УДК 517.984

А. А. Седипков

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАЗРЫВОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ*

Исследуется обратная спектральная задача для оператора Штурма – Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами. Доказано, что разрывы коэффициентов однозначно определяются асимптотикой функции Йоста на бесконечности. Построен алгоритм, позволяющий восстановить разрывы за конечное число шагов.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, акустический импеданс, функция Йоста.

Введение

Рассмотрим процесс распространения плоских волн в упругом полупространстве $z \geq 0$ евклидова пространства R^3, механические свойства которого зависят только от глубины z. Считается, что волны поляризованы вдоль некоторой прямой, параллельной плоскости $z = 0$, а на границе полупространства отсутствуют нормальные напряжения. При этих условиях смещение w точек среды относительно положения равновесия зависит только от глубины z и времени t и удовлетворяет уравнению акустики

$$(\mu w_z)_z = \rho w_{tt}, \tag{1}$$

где $\rho = \rho(z)$ — плотность, $\mu = \mu(z)$ — модуль сдвига. Всюду далее предполагается, что коэффициенты ρ и μ являются строго положительными кусочно-гладкими функциями с конечным числом разрывов в точках $z_1, \ldots, z_n$ таких, что $0 = z_{n+1} < z_n < \ldots < z_1 < < z_0 = \infty$, а при $z \geq z_* > z_1$ — постоянны и равны некоторым известным значениям ρ_* и μ_* соответственно. Также предполагается, что функции $\rho(z)$ и $\mu(z)$ дважды непрерывно дифференцируемы на каждом из интервалов $(z_{k+1}, z_k), k = 0, \ldots, n$, причем их производные $\rho^{(j)}(z)$ и $\mu^{(j)}(z)$, $j = 0, 1, 2$, в точках $z_1, \ldots, z_n$ имеют разрывы первого рода.

Для того чтобы уравнение (1) имело смысл, мы будем предполагать, что функции $w(z,t)$, $\mu(z) w_z(z,t)$ принадлежат пространству Соболева $W_2^1((0,\infty))$ относительно независимой переменной z. Тогда мы получаем условия склейки

$$\begin{bmatrix} w \\ w_z \end{bmatrix}_{z=z_k-0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w_z \end{bmatrix}_{z=z_k+0} \tag{2}$$

в точках разрыва параметров среды μ, ρ, где $\mu_k = \mu(z_k+0)/\mu(z_k-0)$, $k = 1, \ldots, n$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00221), Президиума РАН (Программа фундаментальных исследований № 2), Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 2.1.1.10133 «Развитие научного потенциала высшей школы»).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 114–125

Обозначим через $v(z) = \sqrt{\mu(z)/\rho(z)}$ скорость распространения упругих волн на глубине z и положим

$$x(z) = \int\limits_{z_{k+1}}^{z} \frac{ds}{v(s)} + x_{k+1}, \quad \text{для } z \in (z_{k+1}, z_k),$$

где $x_k = x(z_k)$, $k = 0, \ldots, n$, $x_{n+1} = 0$; $\sigma(x) = \rho(z(x))v(z(x))$.

В силу свойств функций ρ, μ получаем, что скорость распространения волн равна $v_* = \sqrt{\mu_*/\rho_*}$ при $z \geq z_* > 0$. Физический смысл величины x — время прохождения волны из глубины z до границы полупространства $z = 0$, а функция $\sigma(x)$ называется *акустическим импедансом* [1–4]. В силу свойств ρ, μ получаем, что $\sigma(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на каждом из интервалов $(x_{k+1}, x_k), k = 0, \ldots, n$, причем производные $\sigma^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, 2$, в точках $x_1, \ldots, x_n$ имеют разрывы первого рода. А при $x \geq x_* = x(z_*)$ $\sigma(x) \equiv \sqrt{\rho_*\mu_*}$. Обозначим через σ_k отношение $\frac{\sigma(x_k+0)}{\sigma(x_k-0)}$.

Предполагается, что волновой процесс порожден внешним динамическим воздействием при $z = 0$, которое моделируется краевым условием вида

$$2\mu w_z \mid_{z=0} = f(t). \tag{3}$$

где функция $f(t)$ обращается в нуль вне интервала $(0, +\infty)$.

Естественно также предположить, что на бесконечности выполнено условие отсутствия приходящих волн, называемое условием излучения Зоммерфельда, которое записывается в виде

$$w_z + \frac{1}{v_*} w_t = 0, \quad z \geq z_*. \tag{4}$$

Будем считать, что до начала воздействия среда покоилась, т. е.

$$w \mid_{t \leq 0} = 0. \tag{5}$$

Перейдем от переменной z к новой независимой переменной x, а от функции $w(z,t)$ — к функции $u(x, \omega) = \sqrt{\sigma(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R w(z(x), t) e^{-i\omega t} dt$, полученной путем умножения функции w на функцию $\sqrt{\sigma}$ и применения формального преобразования Фурье относительно переменной t. После простых преобразований уравнения (1)–(4) перепишутся в виде уравнения Штурма — Лиувилля:

$$-u_{xx}(x, \omega) + q(x)u(x, \omega) = \omega^2 u(x, \omega), \quad x \in \bigcup_{k=0}^{n} (x_{k+1}, x_k), \quad \omega \in R, \tag{6}$$

с условиями склейки

$$\begin{bmatrix} u \\ u_x \end{bmatrix}_{x=x_k-0} = \begin{pmatrix} a_k^{-1} & 0 \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_x \end{bmatrix}_{x=x_k+0} \tag{7}$$

в точках разрыва x_k, $k = 1, \ldots, n$. Краевое условие (3) принимает вид

$$(u_x - hu) \mid_{x=0} = g(\omega). \tag{8}$$

Здесь $q(x) = \frac{(\sqrt{\sigma(x)})_{xx}}{\sqrt{\sigma(x)}}$, $h = \frac{\sigma_x(0)}{2\sigma(0)}$, $a_k = \sqrt{\sigma_k}$, $b_k = \frac{\sigma_x(x_k+0)/\sqrt{\sigma_k} - \sigma_x(x_k-0)}{\sigma(x_k-0)}$, $2\sqrt{\sigma(0)} g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R f(t) e^{-i\omega t} dt$.

В силу свойств акустического импеданса $\sigma(x)$ получаем, что коэффициент $q(x)$ непрерывен на каждом из интервалов $(x_{k+1}, x_k), k = 0, \ldots, n$ и имеет разрывы первого рода в точках $x_1, \ldots, x_n$, причем при $x \geq x_*$ $q(x) \equiv 0$.

Условие отсутствия приходящих волн (4) переписывается в виде

$$u_x + i\omega u = 0, \quad \text{при } x \geq x_*.$$

Обозначим через $e(x, \omega)$ решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям склейки

$$u|_{x=x_k-0} = u|_{x=x_k+0}, \quad u_x|_{x=x_k-0} = u_x|_{x=x_k+0}, \quad k = 1, .., n, \tag{9}$$

и совпадающее с $exp(i\omega x)$ при $x \geq x_*$. В теории рассеяния функцию $e(x, \omega)$ называют *решением Йоста* [1–6] Она является аналитической функцией переменной ω и при $|\omega| \to \infty$ вместе с производной $e_x(x, \omega)$ может быть представлена в виде

$$e^{(k)}(x, \omega) = (i\omega)^k e^{i\omega x}[1], \tag{10}$$

где $[1] = 1 + O(\frac{1}{\omega})$ равномерно относительно x.

Кроме того, для всякого $\omega \neq 0$ функции $e(x, \omega)$ и $e(x, -\omega)$ образуют пару линейно независимых решений уравнения (6) с условиями склейки (9), причем их вронскиан $e(x, \omega)e_x(x, -\omega) - e_x(x, \omega)e(x, -\omega)$ не зависит от x и равен $-2i\omega$.

Обозначим через $E(x, \omega)$ решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям склейки (7) и совпадающее с $exp(i\omega x)$ при $x \geq x_*$. Отметим, что это решение однозначно определено. Действительно, в силу свойств коэффициента $q(x)$ на интервале (x_1, x_0) функция $E(x, \omega)$ является решением задачи Коши для уравнения (6) с начальными данными $u|_{x=a} = exp(i\omega x_*)$, $u_x|_{x=a} = i\omega exp(i\omega x_*)$. Более того, односторонние пределы справа $u|_{x=x_1+0}$, $u_x|_{x=x_1+0}$ однозначно определены и конечны. Это означает, что с помощью условий склейки (7) мы можем однозначно определить односторонние пределы слева $u|_{x=x_1-0}$, $u_x|_{x=x_1-0}$. Приняв эти значения за начальные данные в интервале (x_2, x_1) с учетом свойств коэффициента $q(x)$, мы можем продолжить наше решение $E(x, \omega)$ на весь этот интервал. Причем односторонние пределы справа $u|_{x=x_2+0}$, $u_x|_{x=x_2+0}$ также будут однозначно определены и конечны, и, следовательно, в силу свойств коэффициента $q(x)$ и условий склейки мы можем однозначно продолжить решение $E(x, \omega)$ на все оставшиеся интервалы, т. е. на все множество $\bigcup_{k=0}^{n}(x_{k+1}, x_k)$. Поскольку матрица перехода в (7) не зависит от параметра ω, то решение $E(x, \omega)$ имеет ту же гладкость относительно параметра ω, что и начальные данные.

В дальнейшем функцию $E(x, \omega)$ будем называть *решением Йоста* системы (6)–(7), функцию $J(\omega) = E_x(0, \omega) - hE(0, \omega)$ — *функцией Йоста* системы (6)–(8).

Традиционная обратная задача геофизики для системы (1)–(5) состоит в определении акустического импеданса σ по результатам измерений волновых полей, инициируемых внешними источниками возмущений. Известно [1–4], что если коэффициенты ρ, μ являются дважды непрерывно дифференцируемыми на полуоси $z \geq 0$, то эта обратная задача сводится к восстановлению гладкого коэффициента σ по функции Йоста $j(\omega)$. Мы рассмотрим аналогичную задачу о восстановлении разрывного коэффициента σ по функции Йоста $J(\omega)$. Эта задача до сих пор открыта и изучена лишь в случае одного разрыва [7; 8]. Случай кусочно-постоянного коэффициента σ с количеством разрывов $n \geq 2$ был исследован в работе [9]. В настоящей работе будет показано, что для поиска точек разрыва $x_1, \dots, x_n$ акустического импеданса σ и величин $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ для системы (6)–(8) достаточно знать асимптотику функции Йоста $J(\omega)$ при $|\omega| \to \infty$. Эта задача может быть интересна также в теории рассеяния, томографии, дефектоскопии и других приложениях.

1. Асимптотика функции Йоста

Для начала установим связь между решениями Йоста $e(x, \omega)$ и $E(x, \omega)$. Положим $\omega \neq 0$. Тогда на каждом интервале непрерывности коэффициента $q(x)$, т. е. на (x_{k+1}, x_k), $k = 0, \dots, n$, мы можем разложить $E(x, \omega)$ в линейную комбинацию $e(x, \omega)$, $e(x, -\omega)$:

$$E(x, \omega) = \alpha^k(\omega) e(x, \omega) + \beta^k(\omega) e(x, -\omega). \tag{11}$$

Поскольку $E(x, \omega) = e(x, \omega) = e^{i\omega x}$ при $x \geq x_*$, то $E(x, \omega) = e(x, \omega)$ при $x > x_1$, т. е. $\alpha^0(\omega) \equiv 1$, $\beta^0(\omega) \equiv 0$. Подставив представление (11) в условия склейки (7), мы получаем

$$\begin{bmatrix} \alpha^k(\omega) \\ \beta^k(\omega) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} e(x_k, \omega) & e(x_k, -\omega) \\ e_x(x_k, \omega) & e_x(x_k, -\omega) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_k^{-1} & 0 \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(x_k, \omega) & e(x_k, -\omega) \\ e_x(x_k, \omega) & e_x(x_k, -\omega) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{k-1}(\omega) \\ \beta^{k-1}(\omega) \end{bmatrix}$$

в каждой точке разрыва x_k, $k = 1, \dots, n$. Отсюда и из асимптотики (10) решения Йоста $e(x, \omega)$ заключаем

$$\begin{bmatrix} \alpha^k(\omega) \\ \beta^k(\omega) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_k^+[1] & a_k^- e^{-2i\omega x_k}[1] \\ a_k^- e^{2i\omega x_k}[1] & a_k^+[1] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{k-1}(\omega) \\ \beta^{k-1}(\omega) \end{bmatrix}, \text{ при } |\omega| \to \infty. \tag{12}$$

Здесь $a_k^+ = \frac{a_k^{-1} + a_k}{2}$, $a_k^- = \frac{a_k^{-1} - a_k}{2}$, $k = 1, \dots, n$.

Обозначим через $\mathcal{I}^k$ множество мультииндексов I_k длины $k = 1, \dots, n$. Компонентами мультииндекса I_k являются числа $1, 0, -1$, подчиненные следующему правилу: знаки ненулевых компонент I_k чередуются, а первая ненулевая компонента равна 1.

Для $I_k = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}^k$ и $X_k = (x_1, \dots, x_k)$ положим $A(I_k) = \prod\limits_{m=1}^{k} a_m^+ (\frac{a_m^-}{a_m^+})^{|i_m|}$ и $|I_k| = \sum\limits_{m=1}^{k} i_m$. Через $(I_k, X_k) = I_k X_k^T = \sum\limits_{m=1}^{k} i_m x_m$ будем обозначать скалярное произведение векторов I_k и X_k. Здесь T — знак транспонирования.

Лемма 1. *Для $k = 1, \dots, n$ при $|\omega| \to \infty$ справедливо*

$$\alpha^k(\omega) = \sum_{I_k \in \mathcal{I}^k : |I_k| = 0} (A(I_k) e^{2i\omega(I_k, X_k)}[1]), \quad \beta^k(\omega) = \sum_{I_k \in \mathcal{I}^k : |I_k| = 1} (A(I_k) e^{2i\omega(I_k, X_k)}[1]). \tag{13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы будем доказывать с помощью математической индукции.

При $k = 1$ очевидно, что лемма верна. Предположим, что формулы в (13) верны для некоторого $k = 1, \dots, n-1$. Тогда они вместе с рекуррентной формулой (12) дают

$$\alpha_{k+1}(\omega)=a^+_{k+1}[1]\sum_{I_k\in\mathcal{I}^k:|I_k|=0}(A(I_k)e^{2i\omega(I_k,X_k)}[1])+$$
$$+a^-_{k+1}e^{-2i\omega x_{k+1}}[1]\sum_{I_k\in\mathcal{I}^k:|I_k|=1}(A(I_k)e^{2i\omega(I_k,X_k)}[1])=$$
$$=\sum_{I_k\in\mathcal{I}^k\,:\,|I_k|=0}(A((I_k,0))e^{2i\omega((I_k,0),(X_k,x_{k+1}))}[1])+$$
$$+\sum_{I_k\in\mathcal{I}^k:|I_k|=1}(A((I_k,-1))e^{2i\omega((I_k,-1),(X_k,x_{k+1}))}[1]).$$

В терминах множества мультииндексов $\mathcal{I}^{k+1}$ можем переписать

$$\alpha_{k+1}(\omega)\;=\sum_{\substack{I_{k+1}\in\mathcal{I}^{k+1}:\\|I_{k+1}|=0,\;i_{k+1}=0}}\left(A(I_{k+1})e^{2i\omega(I_{k+1},X_{k+1})}[1]\right)\;+\sum_{\substack{I_{k+1}\in\mathcal{I}^{k+1}:\\|I_{k+1}|=0,\;i_{k+1}=-1}}\left(A(I_{k+1})e^{2i\omega(I_{k+1},X_{k+1})}[1]\right).$$

Заметим, что

$$\{I_{k+1}\in\mathcal{I}^{k+1}:|I_{k+1}|=0,i_{k+1}=0\}\bigcup\{I_{k+1}\in\mathfrak{I}^{k+1}:|I_{k+1}|=0,i_{k+1}=-1\}=$$
$$=\{I_{k+1}\in\mathcal{I}^{k+1}:|I_{k+1}|=0\}.$$

Следовательно,

$$\alpha^{k+1}(\omega)\;\;=\sum_{\substack{I_{k+1}\in\mathcal{I}^{k+1}:\\|I_{k+1}|=0}}\left(A(I_{k+1})e^{2i\omega(I_{k+1},X_{k+1})}[1]\right).$$

Аналогично доказываем

$$\beta^{k+1}(\omega)\;\;=\sum_{\substack{I_{k+1}\in\mathcal{I}^{k+1}:\\|I_{k+1}|=1}}\left(A(I_{k+1})e^{2i\omega(I_{k+1},X_{k+1})}[1]\right).$$

Лемма доказана. □

Из (11) и (13) получаем, что на интервале (x_{k+1},x_k), $k=1,\dots,n$, при $|\omega|\to\infty$

$$E(x,\omega)\;=\sum_{\substack{I_k\in\mathcal{I}^k\,:\\|I_k|=0}}\left(A(I_k)e^{2i\omega((I_k,X_k)+\frac{x}{2})}[1]\right)\;+\sum_{\substack{I_k\in\mathcal{I}^k\,:\\|I_k|=1}}\left(A(I_k)e^{2i\omega((I_k,X_k)-\frac{x}{2})}[1]\right).$$

Отсюда можем заключить, что при $|\omega|\to\infty$

$$\frac{J(\omega)}{i\omega}=\sum_{I_n\in\mathcal{I}^n}(-1)^{|I_n|}A(I_n)e^{2i\omega I_n\cdot X_n}+O(\frac{1}{\omega})=$$
$$=\mathcal{A}_1\exp(2i\omega\pi_1)+\ldots+\mathcal{A}_N\exp(2i\omega\pi_N)+O(\frac{1}{\omega}).$$

Получаем, что асимптотика $\frac{J(\omega)}{i\omega}$ на бесконечности разлагается в сумму почти периодической функции $\mathcal{P}(\omega)=\mathcal{A}_1\exp(2i\omega\pi_1)+\ldots+\mathcal{A}_N\exp(2i\omega\pi_N)$ и функции класса $O(\frac{1}{\omega})$. Числа $\{\pi_k\}$ условно будем называть *периодами*, а числа $\{\mathcal{A}_k\}$ — *амплитудами*. Все периоды образуют *спектр периодов* $\mathcal{SP}=\{\pi_k\}_{k=1,\dots,N}$, а вместе с амплитудами — *полный спектр пар* $\mathcal{FSP}=\{[\pi_k,\mathcal{A}_k]\}_{k=1,\dots,N}$.

Известно [10], что почти периодическая функция однозначно определяется ее показателями и коэффициентами Фурье, причем для их восстановления достаточно знания асимптотики этой функции на бесконечности. Таким образом, привлекая теорию почти периодических функций, мы можем найти все периоды и амплитуды как показатели и коэффициенты Фурье почти периодической функции $\mathcal{P}(\omega)$, т. е. мы восстановим спектр периодов $\mathcal{SP}$ и полный спектр пар $\mathcal{FSP}$.

В дальнейшем мы требуем, чтобы точки $x_1, \ldots, x_n$ были несоизмеримы: никакая их линейная комбинация с целыми коэффициентами не равна нулю. Сделаем следующую невырожденную замену переменных:

$$s_1 = i_1,\ s_2 = i_1 + i_2,\ \ldots\ ,\ s_n = i_1 + \ldots + i_n.$$

В этих новых переменных структура множества мультииндексов $\mathcal{I}^n$ упрощается и имеет вид

$$\mathcal{S}^n = \{S = (s_1, \ldots, s_n) \mid i_k \in \{0, 1\},\ k = 1, \ldots, n\}.$$

Таким образом, мы получаем равномощное множество мультииндексов $\mathcal{S}^n$. Отсюда, кстати, сразу видно, чему равна мощность множества $\mathcal{S}^n$, которая совпадает с количеством периодов N при условии несоизмеримости точек $x_1, \ldots, x_n$: каждое s_k может независимо принимать одно из двух значений $\{0, 1\}$, следовательно, $N = 2^n$. Количество точек разрыва n можно найти по N как $n = \ln N / \ln 2$. Не нарушая общности, будем полагать $\pi_1 < \ldots < \pi_N$.

Периоды в новых переменных имеют вид

$$(I_n, X_n) = I_n X_n^T = i_1 x_1 + \ldots i_n x_n = s_1 x_1 + (s_2 - s_1) x_2 + \ldots + (s_n - s_{n-1}) x_n =$$
$$= s_1 (x_1 - x_2) + \ldots s_{n-1}(x_{n-1} - x_n) + s_n x_n = s_1 y_1 + \ldots + s_n y_n = S Y^T = (S, Y),$$

т. е. вместо $x_1, \ldots, x_n$ мы будем искать эквивалентный набор $y_1, \ldots, y_n$.

Амплитуды в новых переменных имеют вид

$$(-1)^{|I_n|} A(I_n) = (-1)^{|I_n|} \prod_{k=1}^{n} a_k^+ \Big(\frac{a_k^-}{a_k^+}\Big)^{|i_k|} = (-1)^{s_n} \prod_{k=1}^{n} a_k^+ \Big(\frac{a_1^-}{a_1^+}\Big)^{s_1} \prod_{k=2}^{n} \Big(\frac{a_k^-}{a_k^+}\Big)^{|s_k - s_{k-1}|} = C(S)\,.$$

Заметим, что величина $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k^+ = C((0, \ldots, 0))$ известна, так как мы можем сразу найти ее из полного спектра пар $\mathcal{FSP}$ как амплитуду при нулевом периоде $((0, \ldots, 0), Y) = 0 = \pi_1$. Поэтому, не нарушая общности, положим $C((0, \ldots, 0)) = 1 = \mathcal{A}_1$.

Обозначим через $d_k = \frac{a_k^-}{a_k^+} = \frac{2}{1+\sigma_k} - 1$. Отсюда видно, что если мы однозначно восстановим набор $d_1, \ldots, d_n$, то найдем искомые $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Отметим, что величина $0 < |d_k| < 1$, так как $\sigma_k \neq 1$ и $\sigma_k > 0$. Отсюда получаем следующее представление для амплитуд:

$$C(S) = C(S, D) = (-1)^{s_n} d_1^{s_1} \prod_{k=2}^{n} d_k^{|s_k - s_{k-1}|}, \quad k = 1, \ldots, n, \ \ D = (d_1, \ldots, d_n). \tag{14}$$

Таким образом, поставленная обратная задача сводится к обратной задаче о восстановлении векторов $Y = (y_1, \ldots y_n)$ и $D = (d_1, \ldots, d_n)$ по спектру периодов $\mathcal{SP}$ и полному спектру пар $\mathcal{FSP}$.

2. Единственность решения обратной задачи

Будем говорить, что вектор $\widetilde{Y} = (\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n)$ *порождает* спектр периодов $\mathcal{SP}$, если $\bigcup\limits_{S \in \mathcal{S}^n} \{(S, \widetilde{Y})\} = \mathcal{SP}$, а вместе с вектором $\widetilde{D} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n)$ — полный спектр пар $\mathcal{FSP}$, если $\bigcup\limits_{S \in \mathcal{S}^n} \{[(S, \widetilde{Y}), C(S, \widetilde{D})]\} = \mathcal{FSP}$. Очевидно, что искомый вектор Y порождает спектр периодов $\mathcal{SP}$, а вместе с искомым вектором D — полный спектр пар $\mathcal{FSP}$.

Теорема 1. *Пусть вектор $\widetilde{Y}$ порождает спектр периодов $\mathcal{SP}$, тогда существует единственная перестановка P такая, что $\widetilde{Y}^T = PY^T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор $\widetilde{Y}$, так же как и искомый вектор Y, порождает спектр периодов $\mathcal{SP}$. Заметим, что каждая компонента вектора $\widetilde{Y}$ принадлежит $\mathcal{SP}$. Поэтому в силу несоизмеримости компонент $y_1, \ldots, y_n$ для каждой компоненты $\widetilde{y}_k$, $k = 1, \ldots, n$, существует единственный мультииндекс $P_k = (p_{k1}, \ldots, p_{kn}) \in \mathcal{S}^n$ такой, что $\sum\limits_{m=1}^{n} p_{km} \geq 1$ и $\widetilde{y}_k = P_k Y^T$. Следовательно, $\widetilde{Y}$ и Y связаны между собой квадратной матрицей $P = ||p_{km}||_{k,m=1}^{n}$, т. е. $\widetilde{Y}^T = PY^T$, причем элементы матрицы P состоят из нулей и единиц, а каждая ее строка содержит хотя бы одну единицу.

Для того чтобы матрица P была перестановкой, осталось показать, что каждый столбец матрицы P содержит только одну единицу. Наибольший период π_N можно записать двумя способами:

$$\pi_N = ((1, \ldots, 1), Y) \quad \text{и} \quad \pi_N = ((1, \ldots, 1), \widetilde{Y}) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{y}_k = \sum_{k=1}^{n} (P_k, Y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} P_k, Y\Big).$$

Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n} P_k = (1, \ldots, 1)$, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} p_{km} = 1$ для каждого $m = 1, \ldots, n$, и, значит, каждый столбец матрицы P содержит только одну единицу. □

Лемма 2. *Векторы $\widetilde{Y}, \widetilde{D}$ порождают полный спектр пар $\mathcal{FSP}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{Y}^T = PY^T$, где P — перестановка, и $C(\widetilde{S}, \widetilde{D}) = C(\widetilde{S}P, D)$ для каждого мультииндекса $\widetilde{S} \in \mathcal{S}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть векторы $\widetilde{Y}, \widetilde{D}$, так же как и искомые векторы Y, D, порождают полный спектр пар $\mathcal{FSP}$. Следовательно, для каждой пары $[\pi, \mathcal{A}] \in \mathcal{FSP}$ в силу несоизмеримости компонент как вектора $\widetilde{Y}$, так и вектора Y, существуют единственные мультииндексы $\widetilde{S}, S \in \mathcal{S}^n$ такие, что $(\widetilde{S}, \widetilde{Y}) = \pi = (S, Y)$ и $C(\widetilde{S}, \widetilde{D}) = \mathcal{A} = C(S, D)$. т. е. векторы $\widetilde{Y}$ и Y порождают один и тот же спектр периодов $\mathcal{SP}$ и для каждого мультииндекса $\widetilde{S} \in \mathcal{S}^n$ существует единственный мультииндекс $S \in \mathcal{S}^n$ такой, что $C(\widetilde{S}, \widetilde{D}) = C(S, D)$.

По теореме 1, существует единственная перестановка P такая, что $\widetilde{Y}^T = PY^T$. Отсюда и из равенства соответствующих периодов имеем $(S, Y) = (\widetilde{S}, \widetilde{Y}) = \widetilde{S}\widetilde{Y}^T = \widetilde{S}PY^T = (\widetilde{S}P, Y)$, т. е. $S = \widetilde{S}P$. Следовательно, для каждого мультииндекса $\widetilde{S} \in \mathcal{S}^n$ выполнено $C(\widetilde{S}, \widetilde{D}) = C(\widetilde{S}P, D)$.

Обратно, пусть $\widetilde{Y}^T = PY^T$. Поскольку P перестановка, то вектор $\widetilde{Y}$ также порождает спектр периодов $\mathcal{FSP}$. В силу несоизмеримости компонент вектора $\widetilde{Y}$ существуют единственные мультииндексы $\widetilde{S}, S \in \mathcal{S}^n$ такие, что $(\widetilde{S}, \widetilde{Y}) = \pi = (S, Y)$. Следовательно,

$S = \widetilde{S}P$. Напомним, что перестановка P является ортогональной матрицей. Поэтому $SP^T = \widetilde{S}PP^T = \widetilde{S}$. Учитывая условие теоремы, т. е. $C(\widetilde{S}, \widetilde{D}) = C(\widetilde{S}P, D)$ для каждого мультииндекса $\widetilde{S} \in \mathcal{S}^n$, получаем цепочку равенств

$$\bigcup_{\widetilde{S}\in\mathcal{S}^n} \{[(\widetilde{S}, \widetilde{Y}), C(\widetilde{S}, \widetilde{D})]\} = \bigcup_{\widetilde{S}\in\mathcal{S}^n} \{[(\widetilde{S}, \widetilde{Y}), C(\widetilde{S}P, D)]\} =$$
$$= \bigcup_{SP^T\in\mathcal{S}^n} \{[(S, Y), C(S, D)]\} = \bigcup_{S\in\mathcal{S}^n} \{[(S, Y), C(S, D)]\} = \mathcal{FSP}\,.$$

□

Теорема 2. *Пусть векторы $\widetilde{Y}, \widetilde{D}$ порождают полный спектр пар $\mathcal{FSP}$, тогда $\widetilde{Y} = Y$, $\widetilde{D} = D$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть векторы $\widetilde{Y}, \widetilde{D}$, так же как и искомые векторы Y, D, порождают полный спектр пар $\mathcal{FSP}$. Тогда вектор $\widetilde{Y}$ порождает спектр периодов $\mathcal{SP}$ и, следовательно, по теореме 1, существует единственная перестановка P, связывающая векторы $\widetilde{Y}, Y$ как $\widetilde{Y}^T = PY^T$, для которой возможны два случая: либо $P = E$, либо $P \neq E$.

Рассмотрим первый случай. Обозначим через $\widetilde{S}(k) \in \mathcal{S}^n$ мультииндекс, у которого k-я компонента — единица, а все остальные — нули. Тогда $\sum\limits_{m=k}^{n} \widetilde{S}(m)$ — мультииндекс, у которого до k-й компоненты стоят нули, а с k-й — единицы. Из (14) видно:

$$C(\sum_{m=k}^{n} \widetilde{S}(m), \widetilde{D}) = -\widetilde{d}_k, \quad C(\sum_{m=k}^{n} \widetilde{S}(m), D) = -d_k.$$

Но поскольку амплитуды при одинаковых периодах $(\sum\limits_{m=k}^{n} \widetilde{S}(m), \widetilde{Y}) = (\sum\limits_{m=k}^{n} \widetilde{S}(m), Y)$ совпадают, то $\widetilde{d}_k = d_k$ для каждого $k = 1, \ldots, n$. Получается, что $\widetilde{Y} = Y$ и $\widetilde{D} = D$.

Рассмотрим второй случай. Поскольку P не является тождественной перестановкой, то существует номер $k = 1, \ldots, n-1$, начиная с которого последовательность компонент мультииндекса $S = \widetilde{S}P$ не совпадает с соответствующими компонентами мультииндекса $\widetilde{S}$, т. е. $s_1 = \widetilde{s}_1, \ldots, s_{k-1} = \widetilde{s}_{k-1}, s_k \neq \widetilde{s}_k$, а компонента s_k меняется местами с некоторой компонентой, лежащей правее нее. Обозначим через $m_k = k+1, \ldots, n$ номер этой компоненты. Тогда

$$\widetilde{S}(k)P = (0, \ldots, 0, 1_k, 0, \ldots, 0)P = (0, \ldots, 0, 1_{m_k}, 0, \ldots, 0) = S(m_k),$$

т. е. в мультииндексе $\widetilde{S}(k)$ перестановка P меняет единицу на k-й позиции на нуль, а нуль на m_k-й позиции — на единицу. Также

$$\sum_{m=k+1}^{n} \widetilde{S}(m)P = (0, \ldots, 0, 1_{k+1}, 1, \ldots, 1)P = (0, \ldots, 0, 1_k, 1, \ldots, 1, 0_{m_k}, 1, \ldots, 1),$$

т. е. в мультииндексе $\sum\limits_{m=k+1}^{n} \widetilde{S}(m)$ перестановка P меняет нуль на k-й позиции на единицу, а единицу на m_k-й позиции — на нуль.

В силу леммы 2 и формулы (14) получаем

$$|C(\widetilde{S}(k),\widetilde{D})| = |C(\widetilde{S}(k)P,D)| = \begin{cases} |d_{m_k}d_{m_k+1}|,\ k=1,\dots,n-2,\\ |d_{m_k}|,\ k=n-1;\end{cases}$$

$$\big|C(\sum_{m=k+1}^{n}\widetilde{S}(m),\widetilde{D})\big| = \big|C(\sum_{m=k+1}^{n}\widetilde{S}(m)P,D)\big| = \begin{cases} |d_k d_{m_k}d_{m_k+1}|,\ k=1,\dots,n-2,\\ |d_k d_{m_k}|,\ k=n-1.\end{cases}$$

Поскольку $|d_l|<1,\ l=1,\dots,n$, получаем $|C(\widetilde{S}(k),\widetilde{D})| > |C(\sum\limits_{m=k+1}^{n}\widetilde{S}(m),\widetilde{D})|$.

С другой стороны, $\big|C(\widetilde{S}(k),\widetilde{D})\big| < \big|C(\sum\limits_{m=k+1}^{n}\widetilde{S}(m),\widetilde{D})\big|$, так как по формуле (14)

$$|C(\widetilde{S}(k),\widetilde{D})| = |\widetilde{d}_k\widetilde{d}_{k+1}|,\ \ |C(\sum_{m=k+1}^{n}\widetilde{S}(m),\widetilde{D})| = |\widetilde{d}_{k+1}|.$$

Пришли к противоречию, и, следовательно, $P=E$. □

Итак, мы доказали единственность восстановления искомых векторов $Y=(y_1,\dots,y_n)$ и $D=(d_1,\dots,d_n)$ по полному спектру пар $\mathcal{FSP}$. Перейдем далее к вопросу построения алгоритма восстановления Y,D.

3. Решение обратной задачи

На основании теоремы 1 построим алгоритм восстановления искомого вектора $Y=(y_1,\dots,y_n)$ с точностью до перестановки компонент, а именно в виде вектора $Z=(z_1,\dots,z_n)$, $Z^T=PY^T$, где $0<z_1<\dots<z_n$, P — перестановка.

Теорема 3. *Вектор $Z=(z_1,\dots,z_n)$, полученный из искомого вектора $Y=(y_1,\dots,y_n)$ путем упорядочивания ее компонент по возрастанию, восстанавливается из спектра периодов $\mathcal{SP}$ по формуле*

$$z_k = \min \mathcal{SP}\setminus Q(k),\ k=1,\dots,n, \tag{15}$$

где $Q(k)=\begin{cases}\{0\},\ \textit{для}\ k=1,\\ \bigcup\limits_{S\in\mathcal{S}^{k-1}}\{\sum\limits_{m=1}^{k-1}s_m z_m\},\ \textit{для}\ k=2,\dots,n.\end{cases}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость формулы (15) будем доказывать с помощью метода математической индукции.

Пусть $k=1$. Из вида спектра периодов $\mathcal{SP}=\bigcup\limits_{S\in\mathcal{S}^n}\{(S,Z)\}$ видно, что $\min\mathcal{SP}=\pi_1$ есть не что иное, как период $((0,\dots,0),(z_1,\dots,z_n))=0$. Тогда $\min\mathcal{SP}\setminus Q(1)=\pi_2$ есть период $(S(1),Z)=((1,0,\dots,0),(z_1,\dots,z_n))=z_1$.

Предположим, что формула (15) верна для некоторого $k=1,\dots,n-1$. Покажем, что она верна и при $k+1$. Из вида спектра периодов $\mathcal{SP}$ видим, что при $k=1,\dots,n-2$ период $(S(k+1),Z)=((0,\dots 0,1_{k+1},0,\dots,0),(z_1,\dots,z_n))=z_{k+1}$ меньше периодов вида

$$((s_1,\dots,s_k,1,s_{k+2},\dots,s_n),(z_1,\dots,z_n)) = s_1z_1+\dots+s_kz_k+z_{k+1}+s_{k+2}z_{k+2}+\dots+s_nz_n,$$

где $\sum\limits_{m=1}^{k} s_m + \sum\limits_{m=k+2}^{n} s_m \geq 1$ и

$$((s_1,\dots,s_k,0,s_{k+2},\dots,s_n),(z_1,\dots,z_n)) = s_1z_1+\dots+s_kz_k+s_{k+2}z_{k+2}+\dots+s_nz_n,$$

где $\sum\limits_{m=k+2}^{n} s_m \geq 1$, а при $k=n-1$ — периодов вида

$$((s_1,\dots,s_{n-1},1),(z_1,\dots,z_n)) = s_1z_1+\dots+s_{n-1}z_{n-1}+z_n,$$

где $\sum\limits_{m=1}^{n-1} s_m \geq 1$. Все остальные периоды имеют вид $((s_1,\dots,s_k,0,\dots,0),(z_1,\dots,z_n)) = s_1z_1+\dots+s_kz_k$. Но нам уже известны компоненты $z_1,\dots,z_k$. Поэтому мы можем вычислить все эти остальные периоды как суммы элементов всевозможных подмножеств множества $\{z_1,\dots,z_k\}$, т. е. $\bigcup\limits_{S\in\mathcal{S}^k}\{\sum\limits_{m=1}^{k} s_mz_m\} = Q(k+1)$. Тогда $\min\mathcal{SP}\setminus Q(k+1) = z_{k+1}$, т. е. формула (15) верна. □

Таким образом, с помощью формулы (15) мы однозначно восстановим вектор $Z=(z_1,\dots,z_n)$ по спектру периодов $\mathcal{SP}$, т. е. вектор $Y=(y_1,\dots,y_n)$ с точностью до перестановки компонент.

Перейдем к построению алгоритма восстановления векторов $Y=(y_1,\dots,y_n)$, $D=(d_1,\dots,d_n)$ по полному спектру пар $\mathcal{FSP}$ и вектору $Z=(z_1,\dots,z_n)$. Отметим, что все периоды $\pi_1,\dots,\pi_N\in\mathcal{SP}$ по определению различны. Поэтому каждый период $\pi\in\mathcal{SP}$ однозначно определяет и всю пару вместе с соответствующей ему амплитудой $\mathcal{A}$ из полного спектра пар $\mathcal{FSP}$. Обозначим через F соответствие:

$$F(\pi_k)=\mathcal{A}_k,\quad \mathcal{SP}\ni\pi_k\longleftrightarrow[\pi_k,F(\pi_k)]\in\mathcal{FSP},\quad k=1,\dots,N. \tag{16}$$

Иначе говоря, $\mathcal{FSP} = \{[\pi_1,F(\pi_1)],\dots,[\pi_N,F(\pi_N)]\} = \{[\pi,F(\pi)]\mid\pi\in\mathcal{SP}\}$, т. е. $F(\pi)=C(S)$, если $(S,Y)=\pi$.

Для $k=0,\dots,n-2$ положим множество $V(k)=\bigcup\limits_{l=k+1}^{n}\{\frac{C(S(l))}{C(\sum\limits_{m=k+1}^{n} S(m)-S(l))}\}$. Напомним, что $S(m)\in\mathcal{S}^n$, $m=1,..,n$, — это мультииндекс, у которого m-я компонента — единица, а все остальные — нули. Тогда из (14) имеем

$$V(k)=\{\frac{-d_{k+1}d_{k+2}}{d_{k+2}},\frac{-d_{k+2}d_{k+3}}{d_{k+1}d_{k+2}d_{k+3}}\dots,\frac{-d_{n-1}d_n}{d_{k+1}d_{n-1}d_n},\frac{d_n}{d_{k+1}d_n}\}=$$
$$=\{-d_{k+1},\frac{-1}{d_{k+1}},\dots,\frac{-1}{d_{k+1}},\frac{1}{d_{k+1}}\}.$$

Вспомним, что $0<|d_m|<1$, $m=1,\dots,n$. Отсюда видим, что только один элемент множества $V(k)$ по модулю меньше единицы, и, следовательно,

$$d\in V(k),\ |d|<1\implies d_{k+1}=-d. \tag{17}$$

Теорема 4. *Пусть $k=0,\dots,n-2$, наборы $z_1,\dots,z_n$, $y_1,\dots,y_k$ и полный спектр пар $\mathcal{FSP}$ известны. Тогда*

$$V(k)=\bigcup_{\pi\in\{z_1,\dots,z_n\}\setminus\{y_1,\dots,y_k\}}\{\frac{F(\pi)}{F(\sum\limits_{m=1}^{n} z_m-\sum\limits_{m=1}^{k} y_m-\pi)}\}. \tag{18}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (16), т. е. соответствие F периода амплитуде, получаем

$$V(k) = \bigcup_{l=k+1}^{n} \{\frac{F((S(l),Y))}{F(((\sum\limits_{m=k+1}^{n} S(m) - S(l)),Y))}\} = \bigcup_{l=k+1}^{n} \{\frac{F(y_l)}{F(\sum\limits_{m=k+1}^{n} y_m - y_l)}\} =$$

$$= \bigcup_{l=k+1}^{n} \{\frac{F(y_l)}{F(\sum\limits_{m=1}^{n} y_m - \sum\limits_{m=1}^{k} y_m - y_l)}\} = \bigcup_{l=k+1}^{n} \{\frac{F(y_l)}{F(\sum\limits_{m=1}^{n} z_m - \sum\limits_{m=1}^{k} y_m - y_l)}\} =$$

$$= \bigcup_{\pi \in \{z_1,\ldots,z_n\} \setminus \{y_1,\ldots,y_k\}} \{\frac{F(y_l)}{F(\sum\limits_{m=1}^{n} z_m - \sum\limits_{m=1}^{k} y_m - \pi)}\}.$$

□

Итак, опишем алгоритм восстановления векторов $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ и $D = (d_1, \ldots, d_n)$ по полному спектру пар $\mathcal{FSP}$ и вектору $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ с помощью формул (16)–(18).

Для $k = 0$ положим $f(0, \pi) = \frac{F(\pi)}{F(\sum\limits_{m=1}^{n} z_m - \pi)}$ и выберем произвольный элемент $\pi \in \{z_1, \ldots, z_n\}$. Если $|f(0, \pi)| < 1$, то берем $y_1 = \pi$, $d_1 = -f(0, \pi)$ и выбрасываем y_1 из множества $\{z_1, \ldots, z_n\}$. Иначе берем $\widetilde{\pi} \in \{z_1, \ldots, z_n\} \setminus \{\pi\}$ и вычисляем заново $f(0, \widetilde{\pi})$. Найдя y_1, d_1, переходим к следующему шагу.

Допустим, что компоненты $y_1, \ldots, y_k$ найдены для $k = 1, \ldots, n-2$. Выбираем $\pi \in \{z_1, \ldots, z_n\} \setminus \{y_1, \ldots, y_k\}$. Положим $f(k, \pi) = \frac{F(\pi)}{F(\sum\limits_{m=1}^{n} z_m - \sum\limits_{m=1}^{k} y_m - \pi)}$. Если $|f(k, \pi)| < 1$, то берем $y_{k+1} = \pi$, $d_{k+1} = -f(k, \pi)$ и выбрасываем y_{k+1} из $\{z_1, \ldots, z_n\} \setminus \{y_1, \ldots, y_k\}$. Иначе берем $\widetilde{\pi} \in \{z_1, \ldots, z_n\} \setminus \{y_1, \ldots, y_k, \pi\}$ и вычисляем заново $f(k, \widetilde{\pi})$.

Дойдя до $k = n-2$, мы восстановим компоненты $y_1, \ldots, y_{n-1}$ и $d_1, \ldots, d_{n-1}$. Остается найти последние компоненты y_n, d_n. Поскольку по формуле (14) $F(y_{n-1}) = C((0, \ldots, 0, 1, 0), D) = d_{n-1} d_n$, то компонента $d_n = F(y_{n-1})/d_{n-1}$. Оставшуюся компоненту y_n находим как $y_n = \sum\limits_{m=1}^{n} z_m - \sum\limits_{m=1}^{n-1} y_m$ или $y_n = \{z_1, \ldots, z_n\} \setminus \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

Таким образом, если точки разрыва $x_1, \ldots, x_n$ несоизмеримы, т. е. никакая их линейная комбинация с целыми коэффициентами не равна нулю, то асимптотика функции Йоста $J(\omega)$ при $|\omega| \to \infty$ однозначно определяет все точки разрыва $x_k = \sum\limits_{m=k}^{n} y_m$ и величины $\sigma_k = \frac{2}{1+d_k} - 1$ акустического импеданса σ. Построен алгоритм, позволяющий находить величины x_k, σ_k за конечное число шагов.

Список литературы

1. *Alekseev A. S., Belonosov V. S.* The Scattering of Plane Waves in Inhomogeneous Half-Space // Appl. Math. Lett. 1995. Vol. 8. No. 2. P. 13–19.

2. *Alekseev A. S., Belonosov V. S.* Direct and Inverse Problems Associated with Inclined Passing Of SH-Waves through 1D Inhomogeneous Medium // Bull. NCC. Ser. Num. Anal. 1994. Is. 8. P. 1–25.

3. *Алексеев А. С., Белоносов В. С.* Спектральные методы в одномерных задачах теории распространения волн // Тр. ИВМиМГ. Мат. модел. в геофизике. Новосибирск, 1998. Т. 6. С. 7–39.

4. *Alekseev A. S., Belonosov V. S.* Direct and Inverse Problems of Wave Propagation through a One-Dimensional Inhomogenious Medium // Euro. J. of Appl. Math. 1999. Vol. 10. P. 79–96.

5. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.

6. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

7. *Shepelsky D. G.* The Inverse Problem of Reconstruction of the Medium'S Conductivity in a Class of Discontinuous and Increasing Funtions // Adv. in Soviet Math. 1994. Vol. 19. P. 209–231.

8. *Freiling G., Yurko V.* Inverse Spectral Problems for Singular Non-Selfadjoint Differential Operators with Discontinuities in an Interior Point // Inverse Problems. 2002. Vol. 18. C. 757–773.

9. *Шестаков А. И.* Обратная спектральная задача для операторов Штурма — Лиувилля с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, №. 5. P. 1142–1162.

10. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. М.: Гос. изд-во теор. техн. лит., 1953.

Материал поступил в редколлегию 16.12.2009

Адрес автора

СЕДИПКОВ Айдыс Алексеевич

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: sedipkov@gmail.com