УДК 512.54

*И. В. Сабодах, А. А. Шлепкин*

# ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ НЕАБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В работе доказано, что периодическая группа, насыщенная одной группой, являющейся прямым произведением конечных простых неабелевых групп, конечна при условии, что централизатор силовской 2-подгруппы каждого множителя прямого произведения не содержит элементов нечетного порядка.

*Ключевые слова*: периодическая группа, прямое произведение групп, насыщенность.

## Введение

Группа $G$ насыщена группами из множества $X$, если любая конечная подгруппа $K$ из $G$ содержится в подгруппе группы $G$, изоморфной некоторой группе из $X$ [1; 2].

Если множество $X = \{M\}$ состоит из одной группы $M$, то будем говорить, что группа $G$ насыщена группой $M$.

Как показано в [3; 4], Бернсайдовы группы $B(m, n)$ достаточно большого четного периода $n$ не локально-конечны и насыщены прямыми произведениями групп диэдра, взятых в конечном числе большим единицы. С другой стороны, если периодическая группа насыщена группами диэдра, то она Черниковская [5; 6]. Таким образом, насыщенность периодической группы прямыми произведениями существенно влияет на ее свойство быть локально-конечной.

В [7; 8] изучались периодические группы Шункова, насыщенные прямыми произведениями проективных специальных линейных групп размерностью 2 на абелевы группы.

В настоящей работе изучаются периодические группы, насыщенные одной группой, являющейся прямым произведением конечных простых неабелевых групп. Пусть $\mathfrak{R}$ множество конечных простых неабелевых групп состоит из групп следующих двух типов:

1) $G \simeq L_k^{\delta}(q)$, где $\delta = \pm$, $q$ нечетно, $k = 2^{t_1} + \ldots + 2^{t_s}$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_s$, $s \geq 2$, и $C = C_1 \times \ldots \times C_{s-1}$, где $C_i$ — циклическая группа порядка $(q - \delta 1)_{2'}$ при $1 \leq i \leq s-2$ и порядка $(q - \delta 1)_{2'}/(q - \delta 1, k)_{2'}$ при $i = s - 1$;

2) $G \simeq E_6^{\delta}(q)$, где $q$ нечетно, и $C$ — циклическая группа порядка $(q - \delta 1)_{2'}/(3, q - \delta 1)$.

Как показано в [9. Теорема 7], множество $\mathfrak{R}$ состоит в точности из тех конечных простых неабелевых групп, в которых централизатор силовской 2 подгруппы содержит элемент нечетного порядка.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех конечных простых неабелевых групп и положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} - \mathfrak{R}$. Пусть $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ — фиксированный конечный набор элементов множества $\mathfrak{M}$, и пусть группа $L = L_1 \times \ldots \times L_i \times \ldots \times L_n$ — прямое произведение групп $L_i$ $(i = \overline{1, n})$. Доказан следующий результат.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 123–126

**Теорема 1.** *Пусть периодическая группа $G$ насыщена группой $L$. Тогда $G \simeq L$.*

Теорема 1 легко следует из теоремы 2.

**Теорема 2.** *Пусть $\mathfrak{L}$ — конечное непустое множество конечных групп, в каждой из которых силовская 2-подгруппа содержит свой централизатор. Если $G$ — периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{L}$, то $G \in \mathfrak{L}$.*

## 1. Доказательство теоремы 2

Пусть $G$ — контрпример к теореме 2.

**Лемма 1.** *Любая локально-конечная подгруппа группы $G$ конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $H$ бесконечная локально-конечная подгруппа группы $G$. В этом случае выберем в $H$ конечную подгруппу $K$ со свойством

$$|K| > \max\{|L| \in \mathfrak{L}\} = m \tag{1}$$

где $m$ — фиксированное конечное число, поскольку $\mathfrak{L}$ конечное множество конечных групп.

По условию насыщенности $K \subseteq K_1 \subset G$, $K_1 \simeq L$ и $L \in \mathfrak{L}$, а значит, $|K| \leqslant m$. Но, по (1), $|K| >| L |$ . Противоречие, лемма доказана. □

**Лемма 2.** *Пусть $i$ — инволюция из $G$, тогда $C_G(i)$ — бесконечная не локально-конечная группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $C_G(i)$ локально-конечная группа, то, по лемме 1, $C_G(i)$ — конечная группа, а значит, $G$ — локально-конечная группа [10]. По лемме 1, $G$ — конечная группа, и по условию насыщенности $G \backsimeq L$, где $L \in \mathfrak{L}$. Противоречие с выбором $G$, и лемма доказана. □

**Лемма 3.** *Силовская 2-подгруппа группы $G$ конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное, и пусть $S$ — бесконечная силовская 2-подгруппа группы $G$. Для дальнейшего доказательства нам понадобится приводимое ниже предложение, которое хорошо известно. Мы приведем его доказательство, поскольку затрудняемся указать ссылку.

**Предложение 1.** *В бесконечной 2-группе любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K$ — конечная подгруппа бесконечной 2-группы $G$. Индукцией по $|K|$ покажем, что $N_G(K) \neq K$. Это очевидно, если $|K| = 1$. Пусть $|K| > 1$, и $t$ — инволюция из центра $K$. Если $C_G(t)$ — конечная подгруппа, то, по [10], $G$ — локально-конечна, и утверждение вытекает из справедливости нормализаторного условия в конечных нильпотентных группах. Если же $C_G(t)$ — бесконечная группа, то, не нарушая общность, можно считать, что $C_G(t) = G$, т. е. $\langle t\rangle \trianglelefteq G$. По предложению индукции $N_{\overline{G}}(\overline{K}) \neq \overline{K}$, где $\overline{G} = G/\langle t\rangle$, $\overline{K} = K/\langle t\rangle$, поэтому $N_G(K) \neq K$. Предложение доказано. □

Продолжим доказательство леммы 3. В силу бесконечности $S$ и приведенного выше предложения 1 в $S$ можно выбрать бесконечную локально-конечную подгруппу $S_1$, что противоречит лемме 1. Лемма доказана. □

**Лемма 4.** *$C_G(S)$ — бесконечная не локально-конечная группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s_1 \in Z(S)$ и $s_1^2 = e$, где $e$ — единичный элемент группы $G$. Как показывалось выше (лемма 2), $C_G(s_1)$ — бесконечная не локально-конечная группа.

Положим $C_1 = C_G(s_1)$. Ясно, что $S \subset C_1$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{C}_2 = C_1 / \langle s_1 \rangle$ и выберем в ней инволюцию $\overline{z}_2$ из $Z(\overline{S} = S / \langle s_1 \rangle)$. Точно так же, как и для $s_1$, $C_{\overline{C}_2}(s_2)$ — бесконечная не локально-конечная группа. Обозначим ее полный прообраз в $C_1$ через $C_2$. Далее рассуждаем по индукции. Предположим, что группа $C_i$ определена для $i \geqslant 1$. Определим группу $C_{i+1}$ следующим образом. Рассмотрим фактор-группу $C_i / \langle s_1, \ldots, s_i \rangle = \overline{C}_{i+1}$. В ней выберем инволюцию $\overline{s}_{i+1} \in Z(\overline{S} = S / \langle s_1, \ldots, s_i \rangle)$. Как и выше, $C_{\overline{C}_{i+1}}(\overline{s}_{i+1})$ — бесконечная не локально-конечная группа, и пусть $C_{i+1}$ — ее полный прообраз в $C_i$. Так как $S$ — конечная группа, то указанный процесс оборвется на некотором конечном номере $m$, что означает $C_m \subset N_G(S)$. Поскольку $C_m$ — бесконечная не локально-конечная группа, то и $N_G(S)$ — бесконечная не локально-конечная группа, а так как $S$ — конечная группа, то $C_G(S)$ также бесконечная не локально-конечная группа. Лемма доказана. □

Завершим доказательство теоремы. Возьмем в $C_G(S)$ элемент $b$ — нечетного порядка. Такой элемент $b$ найдется, так как множество $C_G(S) \backslash S \neq \varnothing$ и содержит элементы, порядки которых не являются степенью двойки. В противном случае, мы бы получили противоречие с тем, что $S$ силовская 2-подгруппа. По условию насыщенности $S \times \langle b \rangle \subseteq B \simeq L$, где $B$ — подгруппа из $G$, а $L \in \mathfrak{L}$. Следовательно, централизатор силовской 2-подгруппы из $L$ содержит элемент нечетного порядка. Противоречие с определением множества $\mathfrak{L}$. Теорема 2 доказана. □

## 2. Доказательство теоремы 1

Пусть группа $L = L_1 \times \ldots \times L_i \times \ldots \times L_n$ — прямое произведение групп $L_i$ $(i = \overline{1, n})$ и $L_i \in \mathfrak{M}$.

Возьмем в $G$ подгруппу $B \simeq L$. Тогда

$$B = \prod_{i=1}^{n} B_i \,, \quad \text{где} \quad B_i \simeq L_i \,.$$

Пусть $S$ силовская 2-подгруппа из $B$. Предположим, что $G_B(S)$ содержит элемент $b$ нечетного порядка.

В этом случае $b = b_1 b_2 \cdots b_n \neq e$, где для некоторых $b_i \in L_i$, $b_i$ — неединичные элементы нечетного порядка.

Так как $S \in Syl_2 B$, то

$$S = \prod_{i=1}^{n} S_{B_i} \,, \quad \text{где} \quad S_{B_i} \in Syl_2 B_i \,.$$

Возьмем $1 \neq s \in S$, с тем свойством, что $s = s_1 \cdot \ldots \cdot s_i \cdot \ldots \cdot s_n$, где $s_i \in S_{B_i}$ и $s_i^{b_i} \neq s_i$, для тех значений индекса $i$, для которых $b_i \neq 1$. Следовательно, $s^b = (s_1 \cdot \ldots \cdot s_n)^{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n} = s_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot s_i^{b_i} \cdot \ldots \cdot s_n^{b_n} \neq s_1 \cdot \ldots \cdot s_i \cdot \ldots \cdot s_n = s$, поскольку $s_i \neq s_i^{b_i}$. Но, с другой стороны,

$b \in C_B(S)$, и должно быть $s^b = s$. Противоречие с выбором $b$. Таким образом, множество $\{L\}$ из теоремы 1 удовлетворяет условиям теоремы 2, и, следовательно, $G$ изоморфна одной из групп множества $\{L\}$. Поскольку $\{L\}$ состоит из одной группы, то $G \simeq L$, и теорема 1 доказана. $\square$

## Список литературы

1. *Шлепкин А. К.* Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // III Междунар. конф. по алгебре: Сб. тез. Красноярск, 1993. С. 363.

2. *Шлепкин А. К.* О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Матем. тр. 1998. №1. С. 129–138.

3. *Лысёнок И. Г.* Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. матем., 1996. Т. 60. С. 4–5.

4. *Ivanov S. V.* The Free Burnside Groups of Sufficiently Large Exponents // Int. J. of Algebra and Computation. 1994. Vol. 4. P. 1–308.

5. *Amberg B., Kazarin L.* Periodic Groups Saturated by Dihedral Subgroups // International Algebraic Conference Dedicated to $70^{\text{th}}$ Birthday of Anatoly Yakovlev. 19–24 June 2010. St.-Petersburg, 2010. P. 79–80.

6. *Шлепкин А. К., Рубашкин А. Г.* Об одном классе периодических групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, №1. С. 110–119.

7. *Панюшкин Д. Н., Тухватуллина Л. Р., Филиппов К. А.* О периодической группе Шункова насыщенной центральными расширениями конечных 2-групп посредством группы $L_2(5)$ // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика механика информатика. 2010. Т. 10, вып. 1. С. 88–92.

8. *Панюшкин Д. Н., Тухватуллина Л. Р., Филиппов К. А.* О группе Шункова, насыщенной центральными расширениями циклических групп посредством проективных специальных линейных групп // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. № 2. С. 177–185.

9. *Кондратьев А. С., Мазуров В. Д.* 2-сигнализаторы конечных простых групп // Алгебра и логика. 2003. № 5. С. 594–623.

10. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. № 4. С. 470–494.

*Материал поступил в редколлегию 19.11.2011*

**Адреса авторов**

САБОДАХ Ирина Валерьевна
Краноярский государственный аграрный университет
пр. Мира, 90, Красноярск, 660049, Россия
e-mail: sabodax@mail.ru

ШЛЕПКИН Алексей Анатольевич
Сибирский федеральный университет
пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия
e-mail: shlyopkin@mail.ru