sigma/\sqrt{2}, \mu)$, Коши $C(\gamma, \delta) = S(1, 0, \gamma, \delta)$ и Леви *Lévy* $(\gamma, \delta) = S(0{,}5, 1, \gamma, \delta)$.

Значения плотностей и функций распределения можно найти с помощью численных методов [2] на основе аппроксимации обратного преобразования Фурье характеристической функции и численного интегрирования.

Другое важное свойство устойчивых распределений – толстые хвосты. Распределение принято называть имеющим толстые хвосты, если его остаточная вероятность $P(Y > y)$

при росте $y$ убывает медленнее, чем для экспоненциального распределения $E_1$. Доказано, что при $\alpha < 2$ (т. е. за исключением нормального распределения) устойчивые распределения имеют толстые хвосты [2].

Одним из следствий наличия толстых хвостов является то, что не все моменты устойчивых распределений существуют.

*Плотности устойчивых распределений*. Хотя в аналитическом виде функции плотности устойчивых распределений существуют только для нормального, Коши и Леви, функции плотности в каждой точке значения параметров можно получить численно, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-itx] E\exp[-it\xi]dt, \tag{7}$$

где $f_\xi(x)$ – функция плотности распределения вероятности, а $E\exp[-it\xi]$ – характеристическая функция, заданная для устойчивого распределения уравнением (3). Поскольку характеристическая функция принимает комплексные значения, а плотность – вещественные, для численного интегрирования удобно преобразовать выражение (7). Подстановка (3) в (7) показывает, что

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\underbrace{(\gamma^\alpha |t|^\alpha)}_{A(t)} - i\underbrace{(\gamma^\alpha |t|^\alpha \beta \operatorname{sign} t \Phi(\alpha) + xt - \delta t)}_{B(x,t)}\right]dt,$$

где

$$\Phi(\alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\left(|\gamma t|^{1-\alpha} - 1\right), \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\ln|t|\ln\left(\gamma|t|\right), \alpha = 1 \end{cases}. \tag{8}$$

Воспользовавшись Эйлеровским представлением комплексной экспоненты

$$\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$$

и отбросив чисто мнимую часть интеграла, получаем выражение для плотности $f_\xi(x)$ устойчивого распределения $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[A(t)\right]\cos B(x,t)dt,$$

где

$$A(t) = \gamma^\alpha |t|^\alpha,$$

$$B(x,t) = \gamma^\alpha |t|^\alpha \beta \operatorname{sign} t \Phi(\alpha) + xt - \delta t,$$

$\Phi(\alpha)$ определяется (8).

Численная аппроксимация такого интеграла не является сложной задачей, решение ее возможно средствами множества прикладных программ, что позволяет, в частности, применять метод максимального правдоподобия для оценки параметров устойчивого распределения [7].

## Усечение и облегчение хвостов устойчивых распределений

Отсутствие моментов почти у всех устойчивых распределений значительно усложняет работу с ними. Например, отсутствие второго момента исключает возможность анализа динамики волатильности доходностей и делает неприменимым привычный подход к определению степени риска через дисперсию. Кроме того, критикуя подход Мандельброта, ряд исследователей динамики доходностей финансовых активов в конце XX в. отмечали, что хвосты эмпирических распределений доходностей толще, чем у нормального распределения, но не настолько толстые, как у других устойчивых распределений. В связи с этим были предложены различные процедуры по усечению и облегчению хвостов устойчивых распределений.

*Усеченное устойчивое распределение*. Наиболее простой вариант сделать конечным моменты распределения – усечение хвостов. Если распределение случайной величины $\xi$ задано плотностью распределения вероятности $f_\xi(x)$, то соответствующая функция плотности усеченного на отрезке $[a, b]$ распределения имеет вид

$$\overline{f}_{\overline{\xi}}^{[a;b]}(x)=\begin{cases}\dfrac{f_\xi(x)}{\int_a^b f_\xi(t)\,dt}, x\in[a;b]\\ 0, x\notin[a;b]\end{cases}.$$

Преимущество такого распределения состоит в том, что при $a, b \notin \{-\infty, +\infty\}$ оно всегда имеет конечные моменты, при этом, варьируя значения границ отрезка усечения, можно добиться сколь угодно малой величины остаточной вероятности $\left(1-\int_a^b f_\xi(t)dt\right)$.

*Облегчение хвостов. Сглажено-усеченное распределение.* Усеченное на детерминированном отрезке распределение имеет очень ограниченную сферу практического применения, поскольку толстые хвосты говорят о возможности возникновения экстремально больших отклонений (от моды или другого центра). Поэтому исследователи стали рассматривать варианты распределений со сглаженными хвостами. Одним из таких распределений является сглажено-усеченное устойчивое распределение (smoothly truncated stable distribution, STS), предложенное Менном и Рачевым для моделирования динамики доходностей базовых активов на финансовых рынках и вычисления цен некоторых производных инструментов [8].

Если случайная величина $\xi$ $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ и $f_\xi(x)$ – соответствующая функция плотности, а $n(x, \mu, \sigma^2)$ – функция плотности нормального распределения со средним $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$, то случайная величина $\overline{\xi}$ имеет сглажено-усеченное на отрезке $[a_1, a_2]$ устойчивое распределение $STS^{[a_1,a_2]}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, если ее функция плотности распределения вероятности имеет вид:

$$f_{\overline{\xi}}(x)=\begin{cases}n\left(x;\mu_1;\sigma_1^2\right), x<a_1\\ f_\xi(x), x\in[a_1,a_2]\\ n\left(x;\mu^2;\sigma_2^2\right), x>a_2\end{cases},$$

где

$$\mu_i=a_i+(2i-3)\Phi^{-1}(p_i)\sigma_i$$

$$\sigma_i=\frac{n\left(\Phi^{-1}(p_i);0,1\right)}{f_\xi(a_i)},$$

$$p_i=(2i-3)\int_{a_i}^{(2i-3)\infty} f_\xi(x)dx,\ i=1,2,$$

$\Phi(p)$ – функция стандартного нормального распределения.

Выбор параметров $\mu_i$, $\sigma_i$ осуществляется таким образом, чтобы полученная функция $f_\xi(x)$ была непрерывной и обладала свойством плотности, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{\xi}}(x)dx=1$, причем $P(\xi<a_1)=p_1=P(\overline{\xi}<a_1)$ è $P(\xi>a_2)=p_2=P(\overline{\xi}>a_2)$. Авторы распределения показывают в своей работе, что при заданных границах интервала усечения $[a_1, a_2]$ параметры $\mu_i$ и $\sigma_i$ определяются однозначно.

Сглажено-усеченное распределение имеет моменты любого порядка и экспоненциальные моменты и может быть использовано в регрессионном анализе, в том числе для моделирования динамики условной дисперсии. Как и в случае с обычным усеченным распределением, остаточные вероятности $p_i$ могут быть сколь угодно малы.

*Устойчивое распределение с облегченными хвостами*. Устойчивое распределение с облегченными хвостами (tempered stable distribution) получило название от соответствующего ему стохастического процесса с независимыми приращениями – замедленный устойчивый процесс (tempered stable process). Этот термин впервые был введен Росински [9]. До этого процесс использовался в физике под названием усеченное блуждание Леви (truncated Levy flight model). Также частный (одномерный) случай этого распределения известен как CGMY-распределение (Carr, Geman, Madan and Yor), которое было независимо предложено при построении одноименной модели ценообразования опционов, и изначально связь с его многомерным вариантом и устойчивым распределением не акцентировалась [10]. Наиболее полное описание свойств распределения приведено в [9].

Идея «замедления» (tempering) процесса исходит из представления устойчивого распределения в виде частного случая безгранично делимого. Вид хвостов устойчивого распределения определяет возрастающий характер радиальной составляющей $r^{-(1+\alpha)}dr$ меры Леви (6) устойчивого распределения при малых значениях α и больших значениях *r*. В терминах случайных процессов замедление означает снижение вероятности появления больших (по абсолютному значению *r*) скачков путем изменения вида радиальной составляющей меры Леви непосредственно в формуле (6).

Закон распределения вероятности случайного вектора $\eta \in R^m$ называется устойчивым с облегченными хвостами (tempered stable distribution, TS), если он является безгранично делимым с триплетом Леви ($M$, 0, ν), где

$$\begin{aligned}&\nu(A)=\int_{\omega\in S}\int_0^\infty 1_{\{r\omega\in A\}}r^{-(1+\alpha)}q(r,\omega)\,dr\lambda(d\omega)\\&A\in\mathscr{B}\left(R^m\setminus\{0\}\right)\\&S=\left\{\omega\in R^m:|\omega|=1\right\}\end{aligned}\quad, \tag{9}$$

где $q(r,\omega):R^+\times S\to R^+$ вполне монотонная по ω Борелевская функция, причем $\forall\omega\in S\ q(\infty,\omega)=0$. Если к тому же $\forall\omega\in S\ q\left(0^+,\omega\right)=1$, то распределение называют собственным устойчивым с облегченными хвостами (proper TS).

Функцию $q(r, \omega)$ иногда называют функцией замедления [9].

Класс *TS*-распределений содержит подкласс так называемых β-устойчивых распределений, порождаемых (9) при $q(r,\omega)=r^{\alpha-\beta}$ è $\beta>\alpha$. Эти распределения не являются собственными, и все собственные *TS*-распределения не являются устойчивыми ни в каком смысле [4; 9].

Для параметризации *TS*-распределения используется следующее представление функции замедления:

$$q(r,\omega)=\int_0^\infty e^{-rs}Q(ds|\omega),$$

где $\left\{Q(\cdot|\omega)\right\}_{\omega\in S}$ – конечномерное семейство Борелевских мер на (0, ∞). Если $Q(\cdot|\omega)$ удовлетворяет свойствам вероятностной меры, то соответствующее *TS*-распределение является собственным. Тогда вводится понятие спектральной меры ρ(·) *TS*-распределения:

$$\rho(A)=\int_{x\in R^m}1_{\left\{\frac{x}{\|x\|^2}\in A\right\}}\|x\|^\alpha Q(dx),$$

где $A\in\mathscr{B}\left(R^m\setminus\{0\}\right)$, а $Q(\cdot)$ – мера на $R^m$ такая, что

$$Q(A)=\int_{\omega\in S}\int_0^\infty 1_{\{r\omega\in A\}}r^{-(1+\alpha)}Q(dr|\omega)\lambda(d\omega),$$

$$A\in\mathscr{B}\left(R^m\right).$$

Доказано, что *TS*-распределение однозначно задается спектральной мерой ρ и параметром α [9]. Мера Леви такого распределения имеет вид

$$\nu(A)=\int_{x\in R^m}\int_0^\infty 1_{\{\tau x\in A\}}\tau^{(1+\alpha)}e^{-\tau}d\tau\rho(dx), \tag{10}$$

где $A \in \mathscr{B}\left(R^m\right)$, а ρ (·) – мера на $R^m$ такая, что

$$\rho(\{0\}) = 0$$

и

$$\int\limits_{R^m} \min\left\{\|x\|^2, \|x\|^\alpha\right\} \rho(dx) < \infty.$$

Если (9) и (10) представляют одно и то же *TS*-распределение, то меры ρ (·) и *Q* (·) связывает соотношение

$$Q(A) = \int\limits_{R^m} 1_{\left\{\frac{x}{\|x\|^2} \in A\right\}} \|x\|^\alpha \rho(dx).$$

Альтернативная параметризация *TS* (α, ρ) – в терминах характеристической функции, которая имеет вид

$$-\ln Ee^{-i\langle\theta,\eta\rangle} = -\int\limits_{R^m} \Psi_\alpha\left(\langle\theta, x\rangle\right)\rho(dx) - i\langle\theta, b\rangle, \tag{11}$$

где

$$b = E\eta,$$

$$\Psi_\alpha(s) = \begin{cases} \tilde{A}(-\alpha)\left((1-is)^\alpha - 1 + i\alpha s\right), \alpha \neq 1 \\ (1-is)\ln(1-is) + is, \alpha = 1 \end{cases},$$

и либо

$$\alpha \in (1; 2),$$

либо

$$\alpha = 1 \text{ и } \int\limits_{\|x\|>1} \|x\| \ln\|x\| \rho(dx) < \infty,$$

либо

$$\alpha \in (0; 1) \text{ и } \int\limits_{\|x\|>1} \|x\| \rho(dx) < \infty.$$

Причем если

$$\alpha \in (0; 1) \text{ и } \int\limits_{\|x\|\le 1} \|x\| \rho(dx) < \infty,$$

то

$$-\ln Ee^{-i\langle\theta,\eta\rangle} = -\int\limits_{R^m} \Psi^0_\alpha\left(\langle\theta, x\rangle\right)\rho(dx) - i\langle\theta, b^0\rangle, \tag{12}$$

где $b^0 \equiv M$ – вектор сноса, первая компонента триплета Леви, и

$$\psi^0_\alpha(s) = \Gamma(-\alpha)\left((1-is)^\alpha - 1\right).$$

Таким образом, параметризация *TS*-распределения включает спектральную меру $\rho$, индекс устойчивости $\alpha$, математическое ожидание $b$ и обозначается $\eta \sim TS(\alpha, \rho, b)$. В случае, когда одновременно выполняются условия для (11) и (12), снос $b^0$ и математическое ожидание $b$ связывает соотношение

$$b = b^0 + \Gamma(1-\alpha)\int\limits_{R^m} x\rho(dx).$$

Важным свойством *TS*-распределений является то, что они могут иметь конечные моменты любого порядка (в зависимости от выбора меры ρ). Условия валидности параметризаций (11), (12) являются одновременно условиями, гарантирующими существование математического ожидания $b$.

Другое свойство – некоторая устойчивость к суммированию. Если $\eta_i \sim TS(\alpha, \rho_i, b_i)$ – независимые случайные векторы, то $\sum\limits_i \eta_i \sim TS\left(\alpha, \sum\limits_i \rho_i, \sum\limits_i b_i\right)$.

*Распределение KR Кима – Рачева.* Частный случай устойчивого распределения с облегченными хвостами предложен Рачевым и соавторами в работе [4] также для моделирования доходностей базовых активов и последующего вычисления цен производных инструментов и назван распределением *KR* устойчивым с облегченными хвостами (KR tempered stable distribution).

В терминах функции замедления *KR*-распределение является одномерным устойчивым распределением с облегченными хвостами, мера Леви которого имеет вид (9) для $m=1$, с такой функцией замедления, что

$$q(x,1)=(\alpha+p_+)r_+^{-\alpha-p_+}\int_0^{r_+}e^{-x/s}s^{\alpha+p_+-1}ds,$$
$$q(x,-1)=(\alpha+p_-)r_-^{-\alpha-p_-}\int_0^{r_-}e^{-x/s}s^{\alpha+p_--1}ds$$

и такой угловой мерой, что

$$\lambda(1)=\frac{k_+r_+^{\alpha}}{\alpha+p_+},\ \lambda(-1)=\frac{k_-r_-^{\alpha}}{\alpha+p_-}.$$

Тогда спектральная мера этого распределения

$$\rho(dx)=\left(k_+r_+^{-p_+}1_{\{x\in(0;r_+)\}}|x|^{p_+-1}+k_-r_-^{-p_-}1_{\{x\in(-r_-;0)\}}|x|^{p_--1}\right)dx.$$

Характеристическая экспонента *KR*-распределения имеет вид

$$-\ln Ee^{-it\xi}=-H_\alpha(t;k_+,r_+,p_+)-H_\alpha(-t;k_-,r_-,p_-)-it\left(b+\alpha\Gamma(-\alpha)\left(\frac{k_+r_+}{p_++1}-\frac{k_-r_-}{p_-+1}\right)\right), \tag{13}$$

где $\alpha\neq1$, и

$$H_\alpha(t;a,h,p)=\frac{a\Gamma(-\alpha)}{p}\left(F(p,-\alpha,1+p,ith)-1\right),$$

если $\alpha=1$, то

$$-\ln Ee^{-it\xi}=-G_\alpha(t;k_+,r_+,p_+)-G_\alpha(-t;k_-,r_-,p_-)-it\left(b+\left(\frac{k_+r_+}{p_++1}-\frac{k_-r_-}{p_-+1}\right)\right),$$

где

$$G_\alpha(t;a,h,p)=\frac{ath}{2+3p+p^2}\left(thF(2+p,1,3+p,ith)-i(2+p)\ln(1-ith)\right)+$$
$$+\frac{a(ith)^{-p}}{p}\left((p-ith)F_{3,2}(1,1,1-p;2;2;1-ith)-\left(1-(ith)^{-p}\right)\ln(ith)\right),$$

и где $F(\cdot)$ – гипергеометрическая функция; $F_{p,q}(\cdot)$ – обобщенная гипергеометрическая функция, а параметр $b=E\xi$. Параметризация в терминах характеристической функции является основной для *KR*-распределения; если характеристическая функция случайной величины имеет вид (13), то $\xi \sim KR(\alpha,k_+,k_-,r_+,r_-,p_+,p_-,b)$, $\alpha\in(0;2)$, $k_+,k_-,r_+,r_->0$, $b\in R$, $p_+,p_-\in(-\alpha;\infty)\setminus\{1;0\}$.

*Модифицированное устойчивое распределение с облегченными хвостами* (*MTS*). Модифицированный вариант *TS*-распределения был предложен также Рачевым и др. в [11]. Этот одномерный вариант распределения с облегченными хвостами называется модифицированным, так как функция замедления не обладает свойствами, необходимыми для (9). *MTS*-распределение является результатом сглаживания хвостов симметричного устойчивого распределения с помощью функции вида $\sqrt{x}\lambda^{\alpha+1/2}K_{\alpha+1/2}(\lambda|x|)$.

Случайная величина $\xi\in R$ имеет *MTS*-распределение с параметрами $(\alpha,C,\lambda_+,\lambda_-,\gamma)$, если ее распределение безгранично делимо с триплетом Леви $(\mu,0,\nu)$, где

$$\mu=\gamma+C\left(\frac{\Gamma\left(1/2-\alpha\right)}{2^{\alpha+1/2}}\left(\lambda_{+}^{2\alpha-1}-\lambda_{-}^{2\alpha-1}\right)-\lambda_{+}^{\alpha-1/2}K_{\alpha-1/2}\left(\lambda_{+}\right)+\lambda_{-}^{\alpha-1/2}K_{\alpha-1/2}\left(\lambda_{-}\right)\right)$$

$$v\left(dx\right)=C\left(\frac{\lambda_{+}^{\alpha+1/2}K_{\alpha+1/2}\left(\lambda_{+}x\right)}{x^{\alpha+1/2}}1_{\{x>0\}}+\frac{\lambda_{-}^{\alpha+1/2}K_{\alpha+1/2}\left(\lambda_{-}|x|\right)}{|x|^{\alpha+1/2}}1_{\{x<0\}}\right),$$

где $\alpha\in(-\infty;1)\setminus\{1/2\}$, $C,\lambda_{+},\lambda_{-}>0$, $\gamma\in R$; $K_{p}\left(y\right)$ – гиперболическая функция Бесселя. Характеристическая экспонента этого распределения имеет вид

$$-\ln Ee^{-it\xi}=-it\gamma-G_{R}\left(t;\alpha,C,\lambda_{+},\lambda_{-}\right)-iG_{I}\left(t;\alpha,C,\lambda_{+},\lambda_{-}\right),$$

где

$$G_{R}\left(t;\alpha,C,\lambda_{+},\lambda_{-}\right)=\begin{cases}\sqrt{\pi}2^{-\alpha-3/2}C\Gamma(-\alpha)\left(\left(\lambda_{+}^{2}+t^{2}\right)^{\alpha}-\lambda_{+}^{2\alpha}+\left(\lambda_{-}^{2}+t^{2}\right)^{\alpha}-\lambda_{+}^{2\alpha}\right), \alpha\neq 0\\ \sqrt{\pi}2^{-3/2}C\left(\ln\left(\dfrac{\lambda_{+}^{2}}{\lambda_{+}^{2}+t^{2}}\right)+\ln\left(\dfrac{\lambda_{-}^{2}}{\lambda_{-}^{2}+t^{2}}\right)\right), \qquad \alpha=0\end{cases},$$

$$G_{I}\left(t;\alpha,C,\lambda_{+},\lambda_{-}\right)=\frac{tC\Gamma\left(1/2-\alpha\right)}{2^{\alpha+1/2}}\Big(\lambda_{+}^{2\alpha-1}F\left(1,1/2-\alpha,3/2,-t^{2}/\lambda_{+}^{2}\right)-$$
$$-\lambda_{-}^{2\alpha-1}F\left(1,1/2-\alpha,3/2,-t^{2}/\lambda_{-}^{2}\right)\Big).$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\xi\sim MTS\left(\alpha,C,\lambda_{+},\lambda_{-},\gamma\right)$ конечны и имеют следующий вид:

$$E\xi=\gamma+2^{-\alpha-1/2}C\Gamma\left(1/2-\alpha\right)\left(\lambda_{+}^{2\alpha-1}+\lambda_{-}^{2\alpha-1}\right);$$

$$D\xi=\frac{C\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1/2}}\Gamma\left(1-\alpha\right)\left(\lambda_{+}^{2\alpha-2}+\lambda_{-}^{2\alpha-2}\right).$$

Если $\xi^{0}\sim MTS\left(\alpha,C^{0},\lambda_{+},\lambda_{-},\gamma^{0}\right)$, где

$$C^{0}=2^{\alpha+1/2}\left(\sqrt{\pi}\Gamma\left(1-\alpha\right)\left(\lambda_{+}^{2\alpha-2}+\lambda_{-}^{2\alpha-2}\right)\right)^{-1}$$
$$\gamma^{0}=-2^{-\alpha-1/2}C^{0}\Gamma\left(1/2-\alpha\right)\left(\lambda_{+}^{2\alpha-1}+\lambda_{-}^{2\alpha-1}\right),$$

то $E\xi=0$, $D\xi=1$ и распределение называется стандартизированным *MTS* ($\xi^{0}\sim stdMTS\left(\alpha,\lambda_{+},\lambda_{-}\right)$).

Распределение обладает большой гибкостью в описании характерных свойств доходностей финансовых инструментов, а его аналитические свойства делают эффективным его применение в моделях динамики волатильности. См., например, [11].

**Моделирование ценообразования производных активов**

*Модель риск-нейтрального ценообразования производных инструментов.* При вероятностном моделировании финансовый рынок принято рассматривать как последовательность случайных изменений, происходящих за некоторый период времени $[0;T]$ и определенных на пространстве элементарных исходов $(\Omega,\Im)$, где $\Im$ – это все утверждения, которые могут быть сделаны об изменениях цен активов в этот период, а $\Im_{t}$ – информация о рынке, доступная на момент времени $t$. Цены базовых активов следуют неупреждающим процессам $S:[0;T]\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}^{d+1}$, т. е. $S_{t}^{i}(\omega)$ – стоимость $i$-го актива в момент $t$ при реализации элементарного исхода $\omega\in\Omega$; актив $S_{t}^{0}$ является безрисковым денежным потоком с непрерывным начислением процентов по ставке $r$, т. е. $S_{t}^{0}=\exp(rt)$.

Производный инструмент со сроком исполнения $T$ представляется конечной функцией выплат $H(\omega)\in\mathrm{H}$, где $\mathrm{H}$ – множество всех производных инструментов. Процедура, которая приписывает каждому производному инструменту $H(\omega) \in \mathrm{H}$ стоимость $\Pi_t(H)$ в каждый момент времени $t \in [0;T]$, называется правилом ценообразования производных инструментов или оператором оценивания.

В определении стоимости производных инструментов основной является риск-нейтральная формула ценообразования производных инструментов, по которой стоимость $\Pi_t(H)$ определяется дисконтированным условным математическим ожиданием по вероятностной мере $Q(.)$:

$$\Pi_t(H) = \exp\left(r(t-T)\right) E^Q\left[H \mid \Im_t\right]. \tag{14}$$

Мера $Q(.)$ может быть не связана напрямую с истинной вероятностью возникновения рыночных исходов в будущем. Она определяется в момент начала жизни инструментов $t_0 = 0$ и не меняется в будущем, т. е. отражает субъективное представление инвестора о вероятностном развитии рынка на момент оценки опционов и поэтому называется риск-нейтральной мерой рынка.

Чтобы правило (14) удовлетворяло естественным характеристикам цены финансового актива (положительность, независимость от будущих событий, линейность) и описывала рынок производных инструментов без арбитражных возможностей, мера $Q(.)$ должна быть эквивалентна истинной вероятности возникновения рыночных исходов $P(A)$, $A \in \Im$, т. е. эти две вероятностные меры должны иметь одинаковые множества нулевой вероятности [6; 12].

Важным свойством большинства современных рынков финансовых активов, которое должно быть учтено в моделях ценообразования производных инструментов, является неполнота рынка производных активов. Цены торгуемых производных активов формируются таким образом, что не существует портфелей, состоящих только из базовых активов, которые с единичной вероятностью приносят такие же выплаты, как и производные инструменты (невозможно идеальное хеджирование). Невыполнение этого свойства ставило бы под сомнение целесообразность торговли производными инструментами, поскольку их обращение связано, например, с определенными транзакционными издержками, и использование идеальных хеджей было бы более эффективно.

Для неполных рынков существует не единственная вероятностная мера, эквивалентная истинной вероятности возникновения рыночных исходов и, значит, являющаяся подходящим вариантом риск-нейтральной меры $Q(.)$ [12].

Все модели ценообразования производных активов, основанные на безгранично делимых распределениях, за исключением нормального, описывают неполные рынки [6; 12].

*Выбор риск-нейтральной меры неполного рынка*. Построение модели ценообразования производных финансовых активов заключается, прежде всего, в выборе конкретного вида риск-нейтральной меры рынка $Q(.)$, которая должна некоторым образом соответствовать (быть эквивалентной) вероятностному закону распределения цен базовых активов $S_t^i(\omega)$.

Существует несколько альтернативных критериев выбора риск-нейтральной меры, наилучшим образом подходящей для построения правила ценообразования производных инструментов на том или ином рынке. Наиболее распространенным в зарубежных исследованиях является подход, согласно которому выбранная мера должна давать оценки существующих производных инструментов максимально близкие к действующим на рынке ценам [4; 5; 8; 11; 13]. Таким образом, подразумевается, что рынок производных активов работает эффективно, в частности, не создает арбитража.

В идеале если на рынке торгуемы некоторые производные инструменты $\widehat{\mathrm{H}} = \left\{\widehat{H}_i; i = 1,...,h\right\} \subseteq \mathrm{H}$ с соответствующим сроком жизни $T_i$ каждого актива и ценами в каждый момент времени $t$ $\Pi_t^*\left(\widehat{H}_i\right)$, то необходимо выбрать такую риск-нейтральную меру $Q(.)$, что $\forall i = 1, ..., h,\ t \in \left[0; T_i\right]$,

$$\Pi_t^*\left(\widehat{H}_i\right) = \exp\left(r\left(t - T_i\right)\right) E^Q\left[H \mid \Im_t\right]. \tag{15}$$

Такая обратная задача обычно некорректна и может иметь как бесконечно много решений, так и не иметь их вообще [13].

Распространенным методом получения оценки риск-нейтральной меры является метод наименьших квадратов, согласно которому риск-нейтральная мера минимизирует отклонения соответствующих теоретических цен производных инструментов (14) и их фактических рыночных цен:

$$Q^* = \arg\inf_{Q} \sum_{i=1}^{h} w_i \left( \Pi_{t_0}^{*} \left( \hat{H}_i \right) - \Pi_{t_0} \left( \hat{H}_i ; Q \right) \right)^2 . \tag{16}$$

Однако даже в такой постановке решение задачи может оказаться не единственным и чувствительным к исходным данным, при этом различные варианты решения будут давать существенно отличающиеся наборы цен активов по формуле (14). Чтобы добиться единственности и устойчивости решения, в критерий оптимальности (16) добавляют некоторую функцию штрафа, которая должна быть вогнута по мере $Q(.)$ [13; 14]. Одним из распространенных видов функции штрафа является расстояние Кульбака – Лейблера (относительная энтропия), которое отражает степень близости данной вероятностной меры $Q(.)$ к некоторой предварительно выбранной модели $Q_0(.)$. Тогда критерий (16) видоизменяется следующим образом:

$$Q^* = \arg\inf_{Q} \left[ w_0 D_{KL}\left(Q, Q_0\right) + \sum_{i=1}^{h} w_i \left( \Pi_{t_0}^{*} \left( \hat{H}_i \right) - \Pi_{t_0} \left( \hat{H}_i ; Q \right) \right)^2 \right], \tag{17}$$

где $D_{KL}\left(Q, Q_0\right)$ – энтропия меры $Q(.)$ относительно некоторой изначально выбранной меры $Q_0$. Свойства относительной энтропии делают решение задачи (16) устойчивым к исходным данным и единственным [13].

В конечном итоге решение задачи зависит от выбора весов $w_i$, предварительной меры $Q_0$ и параметра $w_0$. Способы выбора этих параметров подробно описаны в [12; 15].

*Оценка стоимости производных инструментов при заданной риск-нейтральной мере.* Решение задач вида (15)–(17) по выбору риск-нейтральной меры требует вычисления цен производных активов по риск-нейтральной формуле (14) для каждого варианта меры $Q(.)$.

По своей сути формула (14) является математическим ожиданием некоторой функции случайной величины с заданным законом распределения, и ее вычисление не представляет труда для некоторых простых вариантов модели ценообразования производных инструментов. В частности, как уже отмечалось, модель Блэка – Шоулза получила широкое распространение, в том числе благодаря аналитической форме решения формулы (14) для опционов колл и пут, которая существует в виде аналитической формы плотности нормального распределения и леммы Ито [6; 12]. Однако когда процесс цен базовых активов подчиняется устойчивому или некоторому модифицированному устойчивому распределению, то аналитического решения формулы (14) не существует, и для каждого варианта меры $Q(.)$ значения цен производных инструментов необходимо находить численными методами.

Вычисление математического ожидания через функцию плотности распределения доходностей базовых активов и численное интегрирование является неэффективной процедурой, и для более простого получения результата принято применять быстрое преобразование Фурье. Существует несколько методов численного нахождения цен некоторых производных инструментов таким способом.

*Метод Карра и Мадана.* Алгоритм был предложен Карром и Маданом в 1998 г. [13; 16]. Для его выполнения необходимо, чтобы цены базовых активов имели конечный момент до некоторого порядка $1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$:

$$\exists \varepsilon > 0: \quad \int_{-\infty}^{\infty} Q(s) \exp\left[ (1+\alpha) s \right] ds < \infty, \tag{18}$$

или в терминах триплета Леви

$$\exists \varepsilon > 0: \quad \int_{|y| \geq 1} v(dy) e^{(1+\alpha) y} < \infty .$$

Функция выплат простого европейского опциона колл имеет вид $H\left(S_T,k\right)=\left(S_T-\exp k\right)^+$, и по формуле (14) в нулевой момент времени его цена задана выражением

$$C(k)=\exp\left(-rT\right)E^Q[(S_T-\exp k)^+].$$

Для вычисления значения цены при заданной цене страйк $k$ преобразование Фурье применяется к так называемой временной стоимости опциона:

$$z_T(k)=\Pi_T\left((S_T-\exp k)^+\right)-\left(1-\exp\left[k-rT\right]\right)^+=$$

$$=\exp\left(-rT\right)E^Q\left[(S_T-\exp k)^+\right]-\left(1-\exp\left[k-rT\right]\right)^+. \tag{19}$$

$$\zeta_T(v)=\mathbf{F}z_T=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ivk}z_T(k)dk. \tag{20}$$

Выражение (20) можно представить в терминах характеристической функции процесса $S_t$, воспользовавшись свойством мартингальности процесса денежного потока $S_t^0=\exp(rt)$ и условием (18). Результат преобразования имеет вид

$$\zeta_T(v)=\exp\left(ivrT\right)\frac{\Phi_T(v-i)-1}{iv(1+iv)}. \tag{21}$$

Условие, накладываемое на мартингал, гарантирует, что числитель равен нулю для $v=0$, а при выполнении (18) числитель становится аналитической функцией, и (21) имеет конечный предел при $v\to 0$. Тогда значение цен опционов можно найти, применив обратное преобразование Фурье:

$$z_T(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-ikv\right]\zeta_T(v)dv. \tag{22}$$

Для этого метода условие (21) является обязательным, но знать точное значение $\varepsilon$ не нужно, что упрощает его применение. Однако алгоритм сходится медленно, поскольку $\Phi_T(z)\to 0$ при $\operatorname{Re} z\to\infty$, и, следовательно, при $v\to\infty$ порядок $\zeta_T(v)$ будет $|v|^{-2}$, и погрешность численной аппроксимации интеграла (22) будет существенной.

Ускорить сходимость можно, заменив временную стоимость (19) гладкой функцией цены страйк. Для этого в выражении (19) вычитаемую внутреннюю стоимость опциона можно заменить на стоимость опциона по модели Блэка – Шоулза, которая является гладкой функцией. Конечная функция будет интегрируемой и гладкой:

$$\tilde{z}_T(k)=\exp\left(-rT\right)E^Q\left[(S_T-\exp k)^+\right]-C_{BS}^{\sigma}(k), \tag{23}$$

где $C_{BS}^{\sigma}(k)$ – цена опциона колл, рассчитанная по модели Блэка – Шоулза с волатильностью $\sigma$. По аналогии (22) соответствующий результат преобразования (23) имеет вид

$$\tilde{\zeta}_T(v)=e^{ivrT}\,\frac{\Phi_T(v-i)-\Phi_T^{\sigma}(v-i)}{iv(1+iv)}, \tag{24}$$

где

$$\Phi_T^{\sigma}(v-i)=\exp\left(-\frac{\sigma^2T}{2}(r^2+iv)\right).$$

Выражение (24) также сходится быстрее, чем любая степень $v$ при $\operatorname{Re} v\to\infty$, и интеграл в обратном преобразовании Фурье будет сходиться очень быстро. Это верно для каждого $\sigma>0$, но в некоторых моделях можно подобрать значение параметра волатильности для формулы Блэка – Шоулза, при котором сходимость будет быстрее.

*Метод Льюиса*. Алгоритм был предложен Льюисом в 2001 г. [13; 16]. В отличие от алгоритма Карра и Мадана, этот метод также предусматривает возможность оценки различных производных активов, а не только обычных опционов колл.

Вместо того, чтобы вычитать что-либо из цены производного инструмента по формуле (14), применяется обобщенное преобразование Фурье (для комплексных значений параметра).

Если для некоторых $a,b\in\mathbb{R}$ и $q\left(u\right)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au} \left| q(u) \right| du < \infty$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bu} \left| q(u) \right| du < \infty ,$$

то обобщенное преобразование Фурье $\mathbf{F}q(z)$ функции $q(u)$ существует и является аналитической функцией для всех $z \in C$ таких, что $a < \operatorname{Re} z < b$ (говорят, что $q(u)$ является Фурье-интегрируемой на интервале $(a; b)$). В пределах этого интервала обобщенное преобразование Фурье может быть обращено интегрированием вдоль прямой линии, параллельной действительной оси:

$$q(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{iw-\infty}^{iw+\infty} e^{-izx} \mathbf{F}q(z) dz, \tag{25}$$

если $a < w < b$.

Для выполнения алгоритма Льюиса необходимо, чтобы существовало обобщенное преобразование Фурье риск-нейтральной меры рынка и функции выплат производного инструмента на некоторых интервалах. При выполнении этого условия можно вычислить обобщенное преобразование Фурье цены производного инструмента методом замены интегралов для каждого $z$ из его интервала Фурье-интегрируемости. В результате получаем

$$\mathbf{F}\Pi(z) = \exp(-rT)\Phi_T(-z)\mathbf{F}\,H\left(\exp(z + rT)\right).$$

Применяя алгоритм быстрого преобразования Фурье, можно вычислить цены производных инструментов из (25).

Например, функция выплат европейского опциона колл является Фурье-интегрируемой в области $\operatorname{Re} z > 1$, и на этом интервале ее обобщенное преобразование Фурье может быть вычислено явно, а обобщенное преобразование Фурье для цены опциона колл существует при $1 < \operatorname{Re} z < \varepsilon$, где $\varepsilon$ – параметр из условия (18) для алгоритма Карра и Мадана. Цену опциона можно вычислить, применив (25):

$$C(x) = \frac{\exp(wx + (1-w)(k - rT))}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iu(k-rT-x)}\Phi_T(-iw - u)\,du}{(iu - w)(1 + iu - w)},$$

где $w \in (1, 1+\alpha)$ – параметр, который необходимо выбрать. Выбор большого $w$ ведет к более медленным темпам затухания в бесконечности и большим погрешностям численного интегрирования, а когда $w$ близко к единице, знаменатель расходится, и ошибка дискретизации становится большой. Для моделей с экспоненциально затухающими хвостами меры Леви $w$ не может быть выбрана априорно и должна регулироваться в зависимости от параметров модели [13].

**Заключение**

Одним из главных обоснований применения нормального распределения в статистическом анализе экономических величин является его свойство устойчивости к суммированию и центральная предельная теорема. Однако при анализе финансовых показателей законы распределения должны учитывать большой и несимметричный разброс данных, т. е. иметь толстые хвосты, острые вершины и быть несимметричными. Для учета этих особенностей в настоящее время часто используются такие распределения, как скошенное *t*-Стьюдетна, обобщенное распределение ошибок и т. д. Однако эти распределения не обладают устойчивостью к суммированию и не существует предельных теорем, согласно которым они могут выступать пределами сумм одинаково распределенных случайных величин.

Более обоснованным является применение (как обобщения нормального) $\alpha$-устойчивого скошенного распределения Леви, которое описывает широкий класс распределений, устойчивых к суммированию, но способных в некоторых параметризациях иметь толстые хвосты и быть несимметричными. Кроме того, этот класс распределений является подклассом безгранично делимых распределений, которые могут быть пределами сумм одинаково распределенных случайных величин (обобщенная центральная предельная теорема).

Большинство двусторонних вариантов устойчивого распределения имеет только первый момент или не имеет их вообще, тогда как в анализе финансовых показателей математическое ожидание и дисперсия имеют очень большое значение. Моменты существуют у модифицированных устойчивых распределений, полученных различными способами облегчения хвостов исходной параметризации (в терминах плотности, в терминах спектрального разложения характеристической функции или меры безгранично делимого распределения). Модификации теряют свойство устойчивости, но большинство из них являются безгранично делимыми и, значит, могут быть обоснованно использованы в статистическом анализе финансовых показателей.

Основной сферой применения этих распределений в экономическом анализе в настоящий момент является теория ценообразования производных финансовых инструментов, где они используются для описания риск-нейтральной меры рынка и вычисления цен производных инструментов. Поскольку функции распределения и плотности для этих распределений не существуют в явном виде, то для повышения эффективности вычислений необходимо использовать специально адаптированные под конкретную модель и распределение алгоритмы численной аппроксимации, основанные главным образом на применении алгоритма быстрого преобразования Фурье в дискретном варианте.

**Список литературы**


1. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.
2. *Nolan J. P.* Stable distributions: models for heavy tailed data. Chapter 1. Introduction to stable distributions. American University, 2004.
3. *Uchaikin V. V.*, *Zolotarev V. M*. Chance and stability: stable distributions and their applications. VSP, 1999.
4. *Kim Y. S.*, *Rachev S. T.*, *Bianhci M. L.*, *Fabozzi F. J.* A New Tempered Stable Distribution and Its Application to Finance / By eds. Georg Bol, Svetlozar T. Rachev, and Reinold Wuerth. Risk Assessment: Decisions in Banking and Finance. Physika Verlag, Springer, 2007.
5. *Mandelbrot B. B.* New methods in statistical economics // Journal of Political Economy. 1963. Vol. 71.
6. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998. Т. 1: Факты. Модели.
7. *Nolan J. P.* Maximum likelihood estimation and diagnostics for stable distributions. American University, 2004.
8. *Rachev S. T.*, *Menn Ch.*, *Fabozzi F. J.* Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions. Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing. John Wiley & Sons, Inc., 2005.
9. *Rosínski J.* Tempering stable process. University of Tennessee, 2006.
10. *Carr P.*, *Geman H.*, *Madan D.*, *Yor M.* The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation // Journal of Business. 2002. Vol. 75.
11. *Kim Y. S.*, *Rachev S. T.*, *Chung D. M.* The Modified Tempered Stable Distribution, GARCH Models and Option Pricing. Technical report, Chair of Econometrics, Statistics and Mathematical Fi-nance School of Economics and Business Engineering University of Karlsruhe, 2006. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.statistik.uni-karlsruhe.de/download/KimRachev Chung.pdf.
12. *Cont R.*, *Tankov P.* Financial Modeling with Jump Processes. Chapman & Hall, CRC, 2003.
13. *Cont R.*, *Tankov P.* Calibration of jump-diffusion option-pricing models: a robust non-parametric approach // Centre de Mathématiques Appliquees CNRS – Ecole Polytechnique F 91128 Palaiseau, France, 2002.
14. *Engl H.*, *Hanke M.*, *Neubauer A.* Regularization of inverse problems. Dordrecht: Kluwer, 1996.
15. *Frittelli M.* The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets // Mathematical Finance. 2000. Vol. 1 (10).

16. *Carr P.*, *Madan D.* Option valuation using the fast Fourier transform // Journal of Computational Finance. 1998. Vol. 2.

17. *Lewis A.* A Simple Option Formula for General Jump-Diffusion and Other Exponential L′evy Processes, 2001. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://optioncity.net/pubs/ExpLevy.pdf.

*Материал поступил в редколлегию 30.11.2008*

**M. M. Morozova, V. N. Pyrlik**

**STABLE DISTRIBUTION, ITS MODIFICATIONS AND FINANCIAL DERIVATIVES PRICING MODEL**

The paper is a theoretical review of stable distribution and its basic modifications (truncated, smoothly truncated, tempered, modified tempered, KR of Kim and Rachev, and some of their particulars). The distributions are presented by giving their main parameterizations and properties. A short review of exponential Levy derivatives pricing model and methods of numerical calculus in it are given as the example of most common in literature field of application for the distribution.

*Keywords*: modified stable distribution, truncated stable distribution, smoothly truncated stable distribution, modified tempered stable distribution, exponential Levy model, derivatives pricing, European options.