

В. М. Ковеня, М. П. Кузьмин, Р. С. Полторацкий

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПРЕДИКТОР-КОРРЕКТОР ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА СЖИМАЕМОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА *

В работе для численного решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса сжимаемого газа предложена модификация разностной схемы предиктор-корректор. Схема основана на специальной аппроксимации операторов на этапе предиктора, требующих минимального числа операций на узел сетки, и обладает повышенной устойчивостью за счет согласованной аппроксимации операторов на этапе предиктора и корректора. Исследованы свойства базовых разностных схем и показано преимущество предложенного алгоритма. Проведенные расчеты тестовых течений в канале и течений за уступом подтвердили достаточную точность предложенного алгоритма и его эффективность.

Ключевые слова: уравнения Эйлера и Навье–Стокса, разностная схема, метод предиктор-корректор.

Введение

Уравнения Эйлера и Навье–Стокса вязкого теплопроводного газа широко используются при решении различных классов задач аэродинамики. В силу нелинейности исходных уравнений их решения характеризуются, как правило, наличием подобластей больших градиентов и других особенностей типа пограничных слоев, висячих скачков, отрывных зон и т. д., что накладывает жесткие требования на применяемые численные алгоритмы. Эти алгоритмы должны обладать необходимой точностью, иметь достаточный запас устойчивости, удовлетворять свойствам консервативности и экономичности с возможностью получения решения задачи за разумное время на существующих ЭВМ. При решении уравнений Навье–Стокса использование явных схем неэффективно в силу жестких ограничений на соотношение временного и пространственных шагов расчетной сетки, особенно при нахождении стационарного решения методом установления, поэтому наиболее часто используются неявные разностные схемы, безусловно устойчивые или имеющие более слабые ограничения на устойчивость. Обзор наиболее употребительных численных алгоритмов приведен, например, в работах [1–8].

При построении неявных разностных схем обычно используются методы факторизации и расщепления (см. [5–8]), позволяющие свести решение исходных многомерных задач к последовательному решению их одномерных аналогов. Как правило, решение одномерных задач приводит к необходимости обращения матриц размером $m \times m$, где m — число уравнений, требующих $\approx m^3$ операций в каждом узле сетки. Увеличение количества уравнений приводит к степенному росту числа арифметических операций на

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00294-а), Интеграционного проекта СО РАН № 103.

узел расчетной сетки. Для получения экономичных алгоритмов возможно введение расщепления и в одномерных операторах таким образом, чтобы сохранялась безусловная устойчивость разностных схем, но их реализация могла бы находиться более эффективными алгоритмами, например скалярными прогонками. Такой подход, основанный на методе расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям, был предложен в работе [5]. Отметим, что введение расщепления операторов в исходной задаче приводит к появлению дополнительных членов в разностной схеме – диссипативных членов и членов более высокого порядка, что, как следствие, приводит к ухудшению свойств численного алгоритма. Поэтому при построении экономичных алгоритмов расщепление операторов следует выбирать таким образом, чтобы минимизировать влияние этих членов.

В работах [5; 10] были предложены разностные схемы приближенной факторизации и предиктор-корректор, основанные на расщеплении исходных многомерных уравнений по направлениям с последующим расщеплением одномерных задач таким образом, чтобы реализация схем на дробных шагах сводилась к скалярным прогонкам. Эти схемы экономичны по числу операций на узел сетки, обладают большим запасом устойчивости, а влияние расщепления в них минимально. Однако на дробных шагах использовалась аппроксимация исходных уравнений в недивергентном виде, что могло приводить к понижению точности при расчете разрывных течений или течений с большими градиентами. В данной работе предложены разностные схемы типа предиктор-корректор для численного решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса, аппроксимация которых на дробных шагах на этапе предиктора выбирается в почти консервативной форме. Проведено тестирование предложенного алгоритма на решении задачи о течении вязкого газа в канале и приведены результаты расчетов течения газа за уступом при различных числах Маха и Рейнольдса.

1. Схема для одномерных уравнений

Построение разностных схем, основанных на расщеплении операторов, изложим вначале для одномерных уравнений Эйлера и Навье–Стокса в декартовых координатах, а затем дадим их обобщение на многомерный случай. Запишем систему уравнений в дивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad p = p(\rho, e), \quad e = e(T), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p - \mu \frac{\partial v}{\partial x} \\ v(E + p) - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} - \mu v \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad E = \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right).$$

Здесь, как обычно, приняты следующие обозначения: ρ, v, p, T – плотность, скорость, давление и температура, μ, κ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, которые будем полагать известными функциями, например, от температуры. При $\mu = \kappa = 0$ уравнения (1) переходят в уравнения Эйлера. Выбирая в качестве искомых функций

вектор $\mathbf{f} \neq \mathbf{U}$, перепишем уравнения (1) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{V} \mathbf{f} + \mathbf{F}. \quad (2)$$

Очевидно, выбор вектора \mathbf{f} задает вид матричного оператора \mathbf{V} . Для различных компонент вектора \mathbf{f} вид оператора \mathbf{V} различен, что дает возможность строить различные классы разностных схем. Для уравнений Эйлера наиболее целесообразно выбирать в качестве искомых функций плотность, скорость (или импульс) и давление, так как именно для этих функций обычно задаются краевые условия. Пусть, для определенности, уравнение состояния задано в виде $p = (\gamma - 1)\rho e$, $e = c_v T$. Тогда в (2) в уравнениях Эйлера для вектора $\mathbf{f} = (\rho, \rho v, p)^T$ матричный оператор \mathbf{V} принимает вид

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} v & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} v & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & c^2 \frac{\partial}{\partial x} & v \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = 0, \quad c^2 = \gamma p. \quad (3)$$

Отметим, что при записи уравнений в форме (2), (3) уравнения неразрывности и движения выбраны в дивергентной форме, а уравнение энергии — в недивергентной. При записи уравнений Навье–Стокса (2) в качестве искомых функций выберем плотность, импульс и температуру. Тогда

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \frac{\mu}{\rho c_v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} v & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} & \frac{\partial}{\partial x} a^2 \\ 0 & c^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} & v \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\rho c_v} \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix},$$

где $a^2 = (\gamma - 1)\rho c_v$, $c^2 = (\gamma - 1)T$. Отметим подобие формы матричных операторов \mathbf{V} для уравнений Эйлера (3) и Навье–Стокса (4), поэтому в дальнейшем ограничимся изложением численного алгоритма для уравнений Навье–Стокса, так как для уравнений Эйлера алгоритмы строятся аналогично.

Введем в расчетной области $\Omega = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$ разностную сетку с временным и пространственным шагом τ , h соответственно. Аппроксимируем первые производные в операторе \mathbf{V} разностными операторами Λ или $\bar{\Lambda}$ с порядком $O(h)$ по формулам (см. [5; 7]):

$$\text{если } v \leq 0, \text{ то } \Lambda = \Lambda_+, \bar{\Lambda} = \Lambda_-, \text{ иначе, если } v > 0, \text{ то } \Lambda = \Lambda_-, \bar{\Lambda} = \Lambda_+.$$

Здесь $\Lambda = \pm(T_{\pm 1} - I)/h$, $T_{\pm 1} f_l = f_{l \pm 1}$ — оператор сдвига, а вторые производные аппроксимируем симметричными операторами со вторым порядком:

$$\Lambda k_l \Lambda f_l = [k_{l+1/2}(f_{l+1} - f_l) - k_{l-1/2}(f_l - f_{l-1})] / h^2 = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial f}{\partial x} + O(h^2),$$

$$k_{l \pm 1/2} = (k_{l \pm 1/2} + k_l) / 2.$$

Вектор потоков $\partial \mathbf{W} / \partial x$ в консервативной форме аппроксимируем симметричным оператором $\Lambda \mathbf{W}$ со вторым порядком со сглаживанием по формулам

$$\Lambda W_l = \frac{W_{l+1} - W_{l-1}}{2h} - a \cdot \text{sign}(v) \varepsilon \frac{h}{2} \frac{W_{l+1} - 2W_l + W_{l-1}}{h^2}, \quad (5)$$

где $\varepsilon = \frac{|W_{l+1} - 2W_l + W_{l-1}|}{|W_{l+1} - W_l| + |W_l - W_{l-1}|}$ или $\varepsilon = 0$, если $|W_{l+1} - W_l| + |W_l - W_{l-1}| = 0$.

Введенный в (5) сглаживающий оператор имеет второй порядок малости и служит для устранения осцилляций, присущих симметричным схемам второго порядка аппроксимации [9]. С учетом введенных обозначений получим: $B_h = B + O(h)$, $\Lambda \mathbf{W} = \partial \mathbf{W} / \partial x + O(h^2)$ и

$$B_h = \begin{pmatrix} \Lambda v^n & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda v^n - b_1 & \bar{\Lambda}(a^2)^n \\ 0 & (c^2)^n \Lambda & v^n \Lambda - b_2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \Lambda \mu \Lambda \frac{1}{\rho}, \quad b_2 = \frac{1}{\rho c_v} \Lambda k \Lambda.$$

Отметим, что для получения безусловно устойчивых схем аппроксимацию давления в уравнении движения в операторе B_h необходимо выбирать по сопряженным к конвективным членам формулам [5; 10]. Для построения экономичных разностных схем, реализуемых скалярными прогонками, представим матричный оператор в виде суммы двух операторов

$$B_h = B_h^1 + B_h^2. \quad (6)$$

Разностная схема предиктор-корректор

$$\begin{aligned} (I + \tau \alpha B_h^1) \mathbf{f}^{n+1/4} &= \mathbf{f}^n, \\ (I + \tau \alpha B_h^2) \mathbf{f}^{n+1/2} &= \mathbf{f}^{n+1/4}, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda \mathbf{W}_h^{n+1/2} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

аппроксимирует исходные уравнения Навье–Стокса с порядком $O(\tau^2 + \tau h + h^2)$ при $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ и линейна, так как на этапе предиктора на дробных шагах коэффициенты матричных операторов B_h^j ($j = 1, 2$) аппроксимируются на нижнем слое. Она консервативна при решении нестационарных и стационарных задач, так как основана на аппроксимации уравнений (1) на этапе корректора в дивергентной форме.

Введение расщепления операторов приводит к появлению в разностной схеме (7), дополнительных членов $\tau^2 \alpha^2 B_h^1 B_h^2$ — диссипативных членов второго порядка малости. Поэтому расщепление матричных операторов B_h следует выбирать таким образом, чтобы построенные разностные схемы имели минимальную диссипацию и сохраняли свойство безусловной устойчивости. Для вектора искомых функций $\mathbf{f} = (\rho, \rho v, T)^T$ существует единственное расщепление (6) оператора B_h в виде

$$B_h^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\Lambda} a^2 \\ 0 & c^2 \Lambda \frac{1}{\rho} & v \Lambda - b_2 \end{pmatrix}, \quad B_h^2 = \begin{pmatrix} \Lambda v & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda v - b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при котором разностная схема (7) абсолютно устойчива при $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ и может быть реализована скалярными прогонками (спектральный анализ устойчивости схемы

(7) для линейных уравнений Эйлера с «замороженными коэффициентами» приведен в [9]. Заметим, что диссипативный член

$$D = \tau^2 \alpha^2 B_h^1 B_h^2 = \tau^2 \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } d = c^2 \Lambda \frac{1}{\rho} (v\Lambda - b_1),$$

появляется лишь в уравнении энергии. Все другие расщепления приводят или к большему числу дополнительных членов в разностной схеме, или к потере безусловной устойчивости. Подобное расщепление справедливо и для вектора $\mathbf{f} = (\rho, \rho v, p)^T$. Для других газодинамических переменных матрица \mathbf{B} является более заполненной, и, следовательно, разностные схемы при реализации будут требовать большего числа операций на узел сетки. Остановимся на реализации схемы. На первом дробном шаге решение системы разностных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1/4} - \rho^n}{\tau\alpha} &= 0, \\ \frac{(\rho v)^{n+1/4} - (\rho v)^n}{\tau\alpha} + \bar{\Lambda}(b^2)^n T^{n+1/4} &= 0, \\ \frac{T^{n+1/4} - T^n}{\tau\alpha} + (v^n \Lambda - \frac{1}{\rho c_v} \Lambda k^n \Lambda) T^{n+1/4} + (c^2)^n \Lambda v^{n+1/4} &= 0 \end{aligned}$$

находится следующим образом. Исключая значение $v^{n+1/4}$ из последнего уравнения, получим трехточечное разностное уравнение для температуры

$$\left[I + \tau\alpha(v^n \Lambda - \frac{1}{\rho^n c_v} \Lambda k^n \Lambda) - \tau^2 \alpha^2 (c^2)^n \Lambda \frac{1}{\rho^n} \bar{\Lambda} b^2 \right] T^{n+1/4} = T^n - \tau\alpha(c^2)^n \Lambda v^n.$$

Его решение находится скалярной прогонкой, после чего значение скорости на $n + 1/4$ слое вычисляется по явным формулам, а значение плотности переносится с предыдущего слоя.

На втором дробном шаге решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1/2} - \rho^{n+1/4}}{\tau\alpha} + \Lambda v^n \rho^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{(\rho v)^{n+1/2} - (\rho v)^{n+1/4}}{\tau\alpha} + (\Lambda v^n \rho^{n+1/2} - \Lambda \mu^n \Lambda) v^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{T^{n+1/2} - T^{n+1/4}}{\tau\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

находится скалярными прогонками для уравнения неразрывности и движения, а значение температуры переносится с предыдущего временного слоя. На этапе корректора схемы (7) значения функций на новом временном слое $n + 1$ вычисляются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau} + \Lambda (v\rho)^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{(\rho v)^{n+1} - (\rho v)^n}{\tau} + \Lambda (\rho v^2)^{n+1/2} + \Lambda p^{n+1/2} - \Lambda \mu^{n+1/2} \Lambda v^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{E^{n+1/2} - E^{n+1/4}}{\tau} + \Lambda [v(E + p)]^{n+1/2} - \Lambda [\kappa \Lambda T - \Lambda (v\mu) \Lambda v]^{n+1/2} &= 0 \end{aligned}$$

по явным формулам, где первые производные аппроксимируются по формулам (5) со сглаживанием. Таким образом, решение трех разностных уравнений на этапе предиктора сводится к трем скалярным трехточечным прогонкам. Аппроксимация уравнений неразрывности и движения в консервативной форме приводит к повышению точности при проведении расчетов течений с большими градиентами.

2. Разностная схема для многомерных уравнений

Построение разностной схемы в многомерном случае проведем на примере двумерных уравнений Навье–Стокса. Схема для трехмерного случая строится подобно двумерному случаю. Уравнения Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа в консервативной форме в декартовых координатах представим в векторном виде (см., например, [11]):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{W} = - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j}, \quad p = p(\rho, e), \quad e = e(T, \quad), \quad (9)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j - \delta_j^1 p - \tau_{1j} \\ \rho v_2 v_j - \delta_j^2 p - \tau_{2j} \\ v_j(E + p) - q_j - \sigma_j \end{pmatrix}, \quad E = \rho \left(e + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 v_j^2 \right),$$

$$\tau_{ij} = \delta_j^i \lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \lambda = -\frac{2\mu}{3}, \quad q_j = \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad \sigma_j = v_1 \tau_{j1} + v_2 \tau_{j2}.$$

Будем полагать известными зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности μ, κ , а уравнение состояния выберем в виде $p = (\gamma - 1)\rho e$. Наряду с консервативной формой приведем уравнения (9) в недивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = - \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_j \mathbf{f} + \Phi,$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} v_j - b_j^1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} a_j^1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} v_j - b_j^2 & \frac{\partial}{\partial x_j} a_j^2 \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - b_j^3 \end{pmatrix},$$

где

$$s = \delta_j^i (\gamma - 1) c_v, \quad a_j^i = s \rho, \quad b_1^1 = 4b_1/3, \quad b_1^2 = b_1, \quad b_2^1 = b_2, \\ b_2^2 = 4b_2/3, \quad b_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad b_j^3 = \frac{1}{\rho c_v} \frac{\partial}{\partial x_j} \kappa \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad c_j^i = s T,$$

а вектор Φ содержит оставшиеся члены – смешанные производные в уравнениях движения и диссипативные члены в уравнении энергии. Отметим, что структура матриц \mathbf{B}_j сохраняется и для уравнения состояния общего вида $p = p(\rho, T)$.

Подобно одномерному случаю аппроксимируем матричные операторы \mathbf{B}_j разностными операторами B_{jh} с порядком $O(h_j)$ по формулам

$$B_{jh} = \begin{pmatrix} \Lambda_j v_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_j v_j - b_{jh}^1 & 0 & \bar{\Lambda}_j a_j^1 \\ 0 & 0 & \Lambda_j v_j - b_{jh}^2 & \bar{\Lambda}_j a_j^2 \\ 0 & c_j^1 \Lambda_j \frac{1}{\rho} & c_j^2 \Lambda_j \frac{1}{\rho} & v_j \Lambda_j - b_{jh}^3 \end{pmatrix},$$

а векторы потоков $\partial \mathbf{W}_j / \partial x_j$ в (9) операторами $\Lambda_j \mathbf{W}_j$ с порядком $O(h^2)$.

Разностная схема предиктор-корректор

$$(I + \tau \alpha \sum_{j=1}^2 B_{jh}) \mathbf{f}^{n+1/2} = \mathbf{f}^n, \quad (10)$$

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = \mathbf{W}_h^{n+1/2}$$

аппроксимирует уравнения Навье–Стокса (9) с порядком $O(\tau^2 + \tau h + h^2)$ при $\alpha = 0,5 + O(\tau)$, безусловно устойчива при $\alpha \geq 0,5$ и реализуется матричными прогонками. Схема приближенной факторизации [7] или схема предиктор-корректор с расщеплением по направлениям на этапе корректора

$$(I + \tau \alpha B_{1h}) \mathbf{f}^{n+1/4} = \mathbf{f}^n,$$

$$(I + \tau \alpha B_{2h}) \mathbf{f}^{n+1/2} = \mathbf{f}^{n+1/4}, \quad (11)$$

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = \mathbf{W}^{n+1/2}.$$

аппроксимирует исходные уравнения (8) с тем же порядком, что и базовая схема (10), но на этапе корректора реализуется векторными прогонками по каждому направлению x_j (т.е. требует обращения матриц размером 4×4 в каждом узле расчетной сетки).

Для построения экономичных разностных схем, реализуемых скалярными прогонками подобно одномерному случаю, представим одномерные матричные операторы \mathbf{B}_j в виде расщепления

$$B_{jh} = B_{jh}^1 + B_{jh}^2, \quad (12)$$

где

$$B_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\Lambda}_j a_j^1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\Lambda}_j a_j^2 \\ 0 & c_j^1 \Lambda_j \frac{1}{\rho} & c_j^2 \Lambda_j \frac{1}{\rho} & v_j \Lambda_j - b_j^3 \end{pmatrix},$$

$$B_{jh}^2 = \begin{pmatrix} \Lambda_j v_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_j v_j - b_j^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_j v_j - b_j^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда разностная схема предиктор-корректор

$$\begin{aligned}
 (I + \tau\alpha B_{1h}^1)\mathbf{f}^{n+1/8} &= \mathbf{f}^n, \\
 (I + \tau\alpha B_{2h}^1)\mathbf{f}^{n+2/8} &= \mathbf{f}^{n+1/8}, \\
 (I + \tau\alpha B_{1h}^2)\mathbf{f}^{n+3/8} &= \mathbf{f}^{n+2/8}, \\
 (I + \tau\alpha B_{2h}^2)\mathbf{f}^{n+1/2} &= \mathbf{f}^{n+3/8}, \\
 \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} &= \mathbf{W}^{n+1/2}
 \end{aligned} \tag{13}$$

также аппроксимирует исходные уравнения (9) с порядком $O(\tau^2 + \tau h + h^2)$ при $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ и консервативна. При установлении она аппроксимирует стационарные уравнения Навье–Стокса с порядком $O(h^2)$. Как показывает спектральный анализ устойчивости, схема (13) для линеаризованных уравнений безусловно устойчива при $\alpha \geq 0,5$. Расщепление операторов B_{jh} в многомерном случае на их сумму является оптимальным, так как также приводит к минимальному числу дополнительных членов (подробнее см. раздел 3).

Реализация схемы (13) на этапе предиктора при вычислении компонент вектора $\mathbf{f}^{n+l/8}$ сводится к трехточечным скалярным прогонкам. Действительно, на первом ($j = 1$) и втором ($j = 2$) дробных шагах решается система разностных уравнений

$$\begin{aligned}
 \rho^{n+j/8} &= \rho^n, \\
 \rho^n(v_1^{n+j/8} - v_1^{n+(j-1)/8}) + \tau\alpha\delta_j^1\bar{\Lambda}_j a_j^1 T^{n+j/8} &= 0, \\
 \rho^{n+(2j-1)/8}(v_2^{n+j/8} - v_2^{n+(j-1)/8}) + \tau\alpha\delta_j^2\bar{\Lambda}_j a_j^2 T^{n+j/8} &= 0, \\
 T^{n+j/8} + \tau\alpha \left[(v_j^n \Lambda_j - b_j^3) T^{n+j/8} + c_j^j \Lambda_j v_j^{n+j/8} \right] &= T^{n+(j-1)/8}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Из первого уравнения системы разностных уравнений (14) следует, что значение плотности на новых шагах переносится с предыдущего шага. Исключая компоненты скорости $v_l^{n+j/8}$ ($l = 1, 2$) из последнего уравнения системы (16), получим разностное уравнение для нахождения температуры на новом шаге

$$\left[I + \tau\alpha(v_j^n \Lambda_j - b_j^3) - \tau^2 \alpha^2 c_j^j \Lambda_j \frac{1}{\rho^n} \bar{\Lambda}_j a_j^j \right] T^{n+j/8} = T^{n+(j-1)/8} - \tau\alpha c_j^j \Lambda_j v_j^{n+(j-1)/8}.$$

Его решение находится трехточечными скалярными прогонками по направлению x_j , после чего явно вычисляются компоненты скорости $v_i^{n+j/8}$. На двух последних дробных шагах система разностных уравнений

$$(I + \tau\alpha B_{jh}^2)\mathbf{f}^{n+(2+j)/8} = \mathbf{f}^{n+(j+1)/8}$$

в скалярном виде примет вид

$$\begin{aligned}
 \rho^{n+(j+2)/8} - \rho^{n+(j+1)/8} + \tau\alpha\Lambda_j v_j^n \rho^{n+(j+2)/8} &= 0, \\
 \rho^{n+(j+2)/8}(v_1^{n+(j+2)/8} - v_1^{n+(j+1)/8}) + \tau\alpha \left[\Lambda_j v_j^n \rho^{n+(j+2)/8} - b_j^1 \right] v_1^{n+(j+2)/8} &= 0, \\
 \rho^{n+(j+2)/8}(v_2^{n+(j+2)/8} - v_2^{n+(j+1)/8}) + \tau\alpha \left[\Lambda_j v_j^n \rho^{n+(j+2)/8} - b_j^2 \right] v_2^{n+(j+2)/8} &= 0, \\
 T^{n+(j+2)/8} &= T^{n+1/4}
 \end{aligned}$$

и решается скалярными трехточечными прогонками независимо для каждого уравнения, начиная с уравнения неразрывности. Наконец, из последнего уравнения схемы (13) на этапе корректора явно определяются значения всех функций

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \tau \mathbf{W}^{n+1/2}$$

на новом временном шаге $n + 1$, так как $\mathbf{W}^{n+1/2} = \mathbf{W}(\mathbf{f}^{n+1/2})$. Таким образом, решение системы уравнений Навье–Стокса (или уравнений Эйлера) по схеме предиктор-корректор сводятся к скалярным трехточечным прогонкам. Отметим, что число скалярных прогонок по каждому направлению x_j совпадает с числом уравнений в отличие от ранее предложенных схем расщепления [5], что дает экономию по числу арифметических операций на реализацию схемы при переходе с n -го на $n + 1$ слой на 33 % в двумерном случае и 25 % в трехмерном.

3. Диссипативные свойства схем

Введение расщепления операторов в многомерных задачах (или факторизация многомерного оператора на последовательность их одномерных аналогов) при построении разностных схем позволяет упростить реализацию неявных схем, но, как следствие, приводит к появлению дополнительных членов, отсутствующих в нефакторизованных схемах. Это и является «платой» за эффективность схем. Остановимся подробнее на свойствах схем расщепления, факторизации и предиктор-корректор на примере линеаризованных уравнений Эйлера, записанных в декартовых координатах (модель Навье–Стокса имеет ту же структуру матричных операторов и не вносит принципиальных изменений в анализ). Рассмотрим систему линейных уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = - \sum_{j=1}^2 \tilde{\mathbf{B}}_j \mathbf{f}, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} a_j^1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & \frac{\partial}{\partial x_j} a_j^2 \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

а значок \sim над операторами \mathbf{B}_j означает, что коэффициенты матриц v_j , $a_j^i = s\rho$, $c_j^i = sT$ заморожены на временном интервале t^n . Нефакторизованная разностная схема (10) предиктор-корректор для линейных уравнений (15) имеет вид

$$(I + \tau \alpha \sum_{j=1}^2 B_{jh}) \mathbf{f}^{n+1/2} = \mathbf{f}^n,$$

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^2 B_{jh} \mathbf{f}^{n+1/2}$$

и может быть представлена в канонической форме

$$(I + \tau\alpha \sum_{j=1}^2 B_{jh}) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^2 B_{jh} \mathbf{f}^n. \quad (16)$$

После исключения промежуточных шагов разностная схема предиктор-корректор с расщеплением по направлениям вида (11) также приводится к каноническому виду

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau\alpha B_{jh}) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^2 B_{jh} \mathbf{f}^n. \quad (17)$$

Отметим, что и схема расщепления по пространственным направлениям с весами [7]

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n}{\tau} + B_{1h}(\alpha \mathbf{f}^{n+1/2} + \beta \mathbf{f}^n) &= 0, \quad \beta = 1 - \alpha, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1/2}}{\tau} + B_{2h}(\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^{n+1/2}) &= 0 \end{aligned}$$

при $\alpha = \beta = 1/2$ приводится к каноническому виду (17). Отличие схемы (17) от схемы (16) состоит в присутствии дополнительных членов в стабилизирующем операторе

$$D = (I + \tau\alpha \sum_{j=1}^2 B_{jh}) - \prod_{j=1}^2 (I + \tau\alpha B_{jh}) = \tau^2 \alpha^2 B_{1h} B_{2h},$$

являющихся аналогами вязких диссипативных членов. Схема предиктор-корректор (13) для линейных уравнений Эйлера после исключения дробных шагов приводится к виду

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau\alpha B_{jh}^1)(I + \tau\alpha B_{jh}^2) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^2 B_{jh} \mathbf{f}^n,$$

и тогда дополнительные диссипативные члены D равны

$$\begin{aligned} D &= (I + \tau\alpha \sum_{j=1}^2 B_{jh}) - \prod_{j=1}^2 (I + \tau\alpha B_{jh}^1)(I + \tau\alpha B_{jh}^2) = \\ &= \tau^2 \alpha^2 (B_{1h} B_{2h} + \sum_{j=1}^2 B_{jh}^1 B_{jh}^2) + O(\tau^3). \end{aligned}$$

Иначе говоря, схема (13) обладает подобными диссипативными свойствами с точностью $O(\tau^2)$, что и схема расщепления по пространству или схема приближенной факторизации. Более того, эти дополнительные члены второго порядка малости

$$\tau^2 \alpha^2 \sum_{j=1}^2 B_{jh}^1 B_{jh}^2 = \tau^2 \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & d_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } d_i = \sum_{j=1}^2 \delta_j^i \gamma p \Lambda_j \frac{1}{\rho} \Lambda_j v_j,$$

появляются только в уравнении энергии. Напомним, что нефакторизованная разностная схема (10) реализуется матричными прогонками, которые требуют обращения матриц размером $mI \times mI$, где m — число уравнений, I — число узлов в направлении x_j , и общее

число операций (см. [12]) на один временной слой равно $\approx (mI)^3$. Очевидно, что этот алгоритм неэкономичен и для большого числа узлов нереализуем. Реализация разностной схемы (11) на дробных шагах сводится к векторным прогонкам, требующим обращения матриц $m \times m$ в каждом узле расчетной сетки $I \times I$. Общее число операций на одном временном слое равно $\approx m^3 I^2$. Схема предиктор-корректор (13) реализуется скалярными прогонками по каждому пространственному направлению, и общее число операций на одном временном слое равно $\approx 2mI^2$.

При проведении численных расчетов, как правило, применяются неравномерные сетки. Это связано с необходимостью сгущения шагов сетки в областях больших градиентов для получения детальной картины течения и повышения точности расчета. Обычно применяют преобразования координат, переводящие исходную расчетную область в единичный квадрат или полосу, а требуемое сгущение координат задается в преобразовании координат (см., например, [7]). Отметим, что в новых координатах система уравнений Навье–Стокса (8) вновь может быть записана в дивергентной форме, причем структура матричных операторов \mathbf{V}_j сохраняется. Поэтому при построении схемы можно использовать расщепление операторов, подобное (12), и строить экономичные разностные схемы вида (13). Их реализация на дробных шагах также сводится к скалярным прогонкам. Заметим, что обобщение схемы (13) и ее реализация в трехмерном случае не представляют затруднений (общее число дробных шагов на этапе предиктора увеличивается до 6). Однако в трехмерном случае все схемы предиктор-корректор или схемы приближенной факторизации являются условно устойчивыми (подробнее, см. [5]).

4. Примеры численных расчетов

Для апробации предложенного численного алгоритма и оценки его эффективности были проведены расчеты одномерных и двумерных течений в приближении уравнений Эйлера и уравнений Навье–Стокса, которые подтвердили теоретические оценки по устойчивости схем и ее достаточной точности. В качестве одномерных задач рассматривалась задача о распаде произвольного разрыва и численно (методом установления) отыскивалось стационарное решение задачи о квазиодномерном течении в канале переменного сечения. Обе задачи имеют точное решение и могут служить тестами для проверки алгоритма. Численные решения данных задач (см. [10]), полученные по предложенному выше алгоритму (13) и разработанному ранее [10], практически совпадали между собой и с точными решениями.

Следующая серия расчетов посвящена исследованию стационарных течений в канале. Расчетная область $R \in (0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 1)$ представляла собой прямоугольник, верхней и нижней границами которого были стенки канала (рис. 1). На стенках канала задавались условия прилипания и тепловой изоляции

$$v_1 = v_2 = 0, \quad \partial T / \partial x_2 = 0.$$

На входе в канал задавался невозмущенный поток

$$v_1 = 1, \quad \rho = 1, \quad v_2 = 0, \quad T = 1 / [\gamma(\gamma - 1)M_\infty^2], \quad (18)$$

на выходе ставились «мягкие» условия

$$\partial \mathbf{f} / \partial x_1 = 0. \quad (19)$$

Начальное распределение решения системы уравнений Навье–Стокса внутри области задавалось двумя способами: в первом в качестве начального распределения задавались значения функций, равные значениям в набегающем потоке, а на теле ставились краевые условия. Во втором случае в качестве начальных условий внутри расчетной области задавалось решение, полученное в предыдущих расчетах при других параметрах набегающего потока. Второй способ позволял уменьшить количество итераций до установления при последующих вычислениях в 2–4 раза. Стационарное решение задач находилось методом установления.

Перейдем к рассмотрению результатов, полученных при численном моделировании. В серии расчетов изучено влияние чисел Маха M_∞ и Рейнольдса Re в диапазоне $M = 2-4$, $Re = 10^4-10^3$ на поведение течения в плоском канале. Типичная картина течения представлена на рис. 1, где приведены изолинии плотности для $M = 2$, $Re = 10^4$.

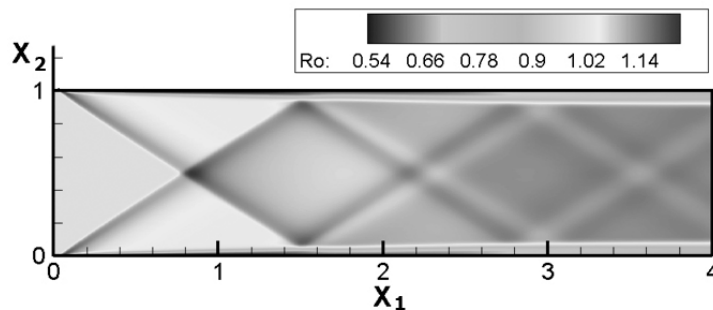


Рис. 1. Изолинии плотности в канале при $M_\infty = 2$, $Re = 10^4$

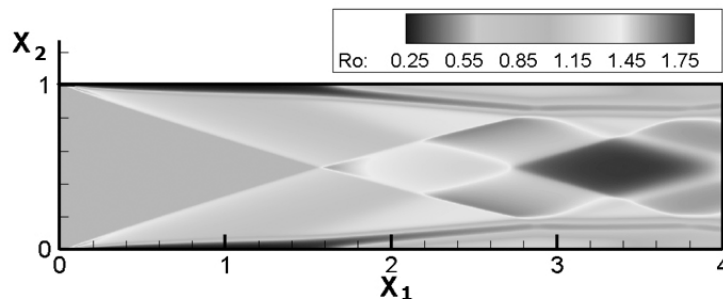


Рис. 2. Изолинии плотности в канале при $M_\infty = 4$, $Re = 10^4$

У кромок канала формируются головные скачки уплотнения, угол наклона которых зависит от чисел Маха, а на стенках канала развивается пограничный слой, а ниже по каналу происходит взаимодействие скачков уплотнения и их отражение от пограничного слоя. При уменьшении числа Re , пограничный слой на стенках канала утолщается, а структура скачков начинает размываться, что соответствует современным представлениям о течениях в канале. Углы наклона падающих и отраженных скачков и характерные значения величин хорошо согласуются с точным решением задачи о течении в

канале в отсутствие вязкости [11]. При изменении чисел Маха изменяется наклон головного скачка, и, как следствие, возникает более сложная структура течения (рис. 2), где около пограничного слоя формируются слабые висячие скачки.

Следующая серия расчетов посвящена влиянию параметров потока на течение вязкого теплопроводного газа за плоским уступом (рис. 3). Для повышения точности расчетов исходные уравнения Навье–Стокса решались в преобразованных координатах. Узлы расчетной сетки сгущались в области пограничного слоя над поверхностью пластины и в следе за ней по экспоненциальному закону. В начальном сечении $x_1 = 0$ задавался сверхзвуковой поток

$$\rho = 1, \quad v_1 = U(\text{Re}), \quad v_2 = 0, \quad T = 1/[\gamma(\gamma - 1)M_\infty^2],$$

профиль скорости сглаживался у поверхности тела, его толщина $\delta = 1/\sqrt{\text{Re}}$ соответствовала заданному числу Re . Верхняя граница области задавалась таким образом, чтобы возмущения от головного скачка не достигали ее. На ней задавался невозмущенный поток (18). На выходной задней границе задавались мягкие условия (19).

Типичная картина течения представлена на рис. 3.

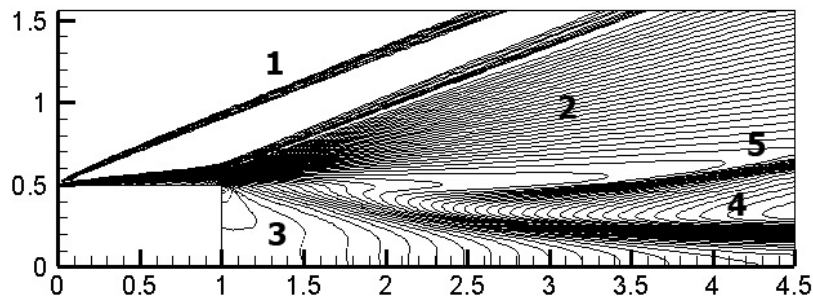


Рис. 3. Изолинии плотности за уступом при $M_\infty = 3$, $\text{Re} = 4 \times 10^3$

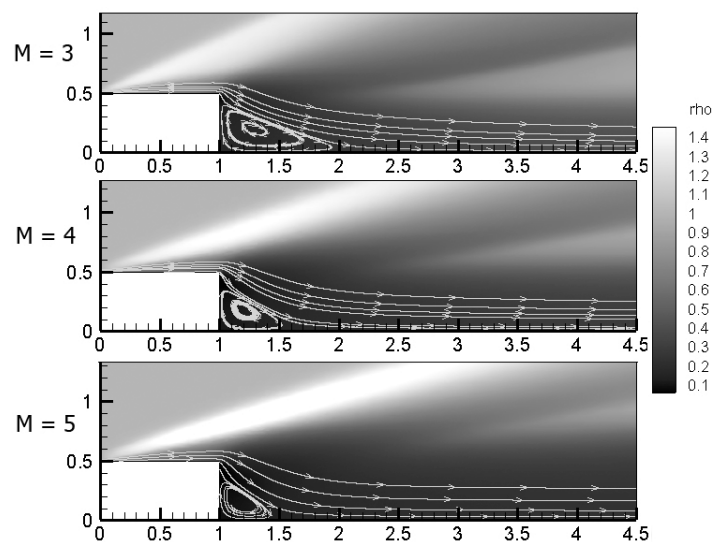


Рис. 4. Уровни плотности и линии тока для $\text{Re} = 10^3$ при различных числах M_∞

Над пограничным слоем образуется головной скачок (1). Его наклон определяется числами M_∞ и Re . За уступом возникает веер волн разрежения (2), появляется зона

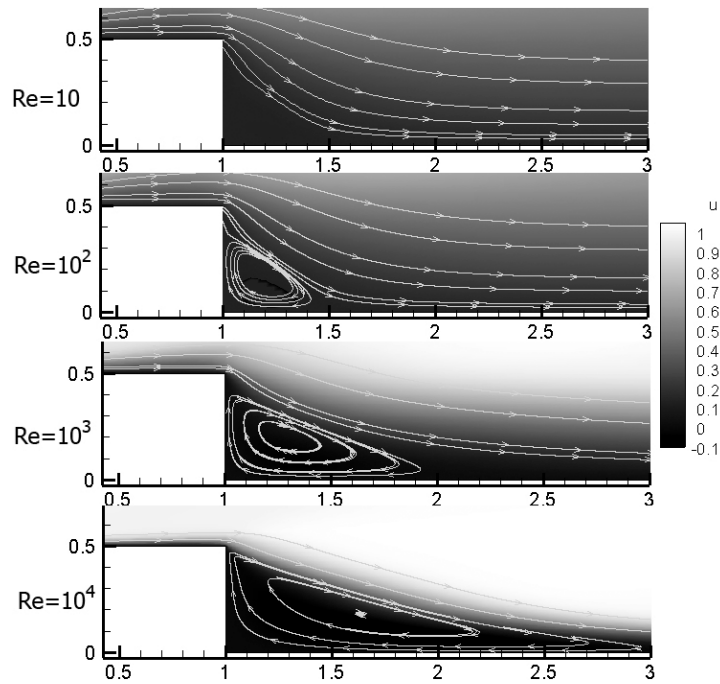


Рис. 5. Линии тока для $M_\infty = 3$ при различных числах Re

возвратного течения (3) и формируется след за телом (4, см. также рис. 4). Над следом формируется висячий скачок (5). Известно, что длина возвратной зоны зависит от чисел M_∞ и Re . Увеличение числа Маха при фиксированном числе Re приводит к увеличению угла поворота потока в виде веера волн разрежения за кромкой уступа и, как следствие к уменьшению длины отрывной зоны с ростом числа M_∞ . Этот факт иллюстрируется рис. 4, где приведены распределения плотности и линии тока в следе за уступом при различных числах Re . При фиксированном числе Маха набегающего потока размер области возвратного течения зависит от числа Re . На рис. 5 приведено распределение линий тока, характеризующих длину отрывной зоны. До чисел $Re = 10$ течение за уступом безотрывное. Для $Re > 10$ за ним возникает область возвратного течения, длина которой возрастает с ростом числа Re . Отметим, что длина зоны возвратного течения возрастает с ростом числа Re вплоть до $Re \geq 6 \times 10^3$ и при больших значениях выходит на асимптотический режим. Наблюдается также сильный прогрев газа в следе за телом при росте числа M_∞ .

5. Анализ свойств разностной схемы

Проведенные результаты расчетов позволили сделать вывод о работоспособности предложенного численного метода. Решения с достаточной точностью были получены на сравнительно грубых сетках. Для оценки точности алгоритма расчеты проводились на последовательности сеток, сгущающихся в два раза по каждому направлению. На рис. 5 приведено распределение плотности и скорости для трех сеток в сечении $x_1 = 1,5$. Как следует из рисунка, расчеты на различных сетках дают близкие распределения во всей области, кроме зоны скачка уплотнения, где их отличия составляют $\approx 4\%$.

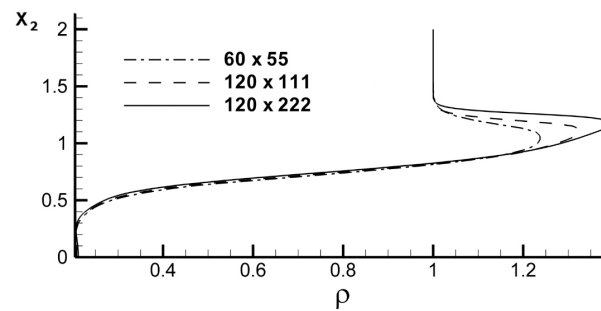


Рис. 6. Распределение плотности в сечении $x_1 = 1,5$ для разных сеток

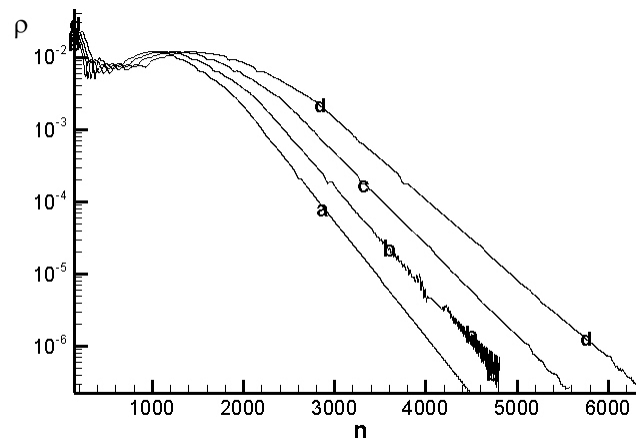


Рис. 7. Невязка сходимости решения для различных τ

В приведенной серии расчетов отыскивалось стационарное решение задачи методом установления. Критерий установления задавался в виде

$$\max |(f^{n+q} - f^n)/(q\tau f^n)| \leq 10^{-7},$$

где параметр q изменялся в пределах $10 \leq q \leq 50$, чтобы избежать псевдоустановления решения. Численно исследовано влияние временного параметра τ (при установлении — итерационного параметра) на скорость сходимости схемы к стационарному решению. Картина выхода на стационарный режим представлена на рис. 7, где приведено значение невязки плотности в сечении $x_1 = 1,5$ в зависимости от числа временных шагов τ и его начального значения. Выбор временного шага зависел от начального распределения всех газодинамических параметров потока. Так как решение задачи было неизвестным, то, как правило, в начальный момент при $t = 0$ значения искомых функций в начальном сечении переносились на всю расчетную область, а в следе за уступом начальная скорость задавалась нулевой. Такие условия были далекими от решения, поэтому, хотя разностная схема и является безусловно устойчивой (в линейном приближении), получить сходимость удавалось не при всех значениях итерационного параметра τ . При проведении расчетов практически сходимость решения зависела от начального значения τ , которое задавалось по формуле $\tau = K \min(h_1, h_2)$. На рис. 7 приведены кривые сходимости при различных значениях параметра K : $K = 1,1$ (a), $1,0$ (b), $0,9$ (c), $0,8$ (d). Можно видеть, что увеличение шага τ на 37,5% приводит к ускорению сходимости на 42%. Разумеется, точность численного решения и скорость сходимости решения к ста-

циональному зависит от многих факторов, что требует дополнительных исследований.

В заключение отметим, что предложенная конечно-разностная схема типа предиктор-корректор со специальным расщеплением одномерных операторов для численного решения уравнений Навье–Стокса является экономичной по числу операций на узел сетки. Введение монотонизирующего оператора позволяет получить разностную схему второго порядка аппроксимации без осцилляций численного решения. Проведенные расчеты в течении в канале и за уступом позволяют сделать вывод о достаточной точности и эффективности предложенного алгоритма.

Список литературы

1. *Computer and Fluids*, Special Issue, 6th International Symposium on CFD. 1998. Vol. 27. No. 5–6.
2. *Computational Fluid Dynamics Journal*, Special Issue dedicated to prof. H. Daiguji. 1999. Vol. 8. No. 2.
3. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 4th Asian Workshop on CFD. 2004. Vol. 13. No. 2.
4. *Computer and Fluids*, Special Issue dedicated to prof. R. Peuret. 2002. Vol. 31. No 4–7.
5. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
6. Марчук Г. И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
7. Ковеня В. М. Разностные методы решения многомерных задач: Курс лекций. Новосибирск, 2004.
8. Флетчер К. Численные методы в динамике жидкостей: В 2 т. М.: Мир, 1991.
9. Ковеня В. М., Лебедев А. С. Модификации метода расщепления для построения экономичных разностных схем // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1994. Т. 34, № 6. С. 886–897.
10. Ковеня В. М., Слюняев А. Ю. Алгоритмы расщепления при решении уравнений Навье–Стокса // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2009. Т. 49, № 4. С. 700–714.
11. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
12. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

Материал поступил в редколлегию 17.06.2011

Адреса авторов

КОВЕНЯ Виктор Михайлович
Институт вычислительных технологий СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: kovenya@ict.nsc.ru

КУЗЬМИН Максим Павлович

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: maxim.kuzmin@polytechnique.edu

ПОЛТОРАЦКИЙ Роман Сергеевич

Институт вычислительных технологий СО РАН

пр. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: kainltd@gmail.com