

А. А. Акиншин, В. П. Голубятников

ЦИКЛЫ В СИММЕТРИЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ*

Установлена неединственность циклов в фазовых портретах некоторых нечетномерных нелинейных динамических систем, моделирующих функционирование генных сетей с отрицательными обратными связями. Выявлены некоторые геометрические и аналитические характеристики этих циклов и построен граф, описывающий качественное поведение траекторий таких динамических систем.

Ключевые слова: модели генных сетей, нелинейные динамические системы, стационарные точки, инвариантные области, периодические траектории, неустойчивые циклы, графы, компьютерное моделирование.

Введение

Построение фазовых портретов динамических систем и поиск периодических траекторий в этих системах являются важными задачами во многих разделах чистой и прикладной математики. Найти устойчивые циклы в таких системах, как правило, нетрудно. Построение полного списка циклов системы осложняется наличием неустойчивых циклов, обнаружить которые зачастую не так просто.

В работах [1–9] обсуждались большей частью устойчивые циклы в таких динамических системах. Были найдены стационарные точки, изучены их окрестности и построены области, в которых циклы могут возникать. Для некоторых из этих областей было доказано существование циклов.

В монографии [6] изучались главным образом именно симметричные генные сети, которые более просты для анализа и очень важны с биологической точки зрения. Результаты, полученные для симметричных систем, в дальнейшем можно обобщить для их несимметричных аналогов, как это было сделано в [2–4].

Для проведения численных экспериментов с подобными динамическими системами нами был разработан программный комплекс **PhasePortraitAnalyzer**. Результаты компьютерного моделирования подтвердили полученные ранее выводы и дали предпосылки для формулирования новых гипотез. Кроме того, программа позволяет строить фазовые портреты систем, графы, схемы и другие рисунки, которые иллюстрируют полученные результаты.

В настоящей работе мы будем рассматривать главным образом нелинейные нечетномерные циклические динамические системы химической кинетики:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_{2k+1}) - x_1, \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1) - x_2, \quad \dots \quad \dot{x}_{2k+1} = f_{2k+1}(x_{2k}) - x_{2k+1}, \quad (1)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (междисциплинарный проект № 80) и РФФИ (проект № 12-01-00074).

где f_i — гладкие монотонно убывающие функции, $f_i(x_{i-1}) : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ для $i = 1, 2, \dots, 2k + 1$. В силу цикличности системы (1) будем считать, что для $i = 1$ имеем $x_{i-1} = x_{2k+1}$, $x_{i-2} = x_{2k}$ и т. п.

Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_{2k+1})$ соответствует концентрациям веществ в генной сети, убывание функций f_i моделирует отрицательные обратные связи, а сама функция определяет зависимость скорости синтеза вещества x_i от концентрации вещества x_{i-1} . В биологических интерпретациях для описания отрицательных связей обычно используют функцию Хилла: $f_i(w) = a \cdot (1 + w^m)^{-1}$, см. [6].

Для начальных этапов исследования мы будем рассматривать только симметричные системы, т. е. положим $f_1 = f_2 = \dots = f_{2k+1} = f$.

Особый интерес при исследовании таких систем представляют стационарные точки (они соответствуют гомеостазу организма) и циклы (они соответствуют разным биологическим циклам, например циркадным ритмам), см. [6; 10].

В настоящей работе мы продолжаем исследования, начатые в [1–9]. В частности, здесь проводится изучение динамической системы с использованием одной дискретной структуры, а также находятся и описываются некоторые ранее неизвестные циклы.

1. Граф кластеров

У динамической системы (1) существует ровно одна стационарная точка. Для доказательства этого факта исключим поочередно все переменные в системе уравнений $\{\dot{x}_i = 0\}$, сведя ее к одному уравнению

$$f_1(f_{2k+1}(f_{2k}(\dots(f_2(x_1))\dots))) = x_1. \quad (2)$$

В левой части этого уравнения находится композиция нечетного количества монотонно убывающих функций, которая сама является монотонно убывающей функцией. Значит, что уравнение (2) обладает единственным решением, соответствующим единственной стационарной точке, см. [9]. Обозначим эту точку через $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{2k+1}^*)$.

В работах [1–5; 9] был проведен анализ окрестностей подобных стационарных точек. В ходе исследования выделялся инвариантный параллелепипед Q , в который со временем сходились все траектории. Через стационарную точку проводилось $2k + 1$ гиперплоскостей, которые разбивали Q на 2^{2k+1} более мелких параллелепипедов. Далее доказывалось, что внутри мелких параллелепипедов циклы не возникают, а на их гранях векторное поле ориентировано только в одну сторону. Из этих соображений по теореме Брауэра о неподвижной точке доказывалось существование цикла в случае *гиперболической* стационарной точки, т. е. точки, для которой матрица линеаризации системы имеет собственные числа и с положительными, и с отрицательными вещественными частями, но не имеет чисто мнимых собственных чисел. В работе [2] доказывалось, что каждый мелкий параллелепипед описанного выше разбиения можно сократить до треугольной призмы с сохранением свойств инвариантности их объединения.

В настоящей работе продолжается анализ окрестности рассматриваемой точки. При этом формы областей, на которые разбивается инвариантная область, не будут иметь

для нас особого значения, поэтому мы несколько обобщим рассматриваемые объекты. Назовем *кластером* $Q_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{2k+1}}$ (ε — двоичный $(2k+1)$ -мерный вектор, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$) часть указанной окрестности, в которой

$$\begin{cases} x_i \leq x_i^*, & \text{если } \varepsilon_i = 0, \\ x_i \geq x_i^*, & \text{если } \varepsilon_i = 1, \end{cases}$$

причем потребуем, чтобы траектории всегда выходили из этой области только в другие кластеры и никогда не выходили из Q . Рассмотренные выше параллелепипеды и призмы удовлетворяют этому определению. Будем говорить, что кластеры *граничат по i -й грани*, если их бинарные векторы различаются только в i -й компоненте. Несложно проверить, что внутри кластеров поле \dot{X} по каждой координате будет направлено только в одну сторону, значит, внутри каждого из кластеров циклы образовываться не будут, а по их границе векторное поле во всех точках направлено в одну и ту же сторону. Составим граф, вершины которого соответствуют кластерам, а ребра — переходам вдоль векторного поля \dot{X} между их общими гранями. Цикл векторного поля в Q может существовать только при наличии соответствующего цикла в графе кластеров. Поэтому имеет смысл формализовать структуру этого графа.

Очевидно, что количество ребер каждой вершины (исходящих и входящих) равно размерности пространства $2k+1$ и длине двоичного вектора, так как каждое ребро соответствует изменению одной из его компонент. Рассмотрим два граничащих по t -й грани кластера: $Q_\varepsilon = Q_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{2k+1}}$ и $Q_\eta = Q_{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{2k+1}}$, где $\varepsilon_i = \eta_i$, если $i \neq t$; $\varepsilon_t = 0$, $\eta_t = 1$. Направление ребра зависит от предыдущего бинарного индекса $\varepsilon_{t-1} = \eta_{t-1}$. Выпишем возможные переходы (с одной стороны указываются $\varepsilon_{t-1} \varepsilon_t$, с другой — $\eta_{t-1} \eta_t$, стрелка показывает направление ребра графа):

$$00 \rightarrow 01 \quad 11 \rightarrow 10.$$

Введем еще одно определение. Будем называть *потенциалом* вершины этого графа количество выходящих из нее ребер. Если мы говорим о каком-то текущем кластере, то под потенциалом будет пониматься потенциал этого кластера. Если мы говорим о переходе из одного кластера в другой, то под изменением потенциала будет пониматься разность потенциалов второго и первого кластеров. *Потенциальным уровнем* будем называть все кластеры с фиксированным потенциалом. Сформулируем несколько несложных, но полезных лемм о потенциалах и потенциальных уровнях.

Лемма 1. При переходе из одного кластера в другой потенциал либо не меняется, либо уменьшается на 2.

Лемма 2. В рамках рассматриваемой системы (1) потенциалы всех кластеров нечетны.

Лемма 3. При фиксированной размерности пространства графы кластеров разных систем вида (1) изоморфны друг другу.

Лемма 4. Количество вершин на p -м потенциальном уровне равно $2C_{2k+1}^p$.

Лемма 5. Высший потенциальный уровень: $2k+1$. Имеется два кластера с бинарными векторами $\{000 \dots 00\}$ и $\{111 \dots 1\}$. Все ребра являются исходящими. Циклов нет.

Лемма 6. Низший потенциальный уровень: 1. Имеются $2(k+1)$ кластеров. Из каждого кластера исходит единственное ребро, ведущее в другой кластер того же уровня.

Схематическое изображение подобного графа можно видеть на рис. 1.

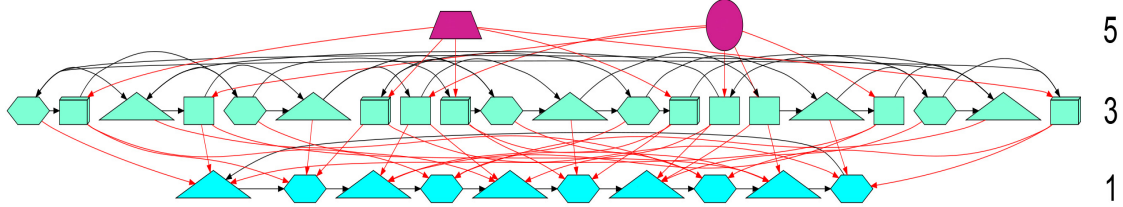


Рис. 1. Устройство графа кластеров 5-мерной системы

Граф кластеров примечателен тем, что значительно сужает область поиска циклов. Заметим, что каждый существующий цикл принадлежит строго одному потенциальному уровню, так как по лемме 1 траектория может либо оставаться в текущем потенциальном уровне, либо опускаться на более низкие. Поэтому имеет смысл говорить о существовании циклов на том или ином уровне; при нахождении нового цикла для его качественного описания нам необходимо знать потенциальный уровень, на котором он находится. Подобные взаимосвязи непрерывных и дискретных моделей генных сетей отмечались как в теории дифференциальных уравнений, так и в дискретной математике, см. [6; 11].

2. Поиск циклов

Из анализа графа кластеров легко понять, что на низшем потенциальном уровне всегда наблюдается хотя бы один цикл. Из численных экспериментов удалось установить, что этот цикл находится очень легко при произвольной начальной точке траектории. Причем на этом уровне имеется по крайней мере один устойчивый цикл, см. [4].

Можно показать, что в таких системах имеются и другие циклы. Для этого рассмотрим нечетномерную систему (1), размерность которой является составным числом. Минимальная подходящая нам размерность равна 9. Будем рассматривать нестационарные точки, удовлетворяющие следующему условию:

$$x_1 = x_4 = x_7; \quad x_2 = x_5 = x_8; \quad x_3 = x_6 = x_9. \quad (3)$$

Нетрудно заметить, что если хотя бы одна точка некоторой траектории удовлетворяет условию (3), то и все точки этой траектории удовлетворяют этому условию. Действительно, рассмотрим точку

$$P = (a, b, c, a, b, c, a, b, c)$$

фазового пространства системы (1). В этой точке вектор скорости имеет вид

$$\dot{P} = (f(a) - c, f(b) - a, f(c) - b, f(a) - c, f(b) - a, f(c) - b, f(a) - c, f(b) - a, f(c) - b).$$

Ввиду того что исходная точка удовлетворяет условию (3) и вектор скорости также удовлетворяет этому условию (в силу цикличности системы), то и все точки траектории

также будут удовлетворять условию (3). Заметим, что для выполнения этого условия система не обязана быть полностью симметрична. Достаточно выполнения условия

$$f_1 = f_4 = f_7; \quad f_2 = f_5 = f_8; \quad f_3 = f_6 = f_9.$$

Условия (3) определяют трехмерное подпространство в \mathbb{R}^9 . Данное подпространство является инвариантным множеством — траектории никогда не покидают его. Стоит отметить, что если траектория изначально не удовлетворяла условию (3), то она никогда и не будет ему удовлетворять. Для гиперболической стационарной точки можно доказать (см. [2]), что в данном трехмерном пространстве лежит некоторый цикл. Численные эксперименты подтверждают существование этого цикла. Заметим, что если рассмотреть трехмерное пространство переменных x_1, x_2, x_3 , то мы получим систему, полностью эквивалентную системе (1) для трехмерного случая.

Из условия (3) следует, что найденный цикл 9-мерной динамической системы (1) находится на третьем потенциальном уровне. В окрестности рассматриваемого трехмерного подпространства наблюдаются «завихрения»: при самом малом отклонении от определяемого условием (3) подпространства траектория поначалу совершает некоторое количество витков вдоль цикла на небольшом расстоянии от него, постепенно начинает удаляться от цикла, а затем переходит на потенциальный уровень 1 и начинает притягиваться к устойчивому циклу, лежащему на первом потенциальном уровне.

Перейдем к рассмотрению линеаризации системы в окрестности стационарной точки. Характеристическое уравнение запишется следующим образом:

$$(1 + \lambda)^n = \frac{\partial f_1}{\partial x_{2k+1}} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{2k+1}}{\partial x_{2k}}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\Psi = \frac{\partial f_1}{\partial x_{2k+1}} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{2k+1}}{\partial x_{2k}}, \quad \Upsilon = \sqrt[n]{|\Psi|}.$$

Так как система симметричная, то в стационарной точке имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{2k+1}} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f_{2k+1}}{\partial x_{2k}} = -\Upsilon.$$

Значит, при $2k + 1 = 9$ собственные числа имеют вид

$$\lambda_i = \Upsilon(\cos(\alpha_i) + \imath \sin(\alpha_i)) - 1, \quad i \in 1 \dots 9, \quad (4)$$

причем

$$\alpha \in \{20^\circ, 60^\circ, 100^\circ, 140^\circ, 180^\circ, 220^\circ, 260^\circ, 300^\circ, 340^\circ\}. \quad (5)$$

Пронумеруем собственные числа в порядке увеличения вещественной части. Графически распределение собственных чисел показано на рис. 2. В рамках такой нумерации нас особенно будут интересовать три следующих собственных числа:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \Upsilon(\cos(180^\circ) + \imath \sin(180^\circ)) - 1, \\ \lambda_6 = \Upsilon(\cos(60^\circ) + \imath \sin(60^\circ)) - 1, \\ \lambda_7 = \Upsilon(\cos(300^\circ) + \imath \sin(300^\circ)) - 1. \end{cases}$$

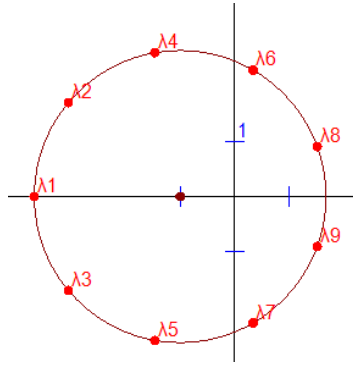


Рис. 2. Распределение собственных чисел в 9-мерной системе

Вычислим собственные векторы для этих чисел. Рассмотрев матрицу линеаризации для циклической системы, можно увидеть, что компоненты собственного вектора связаны следующим соотношением:

$$e_i = e_{i-1} \cdot \frac{\Upsilon}{\lambda + 1}. \quad (6)$$

Векторы с номерами 1, 6, 7 удовлетворяют условию (3). Из формулы (6) следует, что

$$e_i = e_{i-3} \cdot \frac{\Upsilon^3}{(\lambda + 1)^3},$$

и, значит, Υ является вещественным числом. Поэтому $e_i = e_{i-3}$ в том и только в том случае, если $(\lambda + 1)^3$ вещественно. Применим формулу (4):

$$(\lambda + 1)^3 = (\Upsilon(\cos(\alpha_i) + i \sin(\alpha_i)) - 1 + 1)^3 = \Upsilon^3(\cos(3\alpha_i) + i \sin(3\alpha_i)). \quad (7)$$

Только для трех углов из множества (5) выражение (7) оказывается вещественным, эти углы соответствуют $\lambda_1, \lambda_6, \lambda_7$. Таким образом, мы нашли три собственных вектора, которые лежат в подпространстве, определяющемся из условия (3), и образуют базис рассматриваемого подпространства. Поэтому при описании результатов численных экспериментов удобно рассматривать проекции моделируемых траекторий на подпространство, построенное на собственных векторах с номерами 1, 6 и 7. В дальнейшем подпространство, построенное на собственных векторах с номерами i, j, k , будем обозначать через $P_{i,j,k}$ и т. п.

Мы рассматривали 9-мерную систему, так как 9 — это минимальное составное нечетное натуральное число. Следующим таким натуральным числом является 15. В 15-мерной системе можно наблюдать более интересные закономерности, ввиду того что 15 является произведением двух разных нечетных чисел: $15 = 3 \cdot 5$. В такой системе можно выделить два разных инвариантных подпространства. Проведем для них те же рассуждения, что и в 9-мерном случае. Все вычисления делаются аналогично, поэтому приведем только результаты.

Первое условие запишется следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = x_4 = x_7 = x_{10} = x_{13}, \\ x_2 = x_5 = x_8 = x_{11} = x_{14}, \\ x_3 = x_6 = x_9 = x_{12} = x_{15}. \end{cases} \quad (8)$$

Условие (8) определяет трехмерное подпространство $P_{1,10,11}$, в котором обнаруживается цикл на пятом потенциальном уровне.

Второе условие определяется аналогичными уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 = x_6 = x_{11}, \\ x_2 = x_7 = x_{12}, \\ x_3 = x_8 = x_{13}, \\ x_4 = x_9 = x_{14}, \\ x_5 = x_{10} = x_{15}. \end{cases} \quad (9)$$

Условие (9) определяет 5-мерное подпространство $P_{1,6,7,12,13} \subset \mathbb{R}^{15}$, а лежащий в нем цикл находится на третьем потенциальном уровне.

Таким образом, в 15-мерной симметричной системе обнаруживается по меньшей мере 3 цикла: на первом, третьем и пятом потенциальных уровнях. Первый из них является устойчивым, а остальные два существуют только в подпространствах (8) и (9). Для построения трехмерных проекций, изображающих одновременно три цикла, удобно в качестве базиса брать векторы с номерами 1 (он является общим для обоих условий (8) и (9)), 10 или 11 (условие 8), 6, 7, 12 или 13 (условие 9).

3. Геометрические иллюстрации

Для изучения поведения траекторий обратимся к иллюстрациям.

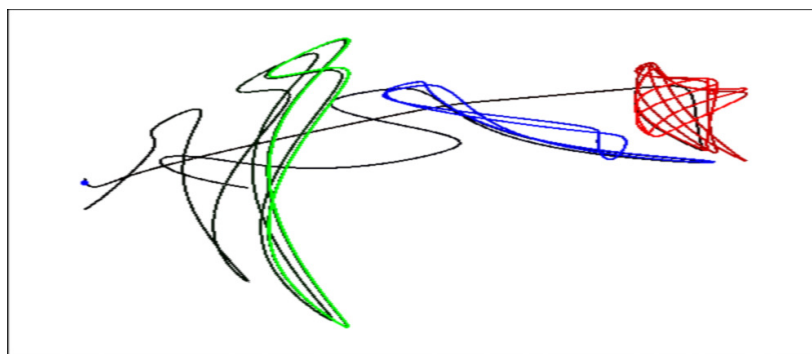


Рис. 3. Три цикла в 15-мерной системе в проекции на $P_{1,7,10}$

На рис. 3 представлены проекции трех траекторий 15-мерной системы (1), описанной выше. Изображены три траектории с различными начальными точками. Начальные точки двух из этих траекторий удовлетворяют описанным условиям и притягиваются к соответствующим циклам третьего и пятого потенциальных уровней. Третья траектория притягивается к циклу первого потенциального уровня.

На рис. 4 показана траектория, у которой начальная точка лежит на пятом потенциальном уровне, вблизи от подпространства $P_{1,10,11}$. Эта траектория совершает достаточно много витков в пятом потенциальном уровне, затем «соскакивает» на третий потенциальный уровень, некоторое время совершает там витки, затем «срывается» на первый потенциальный уровень и притягивается устойчивым циклом.

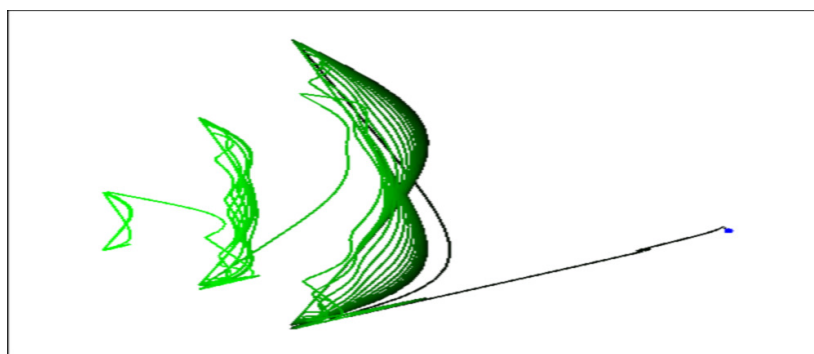


Рис. 4. «Завихрения» в 15-мерной системе

Если мы сколь угодно мало хотя бы в одной компоненте отклонимся от подпространства, задаваемого условиями (8) или (9), то в дальнейшем мы будем все дальше и дальше отдаляться от неустойчивого цикла. На рис. 5 приведен набор траекторий, которые начинаются в разных точках на небольшом удалении от подпространства $P_{1,6,7,12,13}$. При небольшом времени моделирования расстояние от этого подпространства столь незначительно, что создается впечатление, что мы нашли новые циклы системы. Однако если мы увеличим время моделирования (результаты приведены на рис. 5), то мы увидим плавное смещение каждой траектории от начальной позиции. Смещение можно увидеть благодаря «шлейфу», оставляемому траекторией при смещении витков. И только при очень большом времени моделирования можно убедиться в том, что в конце концов траектория опустится на более низкие потенциальные уровни и притянется к имеющемуся там устойчивому циклу.

Таким образом, мы показали, что в изучаемых системах вида (1) может существовать несколько циклов. В случае симметричных систем некоторые такие циклы удалось обнаружить и описать. Несмотря на неустойчивость данных циклов, знать об их существовании очень важно, так как они дают представление о фазовом портрете динамической системы. Возникает естественная гипотеза о том, что в несимметричной системе вида (1) имеются аналогичные циклы. Предпосылкой к этому служат «завихрения», аналогичные симметричным системам (рис. 6). Однако для несимметричного случая намного сложнее сформулировать условия, описывающие такие циклы. Отыскать цикл только компьютерным моделированием практически не представляется возможным ввиду ограниченной точности вычислений.

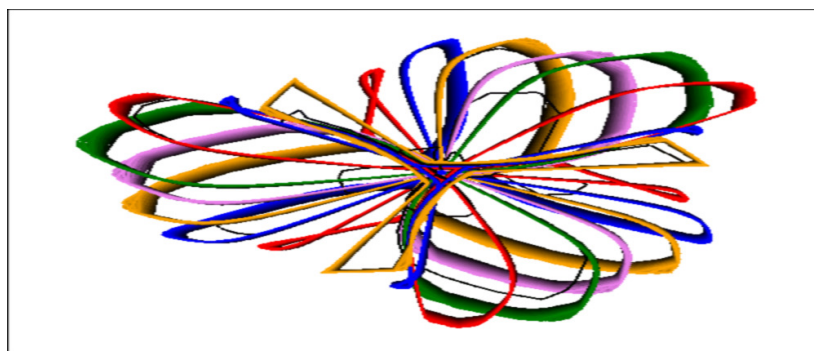


Рис. 5. Проекция траекторий вблизи цикла

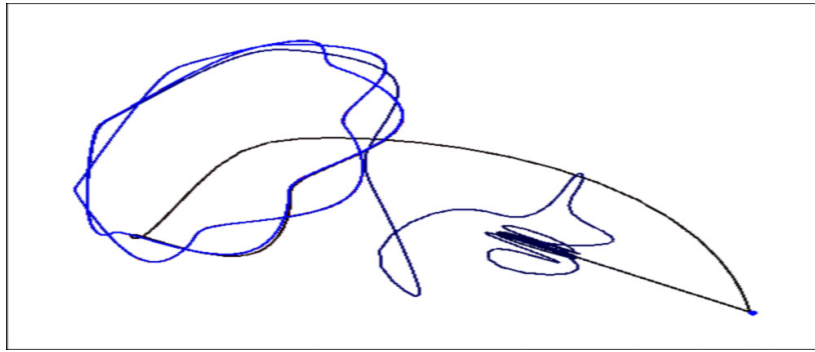


Рис. 6. «Завихрения» в несимметричной системе

Кроме того, следует отметить, что изложенные выше построения имеют место и в других нечетных размерностях, а также в случае четномерных систем, хотя в них намного сложнее проводить анализ ввиду наличия нескольких стационарных точек, неоднозначности выбора кластеров и прочих факторов, усложняющих фазовые портреты.

Список литературы

1. *Гайдов Ю. А.* Об устойчивости периодических траекторий в некоторых моделях генных сетей // Сиб. журн. индустр. мат. 2008. Т. 11, № 1. С. 57–62.
2. *Гайдов Ю. А., Голубятников В. П.* О некоторых нелинейных динамических системах, моделирующих несимметричные генные сети // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, вып. 2. С. 8–17.
3. *Гайдов Ю. А., Голубятников В. П., Лихошвай В. А.* О некоторых нелинейных динамических системах, моделирующих несимметричные генные сети. 2 // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 1. С. 18–28.
4. *Голубятников В. П., Голубятников И. В.* О периодических траекториях нелинейных динамических систем специального вида // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 3–16.
5. *Голубятников В. П., Голубятников И. В., Лихошвай В. А.* О существовании и устойчивости циклов в пятимерных моделях генных сетей // Сиб. журн. индустр. мат. 2010. Т. 13, вып. 4. С. 403–411.
6. *Лихошвай В. А., Голубятников В. П., Демиденко Г. В., Евдокимов А. А., Фадеев С. И.* Теория генных сетей // Системная компьютерная биология. Интеграционные проекты / Под ред. Н. А. Колчанова, С. С. Гончарова. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. Вып. 14. С. 395–480.
7. *Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Задачи теории функционирования генных сетей // Молекулярная биология. 2001. Т. 35, вып. 6. С. 926–932.
8. *Gaidov Yu. A., Golubyatnikov V. P.* On the Existence and Stability of Cycles in Gene Networks with Variable Feedbacks // Contemporary Mathematics. 2011. Vol. 553. P. 61–74.

9. *Golubyatnikov V. P., Golubyatnikov I. V.* On Periodic Trajectories in Odd-Dimensional Gene Networks Models // Russian J. of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2011. Vol. 28. No. 4. P. 379–412.

10. *Murray J. D.* Mathematical Biology. 1. An Introduction. 3rd ed. N. Y.: Springer-Verlag, 2002.

11. *Евдокимов А. А.* Дискретные модели генных сетей: анализ и сложность функционирования // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 3. С. 31–37.

Материал поступил в редколлегию 03.02.2012

Адреса авторов

АКИНЬШИН Андрей Александрович

Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова

пр. Ленина, 46, Барнаул, 656038, Россия

e-mail: andrey.akinshin@gmail.com

ГОЛУБЯТНИКОВ Владимир Петрович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: glbtn@math.nsc.ru