УДК 37

Л. Я. Савельев

Специализированный учебно-научный центр
Новосибирского государственного университета
ул. Ляпунова, 3, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: savelev@math.nsc.ru

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Комплексные числа можно определить разными способами. Здесь выбран геометрический способ, связывающий комплексные числа с преобразованиями плоскости. Это позволяет заодно познакомиться и с простейшими элементами матричной алгебры. Исторически комплексные числа возникли в связи с решением алгебраических уравнений, прежде всего квадратных и кубических. Основная теорема алгебры комплексных чисел утверждает, что любое алгебраическое уравнение $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ с комплексными коэффициентами

$a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n$, $(a_n \neq 0,\ n \geq 1)$

имеет комплексное решение x. Этот факт во многом определяет исключительно важную роль комплексных чисел. Для решений квадратных и кубических уравнений даются общие формулы, выражающие эти решения в радикалах (то есть через корни из комбинаций коэффициентов). Есть такие формулы и для решений уравнения 4-й степени. Нильс Абель доказал, что для решений алгебраических уравнений более высоких степеней общих выражений в радикалах не существует.

По-видимому, первым человеком, решившим кубическое уравнение в общем виде, был итальянский математик Никколо Тарталья (1500–1557), который сформулировал и решил следующую задачу, ставшую знаменитой: «Разбить число восемь на два слагаемых так, чтобы результат умножения их произведения на разность был максимальным». Данное Тартальей решение этой задачи является хорошим примером использования алгебраических уравнений при решении аналитических задач.

Комплексным числам, геометрическим преобразованиям и алгебраическим уравнениям посвящена обширная литература. О комплексных и других числах можно прочитать в [Проскуряков, 1951]. Линейные преобразования плоскости и пространства, их матричные представления подробно описаны в [Узков, 1951]. Необходимые сведения из алгебры и доказательство основной теоремы алгебры комплексных чисел есть в [Окунев, 1951; Курош, 1963]. Необходимые сведения из математического анализа содержатся в [Гончаров, 1951; Натансон, 1951]. О решении задач на максимумы и минимумы подробно рассказано в [Тихомиров, 1986]. Доказательство теоремы Абеля есть в [Алексеев, 2001]. Числа, более общие чем комплексные, описаны в [Понтрягин, 1986].

1. Вещественная прямая

Вещественной прямой называется множество $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел с обычными операциями и порядком.

1.1. С каждым вещественным числом α связано преобразование l прямой $\boldsymbol{R}$, при котором точка $\xi \in \boldsymbol{R}$ преобразуется в точку $\alpha\xi \in \boldsymbol{R}$. Преобразование l *линейно*:

$$l(\beta\eta + \gamma\zeta) = \alpha(\beta\eta + \gamma\zeta) =$$
$$= \beta(\alpha\eta) + \gamma(\alpha\zeta) = \beta l(\eta) + \gamma l(\zeta)$$

для каждых $\beta, \gamma \in R$ и $\eta, \zeta \in \boldsymbol{R}$. Число $\alpha = l(1)$ называется *коэффициентом* преобразования l. Сумма $l + m$ преобразований l, m имеет коэффициент $\alpha+\beta$, а их композиция lm – коэффициент $\alpha\beta$:

$$(l+m)(\xi)=\alpha\xi+\beta\xi=(\alpha+\beta)\xi,$$

$$l(m(\xi))=l(\beta\xi)=(\alpha\beta)\xi.$$

Это позволяет отождествить вещественные числа с линейными преобразованиями вещественной прямой: число α отождествляется с преобразованием l, для которого оно служит коэффициентом.

1.2. Линейные преобразования вещественной прямой имеют простой геометрический смысл. Если коэффициент $\alpha=1$, то преобразование l *тождественное*: $l(\xi)=\xi$. Если $\alpha=0$, то l осуществляет *коллапс*: $l(\xi)=0$ и прямая R стягивается в точку 0. Если $0<\alpha<1$, то l является *сжатием*. Если $1<\alpha$, то l является *растяжением*.

При $\alpha=-1$ преобразование l описывает *симметрию* с центром в точке 0, а при любом $\alpha<0$ преобразование l есть композиция этой симметрии с преобразованием, имеющим коэффициент $|\alpha|$.

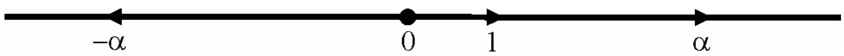

Рис. 1. Виды линейных преобразований прямой *R*

1.3. Точку ξ вещественной прямой можно отождествить с *вектором*, направленным в точку ξ из точки 0. Формально вектор определяется как отображение φ отрезка $[0,1]$ прямой R в прямую R, при котором точка $t\in[0,1]$ отображается в точку $\varphi(t)=t\xi\in\mathrm{R}$. При этом $\varphi(0)=0$ и $\varphi(1)=\xi$. Получается *направленный отрезок* с началом 0 и концом ξ: когда точка t движется от 0 к 1, то вместе с ней точка $\varphi(t)=t\xi$ движется от $\varphi(0)=0$ к $\varphi(t)=\xi$. Образом отрезка $[0,1]$ при отображении φ служит отрезок $\varphi([0,1])=\{t\xi:0\le t\le 1\}\subseteq\boldsymbol{R}$. Замена точек векторами часто делает изложение более наглядным. Нужно отличать направленные отрезки от обычных. Направленный отрезок, который коротко называется вектором, есть отображение. А обычный отрезок есть множество.

2. Вещественная плоскость

Вещественной плоскостью называется множество $\boldsymbol{R}^2$ упорядоченных пар вещественных чисел с операциями сложения и умножения на вещественное число. Пусть $x=(\xi_1,\xi_2)$, $y=(\eta_1,\eta_2)\in\boldsymbol{R}^2$ и $\alpha\in\boldsymbol{R}$. Тогда

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2),\ \alpha x=(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2).$$

2.1. Точку x плоскости $\boldsymbol{R}^2$ можно отождествить с *вектором* направленным в точку x из точки 0. Формально этот вектор определяется как отображение f отрезка $[0,1]$ прямой R в плоскость $\boldsymbol{R}^2$, при котором точка $t\in[0,1]$ отображается в точку $f(t)=tx\in\boldsymbol{R}^2$. При этом $f(0)=0$ и $f(1)=x$. Получается *направленный отрезок* с началом 0 и концом x: когда точка t движется от 0 к 1, то вместе с ней точка $\varphi(t)=tx$ движется от $f(0)=0$ к $f(1)=x$. Образом отрезка $[0,1]$ при отображении f служит отрезок $f([0,1])=\{tx:0\le t\le 1\}\subseteq\boldsymbol{R}^2$. Замена точек векторами часто делает изложение более наглядным. Нужно отличать векторы от их образов, которые являются просто множествами точек.

2.2. Среди векторов плоскости $\boldsymbol{R}^2$ естественно выделяются *стандартные базовые векторы* (рис. 2) $e_1=(1,0)$ и $e_2=(0,1)$. Произвольный вектор $x=(\xi_1,\xi_2)$ плоскости $\boldsymbol{R}^2$ имеет вид: $x=\xi_1e_1+\xi_2e_2$.

Вещественные числа ξ_1 и ξ_2 называются соответственно 1-*й и* 2-*й коор-*

динатами вектора (или точки) x в стандартной базе, составленной из векторов e_1 и e_2.

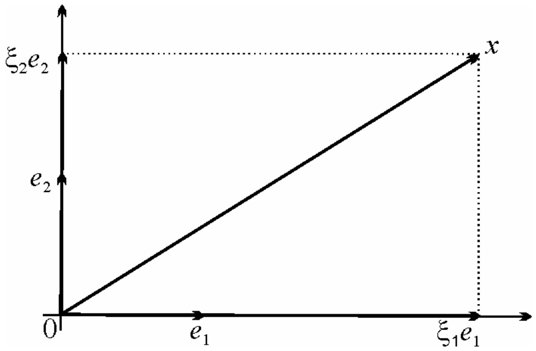

Рис. 2. Вектор x в стандартной базе

2.3. Рассмотрим произвольное линейное преобразование l плоскости $\boldsymbol{R}^2$:

$$l(\alpha x+\beta y)=\alpha l(x)+\beta l(y)$$

для всех $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$ и $x=(\xi_1,\xi_2)$, $y=(\eta_1,\eta_2)\in\boldsymbol{R}^2$. Используя линейность l и стандартное представление $x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2$, получаем:

$$l(x)=\xi_1 l(e_1)+\xi_2 l(e_2).$$

Пусть

$$l(e_1)=\lambda_{11}e_1+\lambda_{12}e_2,\ \ l(e_2)=\lambda_{21}e_1+\lambda_{22}e_2.$$

Подставляя эти значения $l(e_1)$ и $l(e_2)$ в выражение для $l(x)$ и собирая коэффициенты при e_1, e_2 находим

$$l(x)=(\xi_1\lambda_{11}+\xi_2\lambda_{21})e_1+(\xi_1\lambda_{12}+\xi_2\lambda_{22})e_2.$$

Таким образом, линейное преобразование l отображает вектор x с координатами ξ_1,ξ_2 в вектор y с координатами $\eta_1=\xi_1\lambda_{11}+\xi_2\lambda_{21}$, $\eta_2=\xi_1\lambda_{12}+\xi_2\lambda_{22}$. В частности, базовый вектор e_1 с координатами $\xi_1=1$, $\xi_2=0$ отображается в вектор $f_1=l(e_1)$ с координатам $\eta_1=\lambda_{11}$, $\eta_2=\lambda_{12}$. А базовый вектор e_2 с координатами $\xi_1=0$, $\xi_2=1$ отображается в вектор $f_2=l(e_2)$ с координатами $\eta_1=\lambda_{21}$, $\eta_2=\lambda_{22}$. Координаты $\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{21},\lambda_{22}$ образов f_1,f_2 базовых векторов e_1,e_2 полностью определяют линейное преобразование l (рис. 3).

2.4. Для алгебраического описания линейных преобразований плоскости $\boldsymbol{R}^2$ удобно использовать матричные обозначения. Линейному преобразованию l плоскости $\boldsymbol{R}^2$ ставится в соответствие матрица $L=(\lambda_{ij})$, составленная из координат λ_{ij} образов $l(e_i)$ базовых векторов e_i $(i=1,2;\ j=1,2)$. Равенство $y=l(x)$ для векторов $x=(\xi_1,\xi_2)$, $y=(\eta_1,\eta_2)$ эквивалентно матричному равенству $y=xL$. Более подробно это матричное равенство записывается

$$(\eta_1,\eta_2)=(\xi_1,\xi_2)\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}.$$

Умножение матриц производится по правилу *строка на столбец*:

$$\eta_1=\xi_1\lambda_{11}+\xi_2\lambda_{21},\ \ \eta_2=\xi_1\lambda_{12}+\xi_2\lambda_{22}.$$

Сумме $l+m$ преобразований l,m с матрицами $L=(\lambda_{ij})$, $M=(\mu_{ij})$ соответствует матрица $L+M=(\lambda_{ij}+\mu_{ij})$:

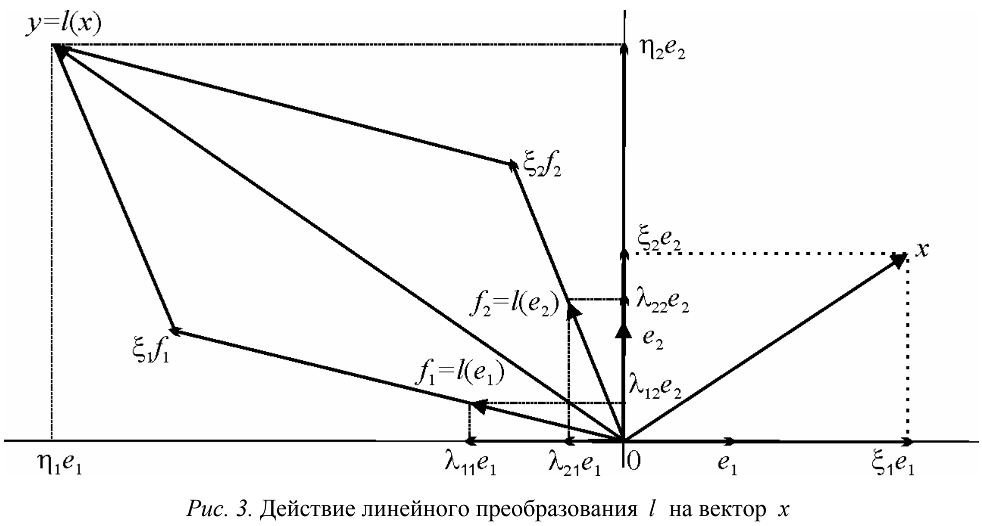

Рис. 3. Действие линейного преобразования l на вектор x

$$L+M=\begin{pmatrix}\lambda_{11}+\mu_{11} & \lambda_{12}+\mu_{12}\\ \lambda_{21}+\mu_{21} & \lambda_{22}+\mu_{22}\end{pmatrix}.$$

Композиции ml преобразований l, m соответствует произведение

$LM=\left(\sum_j \lambda_{ij}\mu_{jk}\right)$ матриц $L,\ M$:

$$LM=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_{11} & \mu_{12}\\ \mu_{21} & \mu_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_{11}\mu_{11}+\lambda_{12}\mu_{21} & \lambda_{11}\mu_{12}+\lambda_{12}\mu_{22}\\ \lambda_{21}\mu_{11}+\lambda_{22}\mu_{21} & \lambda_{21}\mu_{12}+\lambda_{22}\mu_{22}\end{pmatrix}.$$

В самом деле, равенство $(l+m)(x)=$ $=l(x)+m(x)$ эквивалентно матричному равенству

$$xL+xM=x(L+M).$$

А равенство $(ml)(x)=m(l(x))$ эквивалентно матричному равенству

$$(xL)M=x(LM).$$

Матрицы L, M в этом произведении нельзя переставлять, так как для некоторых матриц $ML \neq LM$.

Контрпример

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Замечание. Матрица $L=(\lambda_{ij})$ есть функция переменных $s=i\,j$ определенная на множестве $S=\{11,12,21,22\}$ упорядоченных пар $ij=11,12,21,22$ и принимающая вещественные значения $\lambda_{ij}=\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{21},\lambda_{22}$. Паре ij соответствует число λ_{ij}. Матрицу L удобно записывать в виде таблицы, в которой число λ_{ij} располагается в i-й строке и j-м столбце. Но можно использовать и любую другую запись, выражающую соответствие $ij \to \lambda_{ij}$. Например, $L=(\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{21},\lambda_{22})$. Табличная форма записи выбрана потому, что она позволяет просто формулировать правила действий с матрицами.

2.5. Среди линейных преобразований плоскости $\boldsymbol{R}^2$ выделяются *гомотетии*, при которых вектор x преобразуется в расположенный на той же прямой вектор $l(x)=\alpha x$. Соответствующие матрицы имеют вид.

$$L=\alpha E=\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}.$$

Здесь $\alpha \in \boldsymbol{R}$ – *коэффициент гомотетии*, а E – единичная матрица. Как и для преобразований прямой $\boldsymbol{R}$, $\alpha=1$ соответствует *тождественному* преобразованию *e* плоскости $\boldsymbol{R}^2$, $\alpha=0$ – *коллапсу,* $0<\alpha<1$ соответствует *сжатию*, $1<\alpha$ *растяжению*, $\alpha=-1$ описывает *симметрию* с центром в точке 0. При любом $\alpha<0$ соответствующее преобразование есть композиция симметрии с гомотетией, имеющей коэффициент $|\alpha|$.

Важными линейными преобразованиями плоскости являются *повороты* (рис. 4), при которых базовый вектор e_1 преобразуется в вектор $f_1=l(e_1)=\alpha e_1+\beta e_2$, а базовый вектор e_2 – в вектор $f_2=l(e_2)=-\beta e_1+\alpha e_2$ $(\alpha,\beta\in\mathrm{R},\ \alpha^2+\beta^2=1)$. Соответствующие матрицы имеют вид

$$L=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

Число α называется *косинусом*, а число β – *синусом* угла поворота. Эти числа полностью определяют поворот. Равенство $y=l(x)$ эквивалентно равенствам

$$(\eta_1,\eta_2)=(\xi_1,\xi_2)\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}=$$

$$=(\alpha\xi_1-\beta\xi_2,\beta\xi_1+\alpha\xi_2),$$

$$\eta_1=\alpha\xi_1-\beta\xi_2,\ \eta_2=\beta\xi_1+\alpha\xi_2.$$

Углы между векторами e_1 и f_1, e_2 и f_2, x и y равны углу поворота φ. Угол между векторами f_1 и y равен углу ψ между векторами e_1 и x.

Замечание. Понятие угла и тригонометрические функции косинус и синус здесь не определяются. Они используются только для наглядности. Формально поворот определяется вещественными числами α и β, составляющими его

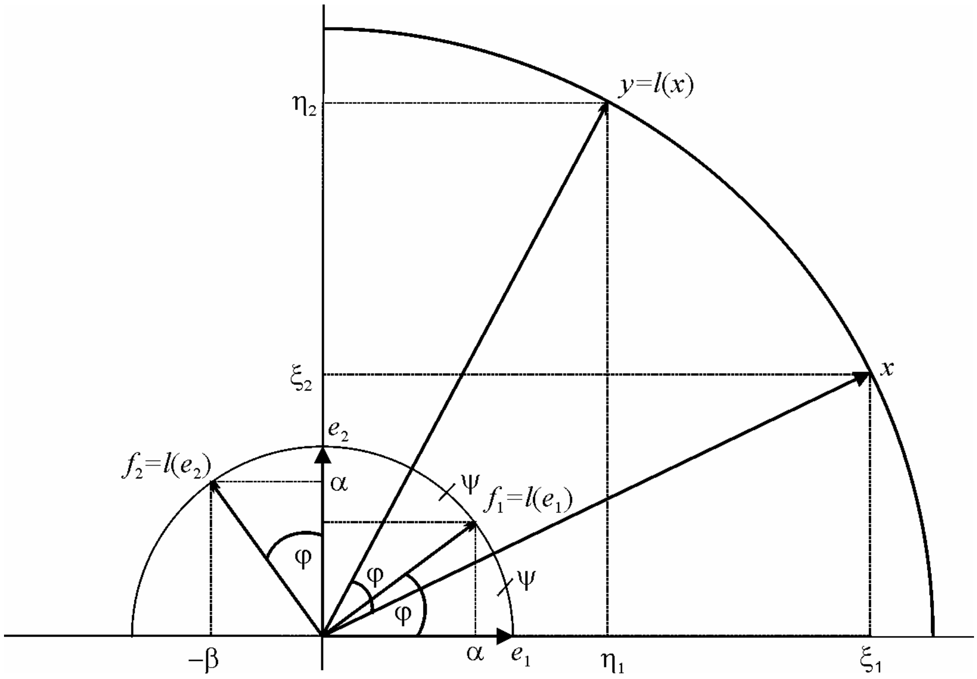

Рис. 4. Действие на вектор x поворота на угол φ с косинусом $\cos\varphi=\alpha$ и синусом $\sin\varphi=\beta$

матрицу и удовлетворяющими условию $\alpha^2+\beta^2=1$. Эти числа можно было бы назвать и как-нибудь иначе, а не косинусом и синусом. Например, *горизонтальным* и *вертикальным*.

Пример 1. Тождественное преобразование e есть поворот на угол $\varphi=0$ с косинусом $\alpha=\cos 0=1$ и синусом $\beta=\sin 0=0$. Его матрица

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Преобразование i, при котором базовый вектор e_1 преобразуется в базовый вектор $e_2=i(e_1)$, а базовый вектор e_2 – в вектор $-e_1=i(e_2)$, является поворотом в положительном направлении (против часовой стрелки) на угол $\varphi=90°$ с косинусом $\alpha=\cos 90°=0$ и синусом $\beta=\sin 90°=1$. Этот угол называется *прямым*. Матрицей для i служит

$$I=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Комплексная геометрия

Естественно рассмотреть сложные преобразования плоскости $\boldsymbol{R}^2$ получающиеся при композициях гомотетий и поворотов. Оказывается, алгебраические действия с этими преобразованиями обладают теми же свойствами, что и действия с вещественными числами. Поэтому такие преобразования можно тоже считать числами, но сложными или *комплексными*. Если отождествить гомотетии плоскости $\boldsymbol{R}^2$ с их коэффициентами, то множество вещественных чисел будет частью множества комплексных чисел.

С помощью комплексных чисел можно решать многие задачи, которые не решаются при использовании только вещественных чисел. В частности, применяя комплексные числа, можно решить любое квадратное уравнение с вещественными или комплексными коэффициентами.

3.1. Рассмотрим произвольные комплексные преобразования l, m плоскости $\boldsymbol{R}^2$, имеющие матрицы

$$l=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ -\delta & \gamma\end{pmatrix}.$$

Здесь $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – произвольные вещественные числа. Каждое из преобразований l, m можно представить в виде суммы некоторой гомотетии и некоторой композиции поворота с гомотетией.

В самом деле, $l=\alpha e+\beta i$, $m=\gamma e+\delta i$, где e – тождественное преобразование, а i – поворот на прямой угол. Соответствующие равенства для матриц имеют вид

$L = \alpha E + \beta I$, $M = \gamma E + \delta I$.

Сумма $l + m$ комплексных преобразований l, m является комплексным преобразованием:

$$l + m = (\alpha + \gamma)e + (\beta + \delta)i,$$

$$L + M = (\alpha + \gamma)E + (\beta + \delta)I = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta + \delta \\ -(\beta + \delta) & \alpha + \gamma \end{pmatrix}.$$

Композиция ml комплексных преобразований l, m тоже является комплексным преобразованием:

$$ml = (\alpha\gamma - \beta\delta)e + (\alpha\delta + \beta\gamma)i,$$

$$LM = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma - \beta\delta & \alpha\delta + \beta\gamma \\ -(\alpha\delta + \beta\gamma) & \alpha\gamma - \beta\delta \end{bmatrix}.$$

Заметим, что замена α на γ и β на δ не меняет результата. Значит, $ml = lm$ и $LM = ML$. Произведение комплексных преобразований плоскости $\boldsymbol{R}^2$ коммутативно. Нетрудно убедится в том, что оно ассоциативно: $n(ml) = (nm)l$ для любых линейных преобразований l, m, n плоскости $\boldsymbol{R}^2$.

Упражнение. Доказать ассоциативность композиции линейных преобразований плоскости $\boldsymbol{R}^2$.

3.2. Для каждого комплексного преобразования $l \neq 0$ существует обратное преобразование $m = l^{-1}$. В самом деле, равенство $ml = e$ эквивалентно равенствам

$$\alpha\gamma - \beta\delta = 1, \ \alpha\delta + \beta\gamma = 0.$$

Умножая первое из этих равенств на α, второе на β и складывая, получаем

$$(\alpha^2 + \beta^2)\gamma = \alpha, \ \gamma = \alpha / (\alpha^2 + \beta^2).$$

Точно так же, используя умножение на β и α, находим

$$(\alpha^2 + \beta^2)\delta = -\beta, \ \delta = -\beta / (\alpha^2 + \beta^2).$$

Таким образом, обратным для l является преобразование

$$l^{-1} = \Delta^{-1}(\alpha e - \beta i), \ \Delta = \alpha^2 + \beta^2.$$

Соответствующая матрица

$$L^{-1} = \Delta^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \Delta^{-1}L^*, \ L^* = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$LL^{-1} = \Delta^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \Delta^{-1}\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Значит, алгебраические действия с комплексными преобразованиями действительно обладают теми же свойствами, что и действия с вещественными числами. Это позволяет назвать такие преобразования комплексными числами, или, для краткости, просто числами.

Замечание. Преобразование $l^* = \alpha e - \beta i$ называется *сопряженным* для $l = \alpha e + \beta i$. Соответствующая матрица

$$L^* = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

получается из матрицы L *транспонированием* недиагональных элементов: β и $-\beta$ меняются местами. В частности, если $l = i$, то $l^* = -i$, $(\alpha = 0, \ \beta = 1)$. Преобразование $l^* = -i$ осуществляет поворот плоскости $\boldsymbol{R}^2$ на прямой угол *в отрицательном направлении* (по часовой стрелке).

Произведение $l \cdot l^* = \Delta e$. Этому равенству соответствуют матричные равенства

$$L \cdot L^* = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix} = \Delta E..$$

3.3. Рассмотрим множество $\boldsymbol{C}$ всех комплексных преобразований плоскости $\boldsymbol{R}^2$, которые мы условились называть *комплексными числами* или, коротко, *числами*. С этими числами, как было показано, можно производить обычные алгебраические действия.

Среди комплексных чисел выделяются гомотетии, которые естественно назвать *вещественными комплексными числам*. Чтобы избежать длинных названий, отождествим гомотетию αe с ее коэффициентом – вещественным числом α. Тем самым отождествим множество $\boldsymbol{R}$ с множеством

$$\boldsymbol{R}e = \{\alpha e : \alpha \in \boldsymbol{R}\} \subseteq \boldsymbol{C}$$

и будем считать, что $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{C}$. Это позволяет вместо *вещественное комплексное число* говорить *вещественное число*. Такое вложение $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{C}$ сохраняет операции:

$$\alpha_1 e + \alpha_2 e = (\alpha_1 + \alpha_2) e,$$

$$(\alpha_1 e)(\alpha_2 e) = (\alpha_1 \alpha_2) e.$$

3.4. Среди невещественных комплексных чисел выделяются *мнимые числа* βi. Это композиции поворота i на прямой угол с гомотетиями βe. Комплексное число i называется *мнимой единицей*. Она отличается от настоящей единицы e тем, что $xe = x$ для любого комплексного числа x, а $xi \neq x$ для некоторых чисел x. В частности, $ei = i \neq e$ и $ii = -e \neq i$. Множество всех мнимых чисел обозначается $\boldsymbol{R}i$. При отождествлении $\boldsymbol{R}$e с $\boldsymbol{R}$ множество $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел можно обозначить $\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}i$. Каждое комплексное число c равно сумме некоторых вещественного числа α и мнимого числа βi:

$$\boldsymbol{C} = \alpha + \beta i, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}i.$$

В контрпримере п. 2.4 вместе с матрицей I рассматриваются две матрицы некомплексных линейных преобразований.

Часто бывает удобно отождествлять комплексные числа с точками или векторами вещественной плоскости: комплексное число $c = \alpha + \beta i$ отождествляется с точкой $(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2$ или вектором $\alpha e_1 + \beta e_2$ (рис. 5).

Разница между комплексными числами и векторами плоскости $\boldsymbol{R}^2$ в том, что для комплексных чисел определено произведение, а для векторов оно здесь не определялось.

<u>*Замечание.*</u> Произвольное линейное преобразование l плоскости $\boldsymbol{R}^2$ определяется четырьмя вещественными числами $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}$, и поэтому его нельзя связать с какой-нибудь точкой $\boldsymbol{R}^2$, которая определяется только двумя вещественными числами.

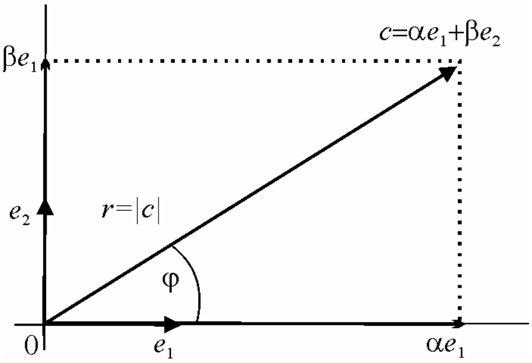

Рис. 5. Отождествление комплексных чисел с векторами

Комплексное преобразование $l = \alpha e + \beta i$ определяется двумя числами α, β и оно естественно связывается с точкой $\boldsymbol{R}^2$, имеющей такие координаты. Это та точка, в которую l преобразует точку $(1,0)$. Преобразование l отождествляется с образом этой точки (или вектора $e = e_1$).

3.5. Каждое невырожденное комплексное преобразование плоскости $\boldsymbol{R}^2$ есть композиция некоторых поворота и гомотетии со строго положительным коэффициентом. В самом деле

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = r^{-1} \begin{pmatrix} \alpha r^{-1} & \beta r^{-1} \\ -\beta r^{-1} & \alpha r^{-1} \end{pmatrix},$$

где $r = \Delta^{-1/2} = \left(\alpha^2 + \beta^2\right)^{1/2} > 0$, и

$$\left(\alpha r^{-1}\right)^2 + \left(\beta r^{-1}\right)^2 = \alpha^2 \Delta^{-1} + \beta \Delta^{-1} = \Delta \Delta^{-1} = 1.$$

Число $|c| = r = \left(\alpha^2 + \beta^2\right)^{1/2}$ называется *абсолютной величиной* комплексного числа $c = \alpha + \beta i$. Если $c = 0$, то $|c| = 0$. Угол поворота φ с косинусом $\cos\varphi = \alpha |c|^{-1}$ и синусом $\sin\varphi = \beta |c|^{-1}$ называется *аргументом* комплексного числа $c \neq 0$. Это угол между векторами e_1 и c. Каждое комплексное число $c \neq 0$ определяется своей абсолютной величиной r и аргументом φ. Используя введенные обозначения, число c можно записать в *тригонометрической форме*:

$$c = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Абсолютная величина r комплексного числа описывает *длину* соответствующего вектора в плоскости $\boldsymbol{R}^2$, а аргумент φ – его *направление*.

<u>*Замечание*</u>. Формально аргумент φ комплексного числа c не был определен, так как не был определен угол между векторами. Эти понятия используются здесь для наглядности (см. рис. 5). Символы $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ введены только как обозначения для чисел αr^{-1} и βr^{-1}. Подробнее об аргументе φ будет рассказано в п. 6.2.

4. Комплексная алгебра

Выпишем правила действий с комплексными числами, не связывая их с преобразованиями плоскости $\boldsymbol{R}^2$.

4.1. Сумма комплексных чисел $l=\alpha+\beta i$ и $m=\gamma+\delta i$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\boldsymbol{R})$ равна комплексному числу $l+m=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$. Таким образом, при сложении комплексных чисел l, m складываются их *вещественные части* α,γ и *мнимые части* βi, δi. Коэффициент мнимой части суммы $l+m$ равен сумме $\beta+\delta$ коэффициентов β,δ мнимых частей чисел l,m.

Если записывать вещественные числа символами Re, а коэффициенты мнимых частей – символами Im, то сумму $x+y$ комплексных чисел x,y можно определить равенствами

$$Re(x+y)=Re(x)+Re(y),$$

$$Im(x+y)=Im(x)+Im(y).$$

4.2. Произведение комплексных чисел можно определить правилом дистрибутивности и таблицей умножения:

	1	i
1	1	i
i	i	-1

В этой таблице 1 обозначает вещественную единицу, а i – мнимую. Для мнимой единицы верно равенство $ii=-1$.

Произведение комплексных чисел $l=\alpha+\beta i$ и $m=\gamma+\delta i$ равно комплексному числу

$$lm=(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\beta\gamma i+\alpha\beta i+\beta\delta ii=$$

$$=(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\alpha\beta+\beta\gamma)i.$$

Для того чтобы вычислить произведение комплексных чисел, нужно только помнить про дистрибутивность и равенство $ii=-1$.

4.3. Каждому комплексному числу $l=\alpha+\beta i$ соответствует *сопряженное* с ним число $l^*=\alpha-\beta i$. Произведение числа l на сопряженное число l^* равно квадрату $|l|^2$ *абсолютного значения* $|l|=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Убедимся в этом еще раз:

$$ll^*=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2-(\beta i)^2=$$

$$=\alpha^2-\beta^2 i^2=\alpha^2+\beta^2=|l|^2.$$

Отсюда следует простое правило вычисления обратного числа $l\neq 0$

$$l^{-1}=|l|^{-2}\,l^*=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{-1}(\alpha-\beta i).$$

Правило деления получается из этого правила и правила произведения (при замене там β на $-\beta$):

$$ml^{-1}=|l|^{-2}\,ml^*=$$

$$=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{-1}\left[(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\alpha\delta-\beta\gamma)i\right].$$

Операция сопряжения выделяет вещественные числа. Они характеризуются *самосопряженностью*: $l=l^*$ тогда и только тогда, когда $Im(l)=0$. В самом деле, пусть $l=(\alpha+\beta i)$ и $\beta=0$. Тогда $l^*=\alpha-0i=\alpha=l$. Обратно, если $l=\alpha+\beta i=l^*=\alpha-\beta i$, то $\beta i=-\beta i$, $2\beta i=0$ и $\beta=0$.

Геометрически сопряжение соответствует *зеркальному отражению* плоскости $\boldsymbol{R}^2$ в горизонтальной прямой $\boldsymbol{R}\mathrm{e}$, отождествленной с вещественной прямой $\boldsymbol{R}$ (рис. 6).

При этом преобразовании точки прямой $\boldsymbol{R}\mathrm{e}$ остаются неподвижными.

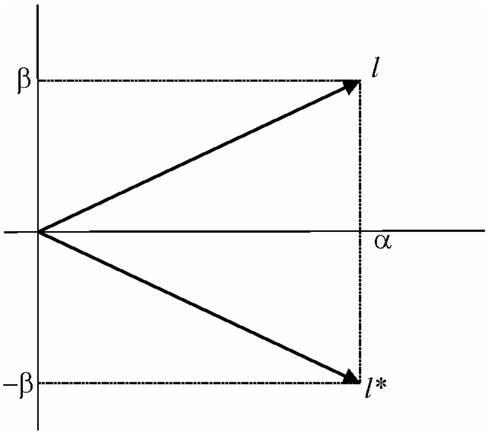

Рис. 6. Сопряжение

Замечание. Сказанное в пунктах 4.1–4.3 показывает, что комплексные числа можно определить алгебраически, не используя геометрических преобразований. Нужно сформулировать только правила действий с комплексными числами. Геометрические преобразования помогают обосновать выбор этих правил и придают им наглядность.

5. Квадратные уравнения

Так как $x^2 \geq 0$ для любого вещественного числа *x*, то уравнение $x^2+1=0$ не имеет вещественных решений. А комплексные решения есть у любого квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами a, b, c $(a \neq 0)$.

5.1. Если $a \neq 0$ то уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$x^2+px+q=0, \tag{2}$$

где $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$. Уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$\left(x^2+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Пусть $d=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$. Если есть комплексные числа $\pm d^{1/2}$ такие, что $\left(\pm d^{1/2}\right)^2=d$, то числа

$$x=-\frac{p}{2}\pm d^{1/2} \tag{3}$$

являются решениями уравнения (2). Таким образом, задача о решении квадратного уравнения с комплексными коэффициентами сводится к задаче об извлечении квадратного корня из комплексного числа.

5.2. Решим эту задачу. Рассмотрим произвольное комплексное число $c=\alpha+\beta i$ и найдем комплексное число $x=\xi+\eta i$ такое, что $x^2=c$. Равенство $x^2=c$ эквивалентно равенствам

$$(\xi+\eta i)(\xi+\eta i)=\left(\xi^2-\eta^2\right)+2\xi\eta i=\alpha+\beta i,$$

$$\xi^2\eta^2=\alpha,\ 2\xi\eta=\beta.$$

Если $\beta=0$, то $\xi=0$ или $\eta=0$ и соответственно $-\eta^2=\alpha$ или $\xi^2=\alpha$. Первое из этих равенств возможно только при $\alpha \leq 0$, а второе – только при $\alpha \geq 0$. Следовательно, при $\alpha \geq 0$ и $\beta=0$ решение $x=\pm\alpha^{1/2}$, а при $\alpha \leq 0$ и $\beta=0$ решение $x=\pm|\alpha|^{1/2} i$. В частности, $(\pm i)^2=-1$ и $(-1)^{1/2}=\sqrt{-1}=i$.

Если $\beta \neq 0$, то $\xi \neq 0$ и $\eta \neq 0$. Тогда $\eta=\frac{\beta}{2\xi}$ и $\xi^2-\frac{\beta^2}{4\xi^2}=\alpha$, $\xi^4-\alpha\xi^2-\frac{\beta^2}{4}=0$.

Откуда $\xi^2=\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}}=\frac{\gamma^2}{2}$, где $\gamma=\sqrt{\alpha+|c|}>0$. Следовательно, $\xi=\pm\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$, $\eta=\pm\frac{\beta}{\gamma\sqrt{2}}$.

(Знаки в выражениях для ξ и η нужно брать одинаковые). Заметим, что

$$\frac{\gamma}{\sqrt{2}}+\left(\frac{\beta}{\gamma\sqrt{2}}\right)i=\frac{\left(\gamma^2+\beta i\right)}{\gamma\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(\alpha+|c|+\beta i\right)}{\gamma\sqrt{2}}=\frac{\left(c+|c|\right)}{\sqrt{2\left(\alpha+|c|\right)}}.$$

Таким образом, каждое комплексное число $c=\alpha+\beta i$ при $\beta \neq 0$ имеет два комплексных корня

$$x=\pm\frac{\left(c+|c|\right)}{\sqrt{2\left(\alpha+|c|\right)}}.$$

Упражнение. Проверить равенство $x^2 = c$, используя правила действий с комплексными числами.

5.3. В п. 5.2 показано, что квадратный корень можно извлечь из любого числа: вещественного положительного, вещественного отрицательного и невещественного комплексного.

Правила вычисления квадратного корня:

Если $c = \alpha \geq 0$, *то* $x^2 = c$ *при* $x = \pm\sqrt{\alpha}$.

Если $c = \alpha \leq 0$, *то* $x^2 = c$ *при* $x = \pm\sqrt{|\alpha|}\, i$.

Если $c = \alpha + \beta i$ и $\beta \neq 0$, *то* $x^2 = c$ *при* $x = \pm\dfrac{\left(c + |c|\right)}{\sqrt{2\left(\alpha + |c|\right)}}$.

Поэтому равенство (3) дает решения квадратного уравнения (2), если вычислять $\pm d^{1/2}$ по указанным правилам.

6. Формула Муавра

Формула Муавра в экспоненциальной полярной форме позволяет дать простые выражения для корней из комплексных чисел. Эта формула доказывается по индукции. Так как принцип индукции очень важен, то здесь ему посвящается отдельный пункт.

6.1. Принцип индукции входит в качестве аксиомы в определение множества натуральных чисел и поэтому не нуждается в доказательстве [1].

Рассмотрим произвольную часть M множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Принцип индукции. *Пусть:*

1) *число* 1 *принадлежит множеству* M;

2) *для каждого натурального числа* n *из того, что оно принадлежит* M *следует, что и число* $n+1$ *принадлежит* M.

Тогда множество M *совпадает с* $\mathbb{N}$.

Используя сокращенную логическую символику можно записать принцип индукции в легко запоминающейся форме:

Пусть:

(1) $1 \in M$,

(2) $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$.

Тогда $M = \mathbb{N}$.

Пояснить принцип индукции можно таким рассуждением. По условию (1) число 1 принадлежит множеству M. По условию (2) отсюда следует, что число 2 принадлежит M. Значит, по этому же условию, число 3 принадлежит множеству M. И так далее. Все натуральные числа принадлежат множеству M.

Для множества M натуральных чисел верен также просто формулируемый принцип наименьшего элемента:

каждое непустое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент.

В частности, наименьшим элементом самого множества натуральных чисел является число 1. Принцип наименьшего элемента эквивалентен принципу индукции. Его можно принять за аксиому и вывести из него принцип индукции. В некоторых доказательствах использовать принцип наименьшего элемента удобнее, чем применять принцип индукции.

Упражнение. Доказать эквивалентность принципа индукции и принципа наименьшего элемента.

6.2. Рис. 5 наглядно поясняет возможность представления комплексного числа в двух формах, *декартовой* и *полярной*:

$$z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Чтобы обеспечить однозначность такого представления нужно выбирать аргумент φ из какого-нибудь интервала длины 2π. Обычно требуют, чтобы $-\pi < \varphi \leq \pi$ или $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Связь между декартовыми и полярными координатами выражается формулами $(r > 0)$: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0,$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & \text{при} \quad x > 0 \quad (-\pi/2 < \varphi < \pi/2 \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi & \text{при} \quad x < 0, \quad y > 0 \quad (\pi/2 < \varphi < \pi) \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi & \text{при} \quad x < 0, \quad y < 0 \quad (-\pi < \varphi < -\pi/2) \\ \pi/2 & \text{при} \quad x = 0, \quad y > 0 \\ -\pi/2 & \text{при} \quad x = 0, \quad y < 0 \\ \pi & \text{при} \quad x < 0, \quad y = 0. \end{cases}$$

Равенство

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R})$$

определяет комплексную функцию вещественной переменной φ, обладающую многими замечательными свойствами. Строгое определение этой функции есть в [5]. Вместо тригонометрической формы записи комплексного числа часто удобнее использовать *экспоненциальную*:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Заметим, что

$$\left|e^{i\varphi}\right| = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Кроме того, при любом целом k

$$e^{i2\pi k} = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k = 1.$$

Одно из главных свойств функции $e^{i\varphi}$ выражает п**равило суммы показателей**:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} \qquad (\alpha,\beta \in \mathbb{R}).$$

Это правило сразу следует из правил суммы углов для косинуса и синуса.

Так как косинус и синус имеют период 2π то и функция $e^{i\varphi}$ имеет такой же период:

$$e^{i(\varphi+2\pi k)} = e^{i\varphi}\cdot e^{i2\pi r} = e^{i\varphi}$$

при любом целом k. Из правила суммы показателей следует также, что

$$e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}.$$

Функция $e^{i\varphi}$ описывает движение точки в координатной плоскости по окружности единичного радиуса с центром в точке 0. А функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ соответственно описывают движение проекций этой точки на вертикальную и горизонтальную оси. Это объясняет равный длине единичной окружности период 2π у функций $e^{i\varphi}$, $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

6.3. **Формула Муавра** является простым следствием правила суммы показателей и правила суммы углов:

$$e^{in\varphi} = \left(e^{i\varphi}\right)^n \qquad \left(n \in \mathbb{N},\ \varphi \in \mathbb{R}\right).$$

□ Рассмотрим множество M натуральных чисел, для которых это равенство верно при всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Ясно, что $1 \in M$. Возьмем произвольное число $n \in \mathbb{N}$ и предположим, что $n \in M$. Докажем, что тогда $n+1 \in M$. В самом деле, по правилу сложения показателей и по сделанному предположению верны равенства

$$\begin{aligned} e^{in\varphi}\cdot e^{i\varphi} &= \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = \\ &= \left(\cos n\varphi\cdot\cos\varphi - \sin n\varphi\cdot\sin\varphi\right) + \\ &+ i\ \left(\cos n\varphi\cdot\sin n\varphi + \sin n\varphi\cdot\cos\varphi\right) = \\ &= \cos\left(n+1\right)\varphi + i\sin\left(n+1\right)\varphi = e^{i(n+1)\varphi}. \end{aligned}$$

По принципу индукции отсюда следует, что $M = \mathbb{N}$. Доказываемое равенство при каждом $n \in \mathbb{N}$ верно для всех $\varphi \in \mathbb{R}$. □

Из формулы Муавра следует в частности, что

$$\left(e^{\frac{i2\pi k}{n}}\right)^n = e^{i2\pi k} = 1$$

при любых натуральном n и целом k.

6.4. Для каждого вещественного числа $r > 0$ существует единственное вещественное число $r^{1/n} > 0$ такое, что $\left(r^{1/n}\right)^n = r$ (см. п. 6.5 и [Курош, 1963. § 52]). Это следует из свойства полноты вещественной прямой. А из основной теоремы алгебры комплексных чисел и теоремы о разложении полинома на линейные множители [Окунев, 1951, § 3] и [Курош, 1963. § 23–24] следует, что для каждого комплексного числа $z \neq 0$ существует равно n комплексных чисел

$z_k(n)$, удовлетворяющих равенству $(z_k(n))^n = z$. Теорема Муавра дает простую общую запись для этих корней n-й степени из комплексного числа $z = re^{i\varphi}$:

$$z_k(n) = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}} \qquad (0 \le k < n).$$

Особую роль играют корни n-й степени из единицы:

$$\varepsilon_k(n) = e^{\frac{i2\pi k}{n}} \qquad (0 \le k < n).$$

В частности, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n) = 1$. Из определений следует, что $z_k(n) = r^{1/2}\varepsilon_k(n)$. Подчеркнем, что здесь $r^{1/n} > 0$ – единственный положительный корень из числа $r > 0$. Так как $|\varepsilon_k(n)| = 1$, то все корни из единицы располагаются на единичной окружности. Они делят ее на равные дуги. По правилу сложения показателей верны равенства

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \cdot \varepsilon,\ \varepsilon_k = \varepsilon^k,$$

$$(\varepsilon_k = \varepsilon_k(n),\ \varepsilon = \varepsilon_1).$$

Все корни ε_k получаются возведением в степень ε.

6.5. Рассмотрим произвольное положительное число c и натуральное число m.

Теорема. *Существует единственное положительное решение уравнения $x^m = c$.*

Если $c = 0$, то $x = 0$ является единственным решением. Поэтому достаточно доказать теорему для случая $0 < c < 1$. В самом деле, если $c = 1$, то $x_0 = 1$. А решение уравнения $x^m = c > 1$ сводится к решению уравнения $y^m = \left(\frac{1}{x}\right)^m = \frac{1}{c} < 1$. Для доказательства применим метод деления пополам.

Лемма 1 (о единственности решения). *Если $x_1^m = x_2^m = c$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 = x_2$.*

□ Если $x_1^m = x_2^m = c$, то $x_1^m - x_2^m = c - c = 0$ и, как легко индуктивно проверить,

$$(x_1 - x_2) \cdot p(x_1, x_2) = 0,$$

$$p(x_1, x_2) = x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x_2 + \ldots$$
$$\ldots + x_1 x_2^{m-2} + x_2^{m-1} > 0,$$

при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Следовательно $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 = x_2$. □

Лемма 2 (о существовании решения). *Существует число $x_0 > 0$ такое, что $x_0^m = c$.*

□ Пусть $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $x_1 = 1/2 = (a_1 + b_1)/2$. Если $x_1^m = c$, то $x_0 = x_1$.

Если $x_1^m < c$, то рассмотрим отрезок $[a_2, b_2] = [x_1, b_2]$. Если $x_1^m > c$, то рассмотрим отрезок $[a_2, b_2] = [a_1, x_1]$. В любом случае длина отрезка $[a_2, b_2]$ равна $1/2^2$. Возьмем его середину $x_2 = (a_2 + b_2)/2$. Если $x_2^m = c$, то $x_0 = x_2$. Если $x_2^m < c$, то рассмотрим отрезок $[a_3, b_3] = [x_2, b_2]$. Если $x_2^m > c$, то рассмотрим отрезок $[a_3, b_3] = [a_2, x_2]$. В любом случае длина отрезка $[a_3, b_3]$ равна $1/2^3$. Продолжая этот процесс индуктивно определим убывающую последовательность отрезков $[a_n, b_n]$ с длинами $1/2^n$ таких, что $a_n^m \le c \le b_n^m$. Так как $0 \le b_n \le 1$, то $b_n^m \le b_n$ и поэтому $a_n \le c \le b_n^m \le b_n$. Следовательно

$$0 \le b_n^m - c \le b_n - a_n = 1/2^n \to 0 \quad \text{и} \quad b_n^m \to c$$

$(n \to \infty)$. Вместе с тем вследствие полноты вещественной прямой последовательность (b_n) сходится к общей для всех отрезков $[a_n, b_n]$ точке b: $b_n \to b$. Предел произведения сходящихся последовательностей равен произведению их пределов и поэтому $b_n^m \to b^m$ $n \to \infty$. Отсюда следует, что $b^m = c$ и $x_0 = b$. □

Теорема о корне сразу следует из доказанных лемм. Вычисления методом деления пополам дают хорошую точность уже при небольшом количестве делений.

<u>*Замечание.*</u> Свойство полноты вещественной прямой выражается разными способами. Один из самых удобных – использовать в качестве аксиомы утверждение о том, что каждая стягивающаяся последовательность отрезков

прямой стягивается в некоторую общую точку. Предварительно дается определение предела последовательности вещественных чисел и определение стягивающейся последовательности отрезков. Последовательность отрезков $[a_n, b_n]$ называется *стягивающейся*, если

$$a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \quad (n \ge 1)$$

и $b_n - a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Для стягивающейся последовательности верно.

Утверждение. *Существует единственная точка* c, *принадлежащая каждому отрезку* $[a_n, b_n]$.

Другими словами, если a_n, b_n $(a_n < b_n)$ – концы отрезков стягивающейся последовательности, то для некоторой единственной точки c неравенства $a_n \le c \le b_n$ верны при всех $n \ge 1$. Это утверждение в одних определениях вещественной прямой принимается за аксиому, а в других выводится из принятых там аксиом. Примером стягивающейся последовательности отрезков [Проскуряко, 1951. § 27] служит последовательность, получающаяся методом деления пополам.

Рациональная прямая неполна и для нее сформулированное утверждение не верно.

<u>*Упражнение.*</u> Зная теорему Пифагора, соотношения между длинами катетов, гипотенузы и суммы длин катетов, методом деления пополам вычислить с точностью до 10 знаков длину диагонали квадрата со стороной длины 1.

7. Формула Кардано

Рассмотрим кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{4}$$

с комплексными коэффициентами a, b, c, d. Предполагается, что $a \ne 0$ и поэтому уравнение (4) эквивалентно уравнению

$$x^3 + ex^2 + fx + g = 0,$$

где $e = b/a$, $f = c/a$, $g = d/a$. Подстановка $x = y - e/3$ приводит к эквивалентному уравнению

$$y^3 + py + q = 0, \tag{5}$$

где $p = f - e^2/3$, $q = 2e^3/3^3 - fe/3 + g$.

Для решения *канонического* уравнения (5) применяется искусственный прием, позволяющий свести решение этого кубического уравнения к решению некоторого квадратного уравнения. Результат описывается формулой Кардано.

7.1. Подстановка $y = u + v$ превращает уравнение (5) в уравнение

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0. \tag{6}$$

Равенство (6) верно, если верны равенства

$$u^3 + v^3 = -q, \; uv = -p/3. \tag{7}$$

По формулам Вьета [3, § 8] равенства (7) верны для решений $z_1 = u^3$ и $z_2 = v^3$ квадратного уравнения

$$z^2 + qz - (p/3)^3 = 0. \tag{8}$$

Значит

$$u^3 = -q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3},$$

$$v^3 = -q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}.$$

Обозначим $\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3$ дискриминант уравнения (8) и u_k – кубические корни из u^3 $(k = 0, 1, 2)$, выбрав корень u_0 произвольно. Заметим, что

$$u_k = u_0 \varepsilon^k, \quad \varepsilon = e^{i2\pi/3} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Из равенств (7) находятся соответствующие корни для v^3:

$$v_0 = -u_0^{-1} p/3,$$

$$v_1 = -u_1^{-1} p/3 = \left(-u_0^{-1} p/3\right)\varepsilon^{-1} = v_0 \varepsilon^2,$$

$$v_2 = -u_2^{-1} p/3 = \left(-u_0^{-1} p/3\right)\varepsilon^{-2} = v_0 \varepsilon,$$

(так как $\varepsilon^3 = 1$, то $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^2$, $\varepsilon^{-2} = \varepsilon$).

7.2. Таким образом, решения уравнения (5) выражаются равенствами

$$u_k = u_0 \varepsilon^k + v_0 \varepsilon^{3-k} \qquad (k = 0, 1, 2) \tag{9}$$

Дискриминант $\Delta = (q/1)^2 + (p/3)^3$ уравнения (8) называют также дискриминантом уравнения (5). Он входит в объединяющее решения (9) равенство

$$y = (-q/2 - \sqrt{\Delta})^{1/3} + (-q/2 + \sqrt{\Delta})^{1/3}$$

которое называется *формулой Кардано.*

Заметим, что

$$e^{i2\pi/3} = \cos(2\pi/3) + \sin(2\pi/3) =$$

$$= -1/2 + i\sqrt{3}/2.$$

Поэтому равенства (9) эквивалентны равенствам

$$y_0 = u_0 + v_0,$$

$$y_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} + i\frac{u_0 - v_0}{2}\sqrt{3}, \qquad (10)$$

$$y_2 = \frac{u_0 + v_0}{2} - i\frac{u_0 - v_0}{2}\sqrt{3}.$$

Равенства (10) удобны для вычислений.

Пример. Решим уравнение

$$x^3 + 15x + 124 = 0.$$

Здесь $p = 15$, $q = 124$. Следовательно $u^3 = 1$, $u_k = e^{i2\pi k/3}$ $(k = 0, 1, 2)$. Пользуясь равенствами $uv = -p/3 = -5$, $e^{i2\pi/3} = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ находим $v_0 = -5$, $v_1 = 5/2 + i5\sqrt{3}$, $v_2 = 5/2 - i5\sqrt{3}$. Откуда получаются решения

$$x_0 = -4,\ x = 2 + i3\sqrt{3},\ x = 2 - i3\sqrt{3}.$$

7.3. Пусть $p \neq 0$, $q \neq 0$. Тогда, если $\Delta = 0$, то среди решений уравнения (5) есть два равных решения, а если $\Delta \neq 0$, то равных решений нет. В случае вещественных p, q при $\Delta > 0$ среди решений уравнения (5) есть только одно вещественное. При $\Delta = 0$ все три решения уравнения (5) вещественные, причем два из них равные. При $\Delta < 0$ уравнение (5) имеет три различных вещественных решения. Все эти случаи подробно описаны в [Окунев, 1963. § 8]. Так как других возможностей для решений нет, то верны и обратные утверждения. В частности, если все три решения уравнения (5) вещественные, причем два из них равные, то $\Delta = 0$. Докажем это.

Если у уравнения (5) есть два равных решения $\alpha > 0$ и одно решение $\beta < 0$, то дискриминант можно найти, используя формулы Виета, связывающие эти решения с коэффициентами уравнения. Имеем:

$$2\alpha + \beta = 0,\ \beta = -2\alpha,$$

$$p = \alpha\alpha + 2\alpha\beta = -3\alpha^2,\ q = \alpha^2\beta = -2\alpha^3.$$

Следовательно,

$$\Delta = \left(q/2\right)^2 + \left(p/3\right)^3 = \alpha^6 - \alpha^6 = 0.$$

8. Задача Тартальи

Эта задача была сформулирована во введении. Так как в ней идет речь о максимальном значении, то она имеет аналитический характер, и для ее решения нужны некоторые сведения из математического анализа. Все они есть в [Курош, 1963; Гончаров, 1951], но их можно найти и в любом учебнике по математическому анализу.

8.1. Естественно сформулировать задачу Тартальи не для числа 8, а для произвольного числа $c > 0$.

Задача. Разбить число $c > 0$ на слагаемые a, b $(a > b)$ так, чтобы произведение $ab(b - a)$ было наибольшим.

Решение этой задачи можно свести к решению кубического уравнения. Пусть $a - b = x$. Так как по условию $a + b = c$, то $a = (c + x)/2$, $b = (c - x)/2$, $0 \le x \le c$.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = (c + x)(c - x)x \quad (-\infty < x < \infty).$$

Ясно, что $f(-c) = f(0) = f(c) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x < -c$, $f(x) < 0$ при $-c < x < 0$, $f(x) > 0$ при $0 < x < c$, $f(x) < 0$ при $x > c$. Кроме того, $f(x) \to \infty$ при $x \to -\infty$ и $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

График функции f для $c = 8$ имеет вид, представленный на рис. 7.

Как всякая непрерывная функция, f принимает все промежуточные значения (теорема Больцано, [Курош, 1963. § 47]) и на каждом отрезке имеет наименьшее и наибольшее значения в этом отрезке (теорема Вейерштрасса, [Там же]). В частности, в некоторой внутренней точке α отрезка $[0, c]$ $0 < \alpha < c$ функция f принимает наибольшее в этом отрезке значение $f(\alpha) = m$. Из определения следует, что $ab(a - b) = 4m$.

Задача сводится к вычислению α.

8.2. Рассмотрим функцию

$$g(x) = m - f(x) = (x - c)(x + c)x + m$$

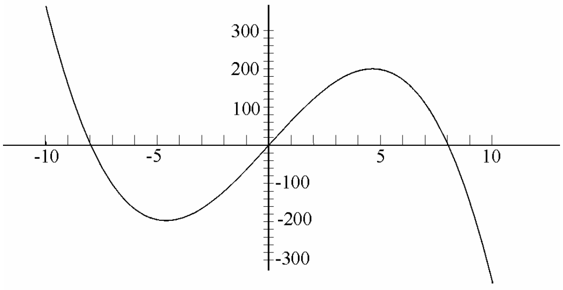

Рис. 7

и уравнение

$$g(x) = x^3 - c^2 x + m = 0 \qquad (11)$$

График функции g для $c = 8$ имеет вид, представленный на рис. 8.

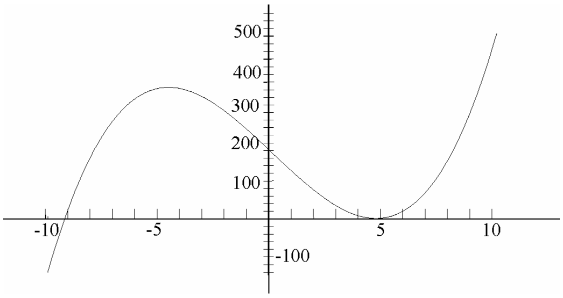

Рис. 8

Так как $f(\alpha) = m$, то $g(\alpha) = 0$. Проведенное исследование поведения функции f показывает, что α является единственным положительным корнем полинома g. Число $f(\alpha) = m$ есть наибольшее значение функции f на отрезке $[0, c]$. Поэтому $g(\alpha) = 0$ является наименьшим значением функции g на этом отрезке. Точка α расположена внутри него: $0 < \alpha < c$. По теореме Ферма [Гончаров, 1951. § 2] отсюда следует, что производная функции g в точке α равна нулю: $g'(\alpha) = 0$. Значит, α является кратным корнем полинома g [Натансон, 1951. § 22]. Так как положительных корней у полинома g больше нет, то у него есть еще отрицательный корень β. Как показано в п. 7.3, дискриминант уравнения (11) в этом случае равен нулю:

$$\Delta = (m/2)^2 - (c^2/3)^3 = 0.$$

Поэтому

$$m = 2(c/\sqrt{3})^3. \qquad (12)$$

8.3. Теперь, зная m, можно решить уравнение (11). При вещественных $p = -c^2$, $q = m$ и равенстве $\Delta = 0$ формула Кардана дает [Окунев, 1951. § 8]:

$$\alpha = (3m)\big/\left(2c^2\right) = c\big/\sqrt{3}. \qquad (13)$$

Здесь $\sqrt{3} > 0$. Так как других положительных корней, кроме α, у полинома g нет, то α однозначно определяет искомые оптимальные слагаемые a и b. Равенство (13) позволяет их легко найти:

$$a = (c + \alpha) = c\left(1 + 1/\sqrt{3}\right)\big/2 \qquad (14)$$

$$b = (c - \alpha) = c\left(1 - 1/\sqrt{3}\right)\big/2.$$

Наибольшее значение произведения получается с помощью равенства (12):

$$ab(b - a) = m/4 = \left(c\big/\sqrt{3}\right)^3\big/2. \qquad (15)$$

В классической задаче Тартальи при $c = 8$ оптимальные слагаемые имеют вид

$$a = 4\left(1 + 1\big/\sqrt{3}\right),\ b = 4\left(1 - 1\big/\sqrt{3}\right).$$

<u>*Замечание.*</u> Зная, что у полинома g есть кратный корень $\alpha > 0$ и корень $\beta < 0$, можно вычислить их значения по формулам Вьета, связывающим корни x_1, x_2, x_3 с коэффициентами полинома. Имеем для $x_1 = x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$:

$$2\alpha + \beta = 0,\ \beta = -2\alpha;$$

$$\alpha\alpha + 2\alpha\beta = -3\alpha^2 = -c^2,\ \alpha = c/\sqrt{3};$$

$$m = \alpha^2\beta = 2\alpha^3.$$

8.4. Задачу Тартальи можно решить, используя методы дифференциального исчисления. Две первые производные функции f имеют вид:

$$f'(x) = c^2 - 3x^2, \qquad f''(x) = -6x.$$

На отрезке $[0, c]$ уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственное решение $\alpha = c\big/\sqrt{3}$ $\left(\sqrt{3} > 0\right)$. Так как $f''(\alpha) = -6\alpha < 0$, то значение $f(\alpha)$ является наибольшим на отрезке $[0, c]$ [Гончаров, 1951. § 3]. Поэтому α однозначно определяет оптимальные слагаемые a и b, которые находятся по формулам (14). Наибольшее значение произведения $ab(a-b)$ дается формулой (15).

Список литературы

Проскуряков И. В. Понятия группы, кольца и поля // Энциклопедия элементарной математики. М.: Гостехиздат, 1951.

Узков А. И. Векторные пространства и линейные преобразования // Энциклопедия элементарной математики. М.: Гостехиздат, 1951. Т. 2: Алгебра.

Окунев Л. Я. Кольцо многочленов и поле рациональных функций // Энциклопедия элементарной математики. М.: Гостехиздат, 1951. Т. 2: Алгебра.

Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1963.

Гончаров В. Л. Элементарные функции действительного переменного // Энциклопедия элементарной математики. М.: Гостехиздат, 1951. Т. 3: Функции и пределы.

Гончаров В. Л. Элементарные функции комплексного переменного // Энциклопедия элементарной математики. М.: Гостехиздат, 1951. Т. 3: Функции и пределы.

Натансон И. П. Производные, интегралы и ряды // Энциклопедия элементарной математики. М.: Гостехиздат, 1951. Т. 3: Функции и пределы.

Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. Серия: Библиотечка «Квант». М.: Наука, 1986. Вып. 56.

Алексеев В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: ЦНМО, 2001.

Понтрягин Л. С. Обобщения чисел. Серия: Библиотечка «Квант». М.: Наука, 1986. Вып. 54.

Материал поступил в редколлегию 24.04.2008