УДК 512.57

А. Г. Пинус

О ГАЛУА-СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ НЕЯВНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ И КАТЕГОРИЯМИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Приводится критерий, когда подполугруппа полугруппы внутренних гомоморфизмов универсальной алгебры является полугруппой внутренних гомоморфизмов некоторого обогащения этой алгебры.

Ключевые слова: Галуа-соответствие, неявные операции, категории универсальных алгебр.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый абстрактный класс универсальных алгебр сигнатуры σ, замкнутый относительно подалгебр. Через $\operatorname{Hom}\mathcal{K}$ обозначим совокупность всех гомоморфизмов одних $\mathcal{K}$-алгебр в другие, через $\operatorname{Iso}\mathcal{K}$ — всех изоморфизмов между $\mathcal{K}$-алгебрами и всех гомоморфизмов этих алгебр на одноэлементную, если таковая входит в $\mathcal{K}$. Через $\mathcal{K}_{fg}$ обозначим класс всех конечно порожденных $\mathcal{K}$-алгебр. Совокупность $\mathcal{S} \subseteq \operatorname{Hom}\mathcal{K}$ назовем *локально замкнутой*, если для любого гомоморфизма g $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ в $\mathcal{K}$-алгебру $\mathcal{B} = \langle \mathcal{B}; \sigma\rangle$ условие «для любого конечного $C \subseteq A$ существует $g_C \in \mathcal{S}$ такой, что ограничения g и g_C на C совпадают» влечет включение $g \in \mathcal{S}$ и если для любого гомоморфизма $g \in \mathcal{S}$ $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{K}$-алгебру $\mathcal{B}$, для любой подалгебры $\mathcal{C}$ алгебры $\mathcal{A}$ ограничение $g \restriction \mathcal{C}$ до $\mathcal{C}$ также входит в $\mathcal{S}$.

Под *категорией* $\overline{\mathcal{K}}$ *над классом* $\mathcal{K}$ будем далее понимать конкретную категорию, совокупностью объектов которой является класс алгебр $\mathcal{K}$, а совокупностью морфизмов — некоторая локально замкнутая совокупность $\operatorname{Mor}(\overline{\mathcal{K}})$, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{Iso}\mathcal{K} \subseteq \operatorname{Mor}(\overline{\mathcal{K}}) \subseteq \operatorname{Hom}\mathcal{K}.$$

Через $\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}}$ ($\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{H}}$) обозначим категорию $\overline{\mathcal{K}}$ над $\mathcal{K}$, когда $\operatorname{Mor}(\overline{\mathcal{K}}) = \operatorname{Iso}\mathcal{K}$ ($\operatorname{Mor}(\overline{\mathcal{K}}) = \operatorname{Hom}\mathcal{K}$).

Напомним (см. [1–4]), что $\overline{\mathcal{K}}$*-неявной n-местной операцией g над категорией* $\overline{\mathcal{K}}$ называется совокупность функций $g_{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n)$, определенных на основных множествах A $\mathcal{K}$-алгебр $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ таких, что они коммутируют с морфизмами категории $\overline{\mathcal{K}}$, т. е. для любого $\varphi \in \operatorname{Mor}(\overline{\mathcal{K}})$ гомоморфизма $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{K}$-алгебру $\mathcal{B}$ и для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$ имеет место равенство

$$\varphi(g_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = g_{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)).$$

Для любой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ и любого $B \subseteq A$ через $\langle B\rangle_{\mathcal{A}}$ обозначим подалгебру, порожденную множеством B.

В силу замкнутости абстрактного класса $\mathcal{K}$ относительно подалгебр и включения $\operatorname{Iso}\mathcal{K} \subseteq \operatorname{Mor}(\overline{\mathcal{K}})$, для любой $\overline{\mathcal{K}}$-неявной операции g, любой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ и

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 3. С. 146–152

любых ее элементов $a_1, \ldots, a_n$ имеет место включение

$$g_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \langle \{a_1, \ldots, a_n\} \rangle_{\mathcal{A}}.$$

Совокупность всех неявных операций над категорией $\overline{\mathcal{K}}$ обозначим далее как $\mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}})$, а через $\mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}})_{\mathcal{A}}$, для $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, – совокупность $\{g_{\mathcal{A}} | g \in \mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}})\}$. Через $\mathrm{Tr}(\mathcal{K})$ обозначим далее совокупность всех термальных операций сигнатуры класса $\mathcal{K}$, а через $\mathrm{Tr}(\mathcal{K})_{\mathcal{A}}$ – совокупность всех термальных функций на алгебре $\mathcal{A}$. Очевидно включение

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}}).$$

Класс алгебр $\mathcal{K}$ назовем $\overline{\mathcal{K}}$-*неявно полным*, если имеет место равенство

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{K}) = \mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}}).$$

Для любого обогащения σ' сигнатуры σ и любого класса $\mathcal{K}'$ σ'-алгебр, σ-обеднение которого совпадает с классом $\mathcal{K}$, *класс* $\mathcal{K}'$ назовем *соответствующим категории* $\overline{\mathcal{K}}$, если имеет место равенство

$$\mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}}) = \mathrm{Hom}\,\mathcal{K}'.$$

В случае, когда класс $\mathcal{K}$ содержит $\overline{\mathcal{K}}$-свободную алгебру, соответствие класса $\mathcal{K}'$ категории $\overline{\mathcal{K}}$ влечет $\overline{\mathcal{K}}$-неявную полноту класса $\mathcal{K}'$.

Под *n-местной операцией f над классом* $\mathcal{K}$ имеется в виду совокупность $f_{\mathcal{A}}(x_1, .., x_n)$ функций, определенных на основных множествах $\mathcal{K}$-алгебр, коммутирующая с морфизмами из $\mathrm{Iso}\,\mathcal{A}$. Для любой совокупности F операций над классом $\mathcal{K}$ через $\mathcal{K}^{\mathrm{F}}$ обозначим естественное обогащение $\mathcal{K}$-алгебр $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ до сигнатуры $\sigma' = \sigma \cup \mathrm{F}$, а через $\overline{\mathcal{K}^{\mathrm{F}}}$ — категорию такую, что

$$\mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}^{\mathrm{F}}}) = \mathrm{Hom}\,\mathcal{K}^{\mathrm{F}}.$$

Стандартным образом имеет место *Галуа-соответствие* между категориями $\overline{\mathcal{K}}$ над классом $\mathcal{K}$ и совокупностями F операций над классом $\mathcal{K}$:

$$\overline{\mathcal{K}} \to \mathrm{If}\overline{\mathcal{K}},$$
$$\mathrm{F} \to \overline{\mathcal{K}^{\mathrm{F}}}.$$

Под включением $\overline{\mathcal{K}} \subseteq \overline{\overline{\mathcal{K}}}$ между категориями над классом $\mathcal{K}$ естественным образом имеется в виду включение $\mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}}) \subseteq \mathrm{Mor}(\overline{\overline{\mathcal{K}}})$. Для категорий $\overline{\mathcal{K}}^i$ $(i \in \mathrm{I})$ над классом $\mathcal{K}$ через $\overset{*}{\bigcup\limits_{i \in \mathrm{I}}} \overline{\mathcal{K}}^i$ обозначим категорию над классом $\mathcal{K}$, морфизмы которой суть локальное замыкание совокупности отображений из $\bigcup\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}}^i)$. Отметим, что для локально замкнутых $\overline{\mathcal{K}}$, $\overline{\overline{\mathcal{K}}}$ имеет место

$$\overline{\mathcal{K}} \overset{*}{\cup} \overline{\overline{\mathcal{K}}} = \overline{\mathcal{K}} \cup \overline{\overline{\mathcal{K}}}.$$

Очевидно, имеют место стандартные (для Галуа-соответствий) (см., к примеру, [5]) включения и равенства

$$\begin{gathered}\mathrm{F} \subseteq \mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}^{\mathrm{F}}}),\ \overline{\mathcal{K}} \subseteq \overline{\mathcal{K}^{\mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}})}},\\ \overline{\mathcal{K}^{\mathrm{F}}} = \overline{\mathcal{K}^{\mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}^{\mathrm{F}}})}},\ \mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}}) = \mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}^{\mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}})}}),\\ \mathrm{F}' \subseteq \mathrm{F}'' \to \overline{\mathcal{K}^{\mathrm{F}''}} \subseteq \overline{\mathcal{K}^{\mathrm{F}'}},\ \overline{\mathcal{K}} \subseteq \overline{\overline{\mathcal{K}}} \to \mathrm{If}(\overline{\overline{\mathcal{K}}}) \subseteq \mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}}),\\ \mathrm{If}(\overset{*}{\bigcup_{i\in\mathrm{I}}}\overline{\mathcal{K}}^{i}) = \bigcap_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}}^{i}),\ \overline{\mathcal{K}^{\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{F}_i}} = \bigcap_{i\in\mathrm{I}}\overline{\mathcal{K}^{\mathrm{F}_i}}.\end{gathered} \qquad (*)$$

Категорию $\overline{\mathcal{K}}$ над классом $\mathcal{K}$ назовем *определяемой*, если $\overline{\mathcal{K}} = \overline{K^{\mathrm{F}}}$ для некоторого F такого, что $\mathrm{Iso}\,\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}^{\mathrm{F}}})$. Категорию $\overline{K}$ над классом $\mathcal{K}$ назовем *финитно определяемой*, если $\overline{\mathcal{K}} = \overline{K^{\mathrm{F}}}$, где $\mathrm{F} = \mathrm{Tr}(\mathcal{K}) \cup \mathrm{F}'$ для некоторого конечного F' такого, что $\mathrm{Iso}\,\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{K}^{\mathrm{F}})$. Представляет интерес характеризация определяемых и финитно определяемых категорий над классом $\mathcal{K}$.

Отметим, к примеру, хорошо известную финитную определяемость категории $\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}}$ над любым классом $\mathcal{K}$ универсальных алгебр: $\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}} = \overline{\mathcal{K}^{\mathrm{F}}}$, где $\mathrm{F} = \mathrm{Tr}(\mathcal{K}) \cup \{d(x,y,z)\}$ и $d(x,y,z)$ — операция на $\mathcal{K}$, определяющая на $\mathcal{K}$-алгебрах функцию дискриминатора.

Равенства $(*)$ демонстрируют, что совокупность определяемых категорий над классом $\mathcal{K}$ образует полную решетку (относительно теоретико-множественного отношения включения), а совокупности неявных операций над категориями над классом $\mathcal{K}$ — двойственную решетку.

Через $\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{E}}_{fg}$ обозначим подкатегорию категории $\overline{\mathcal{K}}$, объекты которой — алгебры из класса $\mathcal{K}_{fg}$, а морфизмы — эпиморфизмы из категории $\overline{\mathcal{K}}$. Включения $\mathrm{Iso}\,\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}})$, $\mathrm{Mor}(\overline{\overline{\mathcal{K}}})$ и локальная замкнутость категорий $\overline{\mathcal{K}}$, $\overline{\overline{\mathcal{K}}}$ над классом $\mathcal{K}$ влекут равносильность равенств $\overline{\mathcal{K}} = \overline{\overline{\mathcal{K}}}$ и $\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{E}}_{fg} = \overline{\overline{\mathcal{K}}}^{\mathrm{E}}_{fg}$.

Через $\mathrm{E}_p\mathcal{K}_{fg}$ обозначим совокупность всех эпиморфизмов одних $\mathcal{K}_{fg}$-алгебр на другие подобные алгебры. Заметим, что так как $\mathrm{Iso}\,\mathcal{K}_{fg} \subseteq \mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{E}}_{fg})$, то если μ — некоторый эпиморфизм $\mathcal{K}_{fg}$-алгебры $\mathcal{A}$ на $\mathcal{K}_{fg}$-алгебру $\mathcal{B}$, не входящий в $\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{E}}_{fg}$, то $\mathcal{B}$ неодноэлементна.

Рассмотрим следующее свойство $(**)$ категории $\overline{\mathcal{K}}$ такой, что

$$\mathrm{Iso}\,\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}}) \subseteq \mathrm{Hom}\,\mathcal{K}:$$

для любого $\mu \in \mathrm{E}_p\mathcal{K}_{fg} \setminus \mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{E}}_{fg})$ существуют элементы $b_1 \neq b_2$ в области значений μ-алгебре $\mathcal{B}$ такие, что для любого $\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{E}}_{fg}$-морфизма η алгебры $\mathcal{B}$ на алгебру $\mathcal{C}$ такого, что $\eta(b_1) \neq \eta(b_2)$, любого $\eta' \in \mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{E}}_{fg})$ такого, что области значений η и η' совпадают, не существует $\eta'' \in \mathrm{Mor}(\overline{K}^{\mathrm{E}}_{fg})$ такого, что $\eta'\eta'' = \eta\mu$.

Без труда непосредственно замечается, что любая определяемая категория над классом $\mathcal{K}$ обладает свойством $(**)$. Верно и обратное.

Теорема 1. *Для любой локально замкнутой категории $\overline{\mathcal{K}}$ над классом $\mathcal{K}$ следующие условия эквивалентны:*

а) $\overline{\mathcal{K}}$ *определяемая категория над* $\mathcal{K}$*;*
б) $\overline{\mathcal{K}}$ *обладает свойством* $(**)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вполне упорядочим $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_\alpha, \ldots$ $(\alpha < \gamma)$ совокупность всех эпиморфизмов из $\mathrm{E}_p\mathcal{K}_{fg}$, не входящих в $\mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{E}}_{fg})$. Пусть $\overline{\mathcal{K}}$ обладает свойством

$(**)$. Пусть для $\beta < \alpha$ уже построены обогащения класса $\mathcal{K}$ до сигнатур $\sigma \cup \mathrm{F}_\beta$ такие, что $\mathrm{F}_\beta \subseteq \mathrm{F}_\delta$ для $\beta < \delta$ и $\mu_\beta \notin \mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}_{fg}^{\mathrm{F}_\beta}})$. Пусть μ_β является эпиморфизмом алгебры $\mathcal{A}$, порожденной элементами $a_1, \ldots, a_n$ на алгебру $\mathcal{B}$. Обозначим $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathrm{F}_\beta$ как F'_α. Если $\mu_\alpha \notin$ $\notin \mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}_{fg}^{\mathrm{F}'_\alpha}}^{\mathrm{E}})$, то полагаем $F_\alpha = \mathrm{F}'_\alpha$. Если же $\mu_\alpha \in \mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}_{fg}^{\mathrm{F}'_\alpha}})$ и b_1, b_2 — элементы алгебры $\mathcal{B}$ из формулировки свойства $(**)$, то существуют σ-термы $t_1(x_1, \ldots, x_n)$, $t_2(x_1, \ldots, x_n)$ такие, что $b_i = t_i(\mu_\alpha(a_1), \ldots, \mu_\alpha(a_n))$. Введем в рассмотрение новый n-местный функциональный символ $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ и определим функции f_α на $\mathcal{K}_{fg}$-алгебрах следующим образом: если η и η' $\overline{\mathcal{K}}_{fg}$-морфизмы из формулировки свойства $(**)$ и $\mathcal{D}$ — $\mathcal{K}_{fg}$-алгебра, область определения эпиморфизма η', то для $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{D}$ таких, что $\eta'(c_i) = \eta\mu_\alpha(a_i)$, $f_\alpha(c_1, \ldots, c_n) = t_1(c_1, \ldots, c_n)$. Для иных $\mathcal{K}_{fg}$-алгебр $\mathcal{C}$, для любых $c_1, \ldots, c_n$ из $\mathcal{C}$ положим

$$f_{\alpha,\mathcal{C}}(c_1, \ldots, c_n) = t_2(c_1, \ldots, c_n).$$

В частности, $f_{\alpha,\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n)$, $f_{\alpha,\mathcal{B}}(\mu_\alpha(a_1), \ldots, \mu_\alpha(a_n)) = t_1(\mu_\alpha(a_1), \ldots, \mu_\alpha(a_n))$. Тем самым, полагая $F_\alpha = \mathrm{F}'_\alpha \cup \{f_\alpha\}$, имеем, что $\mu_\alpha \notin \mathrm{Mor}(\overline{\mathcal{K}_{fg}^{\mathrm{F}_\alpha}}^{\mathrm{E}})$. При этом все иные эпиморфизмы $\mathcal{K}_{fg}^{\mathrm{F}_\alpha}$-алгебр на другие подобные алгебры в силу свойства $(**)$ остаются эпиморфизмами соответствующих $\mathcal{K}_{fg}^{\mathrm{F}_\alpha}$-алгебр на $\mathcal{K}_{fg}^{\mathrm{F}_\alpha}$-алгебры. Тем самым для $\mathrm{F} = \bigcup\limits_{\alpha<\gamma} \mathrm{F}_\alpha$ имеет место равенство $\overline{\mathcal{K}_{fg}^{\mathrm{F}}}^{\mathrm{E}} = \overline{\mathcal{K}}_{fg}^{\mathrm{E}}$. В силу же замеченного перед формулировкой свойства $(**)$ получаем равенство $\overline{\mathcal{K}^{\mathrm{F}}} = \overline{\mathcal{K}}$, т. е. определяемость категории $\overline{\mathcal{K}}$ доказана. А вместе с тем доказана и вся теорема.

Напомним, что *внутренним гомоморфизмом* (*внутренним изоморфизмом*) алгебры $\mathcal{A}$ называется любой гомоморфизм подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ в любую ее подалгебру (любой изоморфизм между подалгебрами алгебры $\mathcal{A}$ либо любой внутренний гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ с одноэлементной областью значений). Через $\mathrm{Iso}\,\mathcal{A}$ ($\mathrm{Ihm}\mathcal{A}$) обозначим совокупность всех внутренних изоморфизмов (гомоморфизмов) алгебры $\mathcal{A}$.

Предложение 1. *Для любой алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ и любой ее совокупности $\mathcal{S}$ частичных отображений множества A в себя такого, что $\mathrm{Iso}\,\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathrm{Ihm}\mathcal{A}$, следующие условия эквивалентны:*

а) *существует обогащение $\mathcal{A}' = \langle A; \sigma'\rangle$ алгебры $\mathcal{A}$ до некоторой сигнатуры σ' такое, что $\mathcal{S} = \mathrm{Ihm}\mathcal{A}'$;*

б) *$\mathcal{S}$ — локально замкнуто и обладает свойством $(**)$.*

Утверждение следствия непосредственно вытекает из утверждения теоремы 1. Достаточно рассмотреть в качестве класса $\mathcal{K}$ абстрактное замыкание $\mathrm{ISub}\mathcal{A}$ класса $\mathrm{Sub}\mathcal{A}$ всех подалгебр алгебры $\mathcal{A}$ и в качестве морфизмов категории $\overline{\mathcal{K}}$ – отображения, являющиеся изоморфными сопряжениями отображений из $\mathcal{S}$. Обозначим в дальнейшем подобную категорию $\overline{\mathcal{K}}$ как $\overline{\mathrm{ISub}\mathcal{A}}^{\mathcal{S}}$.

Остановимся теперь на синтаксической определимости (в исчислении $L_{\infty,\infty}$) на $\mathcal{K}$-алгебрах неявных над категориями $\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{H}}$ ($\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}}$) операций. Для любой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ и любых ее элементов $\overline{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ через $\mathcal{D}^{+}_{\overline{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ ($\mathcal{D}_{\overline{a}}(x_1, \ldots, x_n)$) обозначим позитивную диаграмму (диаграмму) кортежа $\overline{a}$ в алгебре $\mathcal{A}$, т. е. конъюнкцию всех равенств вида $t'(\overline{x}) = t''(\overline{x})$ (конъюнкцию всех равенств подобного вида и отрицаний подобных равенств), истинных на элементах $\overline{a}$ в алгебре $\mathcal{A}$. Здесь $t'(\overline{x})$, $t''(\overline{x})$ — произвольные термы сигнатуры σ. Таким образом, для любой алгебры $\mathcal{B}$ и любых ее элементов $\overline{b} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$:

$$\mathcal{B} \models \mathcal{D}^+_{\overline{a}}(b_1, \ldots, b_n) \ (\mathcal{B} \models \mathcal{D}_{\overline{a}}(b_1, \ldots, b_n))$$

тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм (изоморфизм) φ алгебры $\langle \overline{a} \rangle_{\mathcal{A}}$ в алгебру $\mathcal{B}$ (на алгебру $\langle \overline{b} \rangle_{\mathcal{B}}$) такой, что $\varphi(a_i) = b_i$.

Пусть теперь f некоторая n-местная неявная операция над категорией $\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{H}}$ $(\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}})$. Как замечено в начале работы, для всякой $\mathcal{K}$-алгебры и любых ее элементов $a_1, \ldots, a_n$ имеет место включение $f_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \langle \overline{a} \rangle_{\mathcal{A}}$, т. е. существует терм $t^f_{\overline{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ такой, что $f_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = t^f_{\overline{a}}(a_1, \ldots, a_n)$. При этом для любого гомоморфизма φ алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{K}$-алгебру $\mathcal{B}$ имеет место равенство

$$f_{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = t^f_{\overline{a}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)).$$

Тем самым в силу замеченного выше о диаграммах (позитивных диаграммах) кортежей элементов $\mathcal{K}$-алгебр имеет место следующая эквивалентность для $f \in \mathrm{If}\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{H}}$: для любых $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{A}$ и ее элементов $a_1, \ldots, a_n, b$

$$f_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = b \leftrightarrow \mathcal{A} \models \phi^+_f(a_1, \ldots, a_n, b),$$

здесь $\phi^+_f(x_1, \ldots, x_n, y)$ — следующая $L_{\infty,\infty}$-формула

$$\phi^+_f(x_1, \ldots, x_n, y) = \bigvee_{\mathcal{A} \in \mathcal{K}, \overline{a} \in \mathcal{A}} \left[\mathcal{D}^+_{\overline{a}}(x_1, \ldots, x_n) \to y = t^+_{\overline{a}}(x_1, \ldots, x_n)\right],$$

и пара $\langle \mathcal{A}, \overline{a} \rangle$ пробегает по всем типам изоморфизма n-порожденных $\mathcal{K}$-алгебр с выделенными n-порождающими $\overline{a}$.

Для случая, когда $f \in \mathrm{If}\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}}$ подформулы $\mathcal{D}^+_{\bar{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ в формуле $\phi^+_f(x_1, \ldots, x_n, y)$ следует заменить на формулы $\mathcal{D}_{\bar{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ для получения $L_{\infty,\infty}$-формулы $\phi_f(x_1, \ldots, x_n, y)$ такой, что для любых $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{A}$ и ее элементов $a_1, \ldots, a_n, b$

$$f_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = b \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \phi_f(a_1, \ldots, a_n, b).$$

Заметим, что $\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{H}}$ $(\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}})$ -операции над классом $\mathcal{K}$ являются бесконечными аналогами позитивно условных (условных) термов для класса $\mathcal{K}$ (подробнее см., к примеру, [6; 7]).

Наконец вернемся к вопросу о неявной полноте категорий $\overline{\mathcal{K}}$. Прежде всего отметим, что обогащение класса $\mathcal{K}$ до сигнатуры $\sigma \cup \mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}})$ добавлением в сигнатуру алгебр из класса $\mathcal{K}$ $\overline{\mathcal{K}}$-неявных операций в случае определяемой категории $\overline{\mathcal{K}}$ приводит, очевидно, к термальной полноте класса $\mathcal{K}^{\mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}})}$. Представляет интерес вопрос о возможности конечного расширения $\sigma \cup \mathrm{F}$ сигнатуры σ и соответствующего обогащения алгебр класса $\mathcal{K}$ до алгебр класса $\mathcal{K}^{\mathrm{F}}$ так, чтобы имело место равенство

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{K}^{\mathrm{F}}) = \mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}}).$$

В этом случае определяемую категорию $\overline{\mathcal{K}}$ назовем *финитно пополняемой.*

Построенный в работе [8] пример равномерно локально конечной алгебры $\mathcal{A}$, совокупность позитивно условно термальных функций на которой не обладает позитивным дискриминатором, дает пример категории $\overline{\mathrm{ISub}\mathcal{A}}^{\mathrm{H}}$ не являющейся финитно пополняемой. Заметим, что в силу результатов работы [9] позитивно условно термальные функции на $\mathcal{A}$ и есть $\mathrm{If}(\overline{\mathrm{ISub}}^{\mathrm{H}}_{\mathcal{A}})_{\mathcal{A}}$-функции на $\mathcal{A}$. В то же время (см., к примеру, [6]) для любой равномерно локально конечной алгебры $\mathcal{A}$ категория $\overline{\mathrm{ISub}\mathcal{A}}^{\mathrm{I}}$ является финитно пополняемой — достаточно обогатить алгебры из $\mathrm{ISub}\mathcal{A}$ функцией дискриминатора.

Для любой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{A}$ и кортежа $\overline{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ее элементов через $\mathcal{D}^{\mathcal{K}}_{\overline{a}}(x_1, \dots, x_n)$ обозначим совокупность равенств $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$, где $f, g \in \mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}})$, таких, что

$$f_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, x_n) = g_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n),$$

и назовем эту совокупность $\overline{\mathcal{K}}$-*неявной диаграммой элементов* $\overline{a}$ *алгебры* $\mathcal{A}$. Эта $\overline{\mathcal{K}}$-неявная диаграмма играет для определяемых категорий $\overline{\mathcal{K}}$ ту же роль, что позитивная диаграмма (диаграмма) для категорий $\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{H}}$ ($\overline{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}}$). Действительно, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если $\overline{\mathcal{K}}$ — определяемая категория, то для любых $\mathcal{K}$-алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, любых элементов $\overline{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ из $\mathcal{A}$, $\overline{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ из $\mathcal{B}$ на $\overline{b}$ в алгебре $\mathcal{B}$ истинна $\overline{\mathcal{K}}$-неявная диаграмма элементов $\overline{a}$ алгебры $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда существует $\overline{\mathcal{K}}$-морфизм μ алгебры $\langle \overline{a} \rangle_{\mathcal{A}}$ в алгебру $\mathcal{B}$ такой, что $\mu(a_i) = b_i$ для $i = 1, \dots, n$.*

Действительно, существование подобного морфизма по определению влечет истинность на $\overline{b}$ $\overline{\mathcal{K}}$-неявной диаграммы элементов $\overline{a}$ алгебры $\mathcal{A}$. Обратно, если

$$\mathcal{B} \models \mathcal{D}^{\overline{\mathcal{K}}}_{\overline{a}}(\overline{b}),$$

то существует гомоморфизм φ алгебры $\langle \overline{a} \rangle_{\mathcal{A}}$ в алгебру $\mathcal{B}$ такой, что $\varphi(a_i) = b_i$ (для $i = 1, \dots, n$), так как позитивная диаграмма элементов $\overline{a}$ входит в $\mathcal{D}^{\overline{\mathcal{K}}}_{\overline{a}}(x_1, \dots, x_n)$. Более того, этот гомоморфизм φ остается и гомоморфизмом $\mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}})$-обогащения алгебры $\langle \overline{a} \rangle_{\mathcal{A}}$ в $\mathrm{If}(\overline{\mathcal{K}})$-обогащение алгебры $\mathcal{B}$. Определяемость же категории $\overline{\mathcal{K}}$ влечет при этом то, что φ будет и $\overline{\mathcal{K}}$-морфизмом.

Список литературы

1. *Пинус А. Г.* Неявные операции над категориями универсальных алгебр // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 1. С. 146–153.

2. *Пинус А. Г.* О неявных операциях на псевдоуниверсальных классах // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т. 10, № 4. С. 174–182.

3. *Пинус А. Г.* Позитивно условные псевдомногообразия и неявные операции на них // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 372–382.

4. *Пинус А. Г.* О условных многообразиях, условных псевдомногообразиях и неявных операциях на них // Алгебра и теория моделей 5. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. С. 138–161.

5. *Пинус А. Г.* Производные структуры универсальных алгебр. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.

6. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.

7. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 4. С. 35–72.

8. *Pinus A. G.* The Positive and Generalized Discriminators Don't Exist // Discussiones Mathem., General Algebra and Appl. 2000. Vol. 20. P. 121–128.

9. *Пинус А. Г.* Внутренние гомоморфизмы и позитивно-условные термы // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 32. С. 158–173.

Материал поступил в редколлегию 01.06.2010

Адрес автора

ПИНУС Александр Георгиевич

Новосибирский государственный технический университет

пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630092, Россия

e-mail: algebra@nstu.ru