УДК 515.145, 519.681.2

Е. С. Ошевская

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КАТЕГОРИЙ ПОЛУКУБИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ И ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ЧУ-ПРОСТРАНСТВ С СОХРАНЕНИЕМ ОТКРЫТОСТИ МОРФИЗМОВ*

Статья посвящена применению методов направленной алгебраической топологии для установления категорных взаимосвязей геометрических моделей параллельных процессов — полукубических множеств и поступательных Чу-пространств. В частности, сначала строятся категории рассматриваемых моделей, затем определяется и исследуется функтор универсальной *di*-накрывающей, отображающий категорию полукубических множеств в категорию их *di*-односвязных аналогов, и, наконец, устанавливается эквивалентность категорий поступательных Чу-пространств и *di*-односвязных полукубических множеств и при этом показывается сохранение важного свойства морфизмов категорий быть открытыми.

Ключевые слова: полукубические множества, Чу-пространства, открытые морфизмы, *di*-топология, *di*-гомотопия, эквивалентность категорий.

Введение

Направленная алгебраическая топология (или *di*-топология) [1], выделившаяся из алгебраической топологии в 1990-х гг., изучает направленные топологические пространства, т. е. пространства с выделенным направлением (порядком), и непрерывные отображения между ними, сохраняющими направление. Направленные пути (или *di*-пути) в отличие от обычных путей не могут быть обратимыми. Таким образом, например, на смену фундаментальным группам и фундаментальному группоиду классического пространства приходят фундаментальный моноид и фундаментальная категория направленного пространства. Многие понятия были успешно перенесены из алгебраической топологии в направленную с учетом заданного порядка (см., например, [1; 2]).

Полукубические множества (аналог полусимплектических множеств алгебраической топологии) — это семейства множеств кубов разной размерности, склеенных друг с другом по общим граням. В теории параллелизма полукубические множества принято называть автоматами высших размерностей (АВР) (см. [3; 4]), которые являются самой выразительной (см. [5]) и одновременно наименее изученной структурной моделью параллелизма. Модель АВР кажется многообещающей, поскольку она представима в виде полукубических множеств, к которым можно применять техники из направленной топологии для изучения параллельных вычислений (см. [6]). Например, два процесса параллельны тогда и только тогда, когда представляющие их *di*-пути *di*-гомотопны. Известны также работы Губо и Йенсена [7], Грандиса [8], Фаренберга [9] и Хусаинова [10], в которых авторы использовали гомологический подход, представив (полу)кубические

* Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00598-а), программой «Ведущие научные школы» (грант НШ-7256.2010.1) и DFG-РФФИ (грант 436 RUS 113/1002/01, 09-01-91334).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 3. С. 123–145

множества в виде алгебраических комплексов, что позволило им исследовать параллельные процессы с точки зрения di-гомологий (полу)кубических множеств.

Чу-пространства [11; 12] — это разновидность топологических пространств с множеством точек, множеством открытых множеств и отношением принадлежности с явно заданным множеством степеней принадлежности точки открытому множеству. Особенность Чу-пространств состоит в том, что они предоставляют различные интерпретации моделям благодаря своей возможности реализовать все малые категории и значительное количество больших категорий, возникающих в математической практике. В теории параллелизма Чу-пространства формализуют с точностью до изоморфизма так называемые структуры конфигураций (СК) [13] — семантическую модель параллелизма, обладающую наибольшей выразительной мощностью. СК часто используется для установления взаимосвязей между различными моделями параллельных процессов.

Данная статья посвящена применению методов направленной алгебраической топологии для установления категорных взаимосвязей геометрических моделей параллельных процессов — полукубических множеств и поступательных Чу-пространств. Это позволяет понять взаимосвязи между моделями АВР и СК и тем самым разработать параллельную семантику АВР в терминах СК. В частности, строятся категории изучаемых моделей и подкатегории их направленных путей, определяется и исследуется функтор универсальной di-накрывающей, отображающий категорию полукубических множеств в категорию их di-односвязных аналогов и являющийся сопряженным справа к функтору включения, а также устанавливается эквивалентность категорий поступательных Чу-пространств и di-односвязных полукубических множеств, при этом показывается сохранение свойства открытости морфизмов, т. е. морфизмов, удовлетворяющих свойству правого поднятия.

1. Полукубические множества и их кубические пути

Определим категорию **PS** полукубических множеств и выделим ее подкатегорию **cP** кубических путей.

Рассмотрим формальное определение полукубического множества.

Определение 1. *(Невырожденное) полукубическое множество* M — это набор множеств кубов $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ таких, что $M_n \cap M_{n'} = \emptyset$ $(n \neq n')$, вместе с функциями границ $M_n \overset{d_i^0}{\underset{d_j^1}{\rightrightarrows}} M_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N},\ i, j = 1 \ldots n)$ такими, что $|\{\, d_i^m(x) \mid i = 1 \ldots n \,\}| = n$ для любого $m = 0, 1$ и $x \in M_n$, удовлетворяющих условию коммутативности диаграмм

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "d_j^m"] \arrow[d, "d_i^k"'] & M_{n-1} \arrow[d, "d_i^k"] \\ M_{n-1} \arrow[r, "d_{j-1}^m"'] & M_{n-2} \end{tikzcd}$$

для всех $i < j$ и $k, m = 0, 1$.

Определение 2. *(Размеченным) полукубическим множеством (с отмеченной точкой)* называется тройка $\mathrm{M} = (M, i_0, l_L)$, где M — полукубическое множество, $i_0 \in M_0$ — отмеченная точка, и $l_L : M_1 \to L$ — *размечающая* функция из множества 1-кубов в множество L действий такая, что $l_L(d_i^0(x)) = l_L(d_i^1(x))$ $(i = 1, 2)$ для всех $x \in M_2$[1].

Последние годы полукубические множества стали активно использоваться в теории параллелизма, где они называются автоматами высших размерностей (АВР) [3; 4] и являются самой мощной структурной моделью [5]. АВР позволяют моделировать параллелизм естественным образом: параллельное выполнение n действий представляется n-мерным кубом, в то время как последовательное выполнение этих же действий — ребрами этого куба. В качестве примера рассмотрим АВР на рис. 1. Как показано справа, параллельное выполнение действий a и b моделируется 2-кубом (заполненным квадратом) x, имеющим в качестве границ 1-кубы (отрезки) x_1, y_2 и y_1, x_2. При этом границы квадрата представлены функциями двух типов: функциями-источниками d_1^0, d_2^0 и функциями-целями d_1^1, d_2^1 (в некотором смысле, $x_2 = d_1^1(x)$ и $y_2 = d_2^1(x)$ — это копии соответственно $x_1 = d_1^0(x)$ и $y_1 = d_2^0(x)$). Благодаря такому разделению функции границ определяют направление. Так, например, 1-куб x_1 начинается в 0-кубе (точке) $d_1^0(x_1) = i_0$ и заканчивается в 0-кубе $d_1^1(x_1) = s$. На этом же рисунке слева показано последовательное выполнение двух действий a и b, которое моделируется АВР, построенной из 1-кубов x_1, y_2 и y_1, x_2. При этом процессы и слева и справа начинают выполняться из выделенной точки i_0.

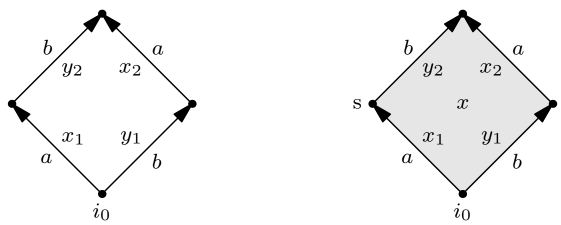

Рис. 1. Пример последовательного (слева) и параллельного (справа) выполнения действий a и b в АВР

Введем дополнительные понятия и обозначения. Определим отношение $\sim_\square \in (M_1)^2$ как минимальную эквивалентность такую, что если найдется $y \in M_2$ такой, что $x_1 = d_i^k(y)$ и $x_2 = d_i^{1-k}(y)$ для некоторых $i = 1, 2$ и $k = 0, 1$, то x_1 эквивалентно x_2. Пусть $\ll x \gg$ — класс эквивалентности $\sim_\square$. Неформально говоря, все $x_1 \in \ll x \gg$ моделируют одно и то же событие параллельного процесса. Далее, определим отображения $D^0, D^1 : M_n \to M_0$ для любого $n \geq 0$ формулами $D^0(x) = d_1^0 \circ \ldots \circ d_n^0(x)$ и $D^1(x) = d_1^1 \circ \ldots \circ d_n^1(x)$ соответственно для всех $x \in M_n$.

В дальнейшем будем рассматривать только полукубические множества, в которых любые $x_1, \ldots x_n \in M_1$ и $y \in M_n$ удовлетворяют следующим аксиомам:

A0 : если $d_1^0(x_1) = d_1^0(x_2)$ и $x_1 \sim_\square x_2$, то $x_1 = x_2$;

[1] Расширение l_L на любой $x \in M_n$ определяется следующим образом: для $n = 0$ имеем $l_L(x) = \emptyset$ и для $n > 1$ имеем $l_L(x) := (l_L(y_1), \ldots, l_L(y_n))$, где $y_i = d_1^0 \circ \ldots d_{i-1}^0 \circ d_{i+1}^0 \circ \ldots \circ d_n^0(x)$, для всех $1 \leq i \leq n$.

A1 : если $d_1^1(x_1) = d_1^0(x_2)$, $d_1^1(x_2) = d_1^0(x_3)$, …, $d_1^1(x_{n-1}) = d_1^0(x_n)$ и $x_i \sim_\Box d_1^{m_1^i} \circ \ldots \circ d_{\sigma(i)-1}^{m^i_{\sigma(i)-1}} \circ d_{\sigma(i)+1}^{m^i_{\sigma(i)+1}} \circ \ldots \circ d_n^{m_n^i}(y)$ для всех $1 \leq i \leq n$, то найдется единственный куб $x \in M_n$ такой, что $x_i = d_1^{m_1^i} \circ \ldots \circ d_{\sigma(i)-1}^{m^i_{\sigma(i)-1}} \circ d_{\sigma(i)+1}^{m^i_{\sigma(i)+1}} \circ \ldots \circ d_n^{m_n^i}(x)$ для всех $1 \leq i \leq n$, где $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ — перестановка порядка n. Здесь $m_j^i = 1$, если $j = \sigma(k)$ и $k < i$, и $m_j^i = 0$, иначе, для всех $1 \leq i, j \leq n$.

С точки зрения теории параллелизма, аксиома A0 говорит о том, что из одной точки не могут выходить два 1-куба, моделирующих одно и то же событие, аксиома A1 утверждает, что если существует заполненный n-мерный куб, моделирующий параллелизм n событий, то эти события будут параллельны всюду, где возможно их последовательное выполнение.

Определим морфизм между двумя полукубическими множествами как пару функций, отображающих кубы и их разметку одного полукубического множества в соответствующие кубы и их разметку другого полукубического множества и удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям.

Определение 3. Пусть $\mathrm{M}^1 = (M^1, i_0^1, l_{L^1}^1)$ и $\mathrm{M}^2 = (M^2, i_0^2, l_{L^2}^2)$ — полукубические множества. Отображение $\mathrm{f} = \langle f, \alpha \rangle$ ($f = \cup f_n$, $f_n : (M^1)_n \to (M^2)_n$ и $\alpha : L^1 \to L^2$) называется *морфизмом* из M^1 в M^2, если выполнены следующие условия:

1) $f_0(i_0^1) = i_0^2$;
2) $l_{L^2}^2 \circ f = \alpha \circ l_{L^1}^1$;
3) $f_n \circ d_i^m = d_i^m \circ f_{n+1}$.

Первое условие гарантирует, что морфизмы сохраняют отмеченные точки, второе и третье условия обеспечивают согласованность разметки и границ кубов соответственно.

Полукубические множества вместе с морфизмами между ними формируют категорию **PS**.

Кубический путь в полукубическом множестве M — это последовательность $P = p_0 p_1 \ldots p_k$ кубов такая, что $p_{s-1} = d_i^0(p_s)$ или $p_s = d_j^1(p_{s-1})$ $(s = 1 \ldots k)$ и, кроме того, $p_0 = i_0$. Далее через $\mathcal{CP}(\mathrm{M})$ $(\mathcal{CP}_u(\mathrm{M}))$ будем обозначать множество всех кубических путей (заканчивающихся в кубе $u \in M$) в полукубическом множестве M. Кроме того, пусть $\mathcal{CP}_1(\mathrm{M})$ — множество *одномерных кубических путей*, т. е. кубических путей $P = p_0 p_1 \ldots p_k$ в M таких, что p_i — либо 0-куб, либо 1-куб для любого $0 \leq i \leq k$. Кубический путь $Q = q_0 \ldots q_n$ является *расширением* кубического пути $P = p_0 \ldots p_k$ (обозначается $P \to Q$), если $n \geq k$ и $p_0 \ldots p_k = q_0 \ldots q_k$. В частности, будем писать $P \xrightarrow{d_i^m} Q$, если $n = k + 1$ и $q_k = d_i^0(q_{k+1})$ при $m = 0$ или $q_{k+1} = d_i^1(q_k)$ при $m = 1$. Кубический путь P называется *ациклическим*, если он не содержит одинаковых кубов и подкубов.

Аналогично тому, как в алгебраической топологии вводится понятие гомотопии путей, так и здесь определяется понятие di-гомотопии кубических путей, учитывая, что кубические множества всегда направленны (т. е. обладают некоторым порядком). di-гомотопия (обозначается $\sim$) — это наименьшая эквивалентность на кубических путях в полукубическом множестве M такая, что если кубический путь P *s-смежен* кубическому пути P' (обозначается $P \overset{s}{\leftrightarrow} P'$), т. е. P' может быть получен из P посредством

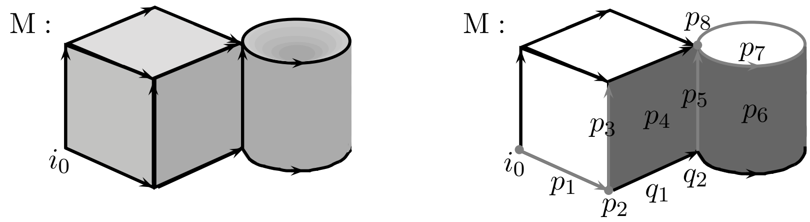

Рис. 2. Пример кубического пути в полукубическом множестве M

замены для некоторых $i < j$ и $m = 0, 1$ либо сегмента $\xrightarrow{d_i^0} p_s \xrightarrow{d_j^m}$ на сегмент $\xrightarrow{d_{j-1}^m} p'_s \xrightarrow{d_i^0}$ (или наоборот), либо сегмента $\xrightarrow{d_j^m} p_s \xrightarrow{d_i^1}$ на сегмент $\xrightarrow{d_i^1} p'_s \xrightarrow{d_{j-1}^m}$ (или наоборот), то P эквивалентен P'. Кроме того, кубические пути P и P' являются (s, u, v)-*смежными* (обозначается $P \overset{(s,u,v)}{\longleftrightarrow} P'$), если P' может быть получен из $P = \hat{p}_0 \dots \hat{p}_k$ посредством s-смежной замены его сегмента $\xrightarrow{d_u^n} \hat{p}_s \xrightarrow{d_v^l}$. Для каждого кубического пути P обозначим через $[P]$ его di-гомотопический класс.

Рассмотрим полукубическое множество M, изображенное слева на рис. 2 и состоящее из 3-куба и 2-куба, свернутого в цилиндр, а также из всех их подкубов, полученных под действием граничных функций. Примером кубического пути служит последовательность $P = i_0p_1p_2p_3p_4p_5p_6\ p_7p_8p_7$, выделенная серым цветом на рис. 2 справа. Кубический путь P di-гомотопен кубическому пути $Q = i_0p_1p_2q_1q_2p_5p_6p_7p_8p_7$, поскольку $P \overset{4}{\leftrightarrow} (i_0p_1p_2q_1p_4p_5p_6p_7p_8p_7) \overset{5}{\leftrightarrow} Q$. Кубический путь $i_0p_1p_2p_3p_4p_5$ является примером ацикличного кубического пути.

Кубический путь-объект — это полукубическое множество, имеющее форму ациклического кубического пути. Пусть **cP** обозначает полную подкатегорию кубических путей-объектов категории **PS**.

Снабдим категорию **PS** расслоённой структурой. Обозначим через $\mathbf{PS}_L$ подкатегорию, объекты которой — полукубические множества, имеющие одно и то же множество L действий, и морфизмы которой имеют в качестве второй компоненты тождественную функцию. Такое расслоение будет использоваться и для других категорий, рассматриваемых в данной статье.

2. Открытые морфизмы

Одним из важных понятий теории категорий являются *открытые морфизмы* [14], которые, как было показано в работе [15], могут быть использованы для определения понятия бисимуляционной эквивалентности моделей в различных категориях.

Для заданной категории **M** открытые морфизмы определяются по специально выделенной подкатегории, построенной по путям в объектах M $\in$ **M**, и являются своего рода функциями подобия между объектами категории. Пусть **M** — категория, а $\mathbf{P} \hookrightarrow \mathbf{M}$ — некоторая подкатегория категории **M**. Приведем формальное определение **P**-открытого морфизма.

Определение 4. Морфизм $\mathrm{f} : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ категории $\mathbf{M}$ называется $\mathbf{P}$-*открытым*, если для любого морфизма $\mathrm{m} : \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ подкатегории $\mathbf{P}$ и любого коммутативного квадрата, имеющего следующий вид:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[r, "\mathrm{p}"] \arrow[d, "\mathrm{m}"'] & \mathrm{M} \arrow[d, "\mathrm{f}"] \\ \mathrm{Q} \arrow[r, "\mathrm{q}"'] \arrow[ur, dashed, "\mathrm{r}"'] & \mathrm{N} \end{tikzcd}$$

существует морфизм $\mathrm{r} : \mathrm{Q} \to \mathrm{M}$, разбивающий диаграмму на два коммутативных треугольника.

Заметим, что объекты категории $\mathbf{M}$ и $\mathbf{P}$-открытые морфизмы образуют подкатегорию категории $\mathbf{M}$, так как очевидно, что тождественные морфизмы и композиции $\mathbf{P}$-открытых морфизмов являются $\mathbf{P}$-открытыми морфизмами.

Рассмотрим критерий $\mathbf{cP}_L$-открытости морфизмов категории $\mathbf{PS}_L$, состоящий из двух условий, налагаемых на морфизмы. Эти условия есть не что иное, как аналоги свойства накрывающей гомотопии алгебраической топологии.

Теорема 1. *Морфизм* $\mathrm{f} = \langle f, 1_L\rangle : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ *категории* $\mathbf{PS}_L$ *является* $\mathbf{cP}_L$*-открытым, если и только если для всех кубических путей P в полукубическом множестве* M *верно, что*

1) *если $f(P) \longrightarrow Q'$ в M', то $P \longrightarrow P'$ и $f(P') = Q'$ для некоторого кубического пути P' в* M*;*
2) *если $f(P) \sim Q'$ в M', то $P \sim P'$ и $f(P') = Q'$ для некоторого кубического пути P' в* M.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Пусть $\mathrm{f} = \langle f, 1_L\rangle : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ — $\mathbf{cP}_L$-открытый морфизм. Приведем доказательство справедливости пункта 1 (доказательство справедливости пункта 2 аналогично). Пусть P — кубический путь в M. Без потери общности предположим, что $f(P) \xrightarrow{d_i^l} Q'$ в M'. Рассмотрим под-ПМ P (Q'), имеющее форму кубического пути P (Q') в M (M'). Понятно, что найдутся кубический путь-объект $\widehat{\mathrm{P}}$ ($\widehat{\mathrm{Q}}$) и соответсвующий ему максимальный[2] кубический путь $\widehat{P}$ ($\widehat{Q}$) такие, что отображение p (q), действующее по правилу $p(\widehat{P}) = P$ ($q(\widehat{Q}) = Q'$), может быть дополнено до морфизма $\mathrm{p} = \langle p, 1_L\rangle : \widehat{\mathrm{P}} \to \mathrm{M}$ ($\mathrm{q} = \langle q, 1_L\rangle : \widehat{\mathrm{Q}} \to \mathrm{M}'$) из $\mathbf{PS}_L$. Заметим, что морфизм выглядит следующим образом: $\mathrm{p} : \widehat{\mathrm{P}} \to \mathrm{P} \hookrightarrow \mathrm{M}$ ($\mathrm{q} : \widehat{\mathrm{Q}} \to \mathrm{Q}' \hookrightarrow \mathrm{M}'$).

Пусть $\widehat{P} = p_0 \dots p_k$ и $\widehat{Q} = q_0 \dots q_k q_{k+1}$. Тогда положим $m(p_i) = q_i$ и $m(d_{j_1}^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ d_{j_s}^{\varepsilon_s}(p_i)) = d_{j_1}^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ d_{j_s}^{\varepsilon_s}(q_i)$ для всех $\varepsilon_r = 0, 1$, $r = 1 \dots s$, $1 \le j_1 < \ldots < j_s \le \dim p_i$, $1 \le s \le \dim p_i$ и $0 \le i \le k$. Видно, что $\mathrm{m} = \langle m, 1_L\rangle : \widehat{\mathrm{P}} \to \widehat{\mathrm{Q}}$ — морфизм в $\mathbf{cP}_L$. По определению m, получаем, что $\mathrm{f} \circ \mathrm{p} = \mathrm{q} \circ \mathrm{m}$.

Поскольку f — $\mathbf{cP}_L$-открытый морфизм, найдется морфизм $\mathrm{r} : \widehat{\mathrm{Q}} \to \mathrm{M}$ такой, что $\mathrm{p} = \mathrm{r} \circ \mathrm{m}$ и $\mathrm{q} = \mathrm{f} \circ \mathrm{r}$. Следовательно, существует кубический путь $r(\widehat{Q})$ в M. Легко

[2] Максимальным кубическим путем кубического пути-объекта называется любой ациклический кубический путь, форму которого имеет этот кубический путь-объект.

увидеть, что $m(\widehat{P}) = (q_0 \dots q_k) \xrightarrow{d_i^l} (q_0 \dots q_{k+1}) = \widehat{Q}$, в силу определения $\xrightarrow{d_i^l}$. Значит, можем написать $r(m(\widehat{P})) \xrightarrow{d_i^l} r(\widehat{Q})$, поскольку r — морфизм в $\mathbf{PS}_L$. Так как $\mathrm{p} = \mathrm{r} \circ \mathrm{m}$ и $\mathrm{q} = \mathrm{f} \circ \mathrm{r}$, имеем, что $p(\widehat{P}) = P \xrightarrow{d_i^l} r(\widehat{Q})$ и $f(r(\widehat{Q})) = q(\widehat{Q}) = Q'$.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathrm{f} = \langle f, 1_L \rangle : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ — морфизм из $\mathbf{PS}_L$ и выполнены условия теоремы. Покажем, что f $\mathbf{cP}_L$-открыт.

Введем дополнительные понятия. Пусть O_1 и O_2 — кубические пути-объекты. Тогда морфизм $\iota_{\mathrm{l(w)}} = \langle \iota_{l(w)}, 1_L \rangle : \mathrm{O}_1 \to \mathrm{O}_2$ называется *l-шагом* (*w-шагом*), если найдутся максимальные кубические пути O_1 и O_2 в O_1 и O_2 соответственно такие, что $\iota_l(O_1) \xrightarrow{d_i^m} O_2$ ($\iota_w(O_1) \xleftrightarrow{(s,u,v)} O_2$).

Легко доказать, что любой морфизм $\langle m, 1_L \rangle$ категории $\mathbf{cP}_L$ есть не что иное, как конечная (скажем, длиной n) композиция изоморфизма, l-шагов и w-шагов. Поэтому, используя индукцию по n, достаточно показать, что f — $\mathbf{cP}_L$-открытый морфизм по отношению к изоморфизму, l-шагам или w-шагам. Пусть, например, $\mathrm{m} = \iota_{\mathrm{w}} : \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ — w-шаг (доказательство остальных случаев аналогично и, более того, проще). Тогда найдутся максимальные кубические пути P и Q для кубических путей-объектов P и Q соответственно такие, что $\iota_w(P) \xleftrightarrow{(s,u,v)} Q$. Рассмотрим произвольные морфизмы $\mathrm{p} : \mathrm{P} \to \mathrm{M}$, $\mathrm{q} : \mathrm{Q} \to \mathrm{M}'$ из $\mathbf{PS}_L$ такие, что $\mathrm{f} \circ \mathrm{p} = \mathrm{q} \circ \iota_{\mathrm{w}}$. Поскольку q — морфизм, имеем, что $q(\iota_w(P)) \xleftrightarrow{(s,u,v)} q(Q)$ в M'. Так как $f(p(P)) = q(\iota_w(P))$, то, по условию теоремы, найдется кубический путь P' в M такой, что $p(P) \xleftrightarrow{(s,u,v)} P'$ и $f(P') = q(Q)$. Определим отображение r следующим образом: $r(Q) = P'$. Расширим это отображение так, чтобы пара отображений $\langle r, 1_L \rangle$ удовлетворяла условиям морфизма из $\mathbf{PS}_L$. Очевидно, что $\mathrm{p} = \mathrm{r} \circ \iota_{\mathrm{w}}$ и $\mathrm{q} = \mathrm{f} \circ \mathrm{r}$. Следовательно, f — $\mathbf{cP}_L$-открытый морфизм. □

В работе [15] было предложено использовать понятие «моста» $\mathbf{P}$-открытых морфизмов для определения $\mathbf{P}$-бисимуляции на объектах категории $\mathbf{M}$.

Определение 5. Два объекта M' и M'' категории $\mathbf{M}$ называются $\mathbf{P}$-*бисимуляционно эквивалентными*, если существует конструкция $\mathbf{P}$-открытых морфизмов $\mathrm{M}' \xleftarrow{\mathrm{f}'} \mathrm{M} \xrightarrow{\mathrm{f}''} \mathrm{M}''$.

Следует отметить, что в теории параллелизма бисимуляция играет существенную роль. Две системы считаются бисимуляционно эквивалентными, если при функционировании каждая система симулирует поведение другой. В настоящее время для данной эквивалентности разработана мощная теория — предложены различные понятия бисимуляций, исследованы их взаимосвязи и сформулированы их алгебраические и логические характеризации. Кроме того, в работах [15–17] даны категорные (в терминах «мостов» открытых морфизмов) характеризации бисимуляционных эквивалентностей в контексте категорий различных параллельных моделей.

3. Универсальное *di*-накрытие полукубических множеств

Для того чтобы установить взаимосвязи между моделями полукубических множеств и Чу-пространств, в данном разделе вводятся и исследуются понятия *di*-односвязного полукубического множества и *di*-накрытия полукубического множества.

Определение 6. Полукубическое множество M называется *di-односвязным*, если для любого $u \in M$ верно:

- найдется кубический путь $P \in \mathcal{CP}_u(\mathrm{M})$;
- для любых кубических путей $P,Q \in \mathcal{CP}_u(\mathrm{M})$ имеем $P \sim Q$.

Это определение является аналогом односвязности пространства в алгебраической топологии.

Пусть **oPS** обозначает полную подкатегорию категории **PS**, объектами которой являются di-односвязные полукубические множества. Ясно, что категория **cP** является подкатегорией категории **oPS**.

Введем дополнительные понятия и обозначения. Для кубического пути $P \in \mathcal{CP}_{p_k}(\mathrm{M})$ с $\dim p_k > 0$, определим его i-начало $d_i^0(P)$ как кубический путь из $\mathcal{CP}_{d_i^0(p_k)}(\mathrm{M})$, удовлетворяющий либо условию (i) $P = d_i^0(P)p_k$, либо условию (ii) $P \overset{m+1}{\longleftrightarrow} P_1 \overset{m+2}{\longleftrightarrow} \ldots \overset{k-2}{\longleftrightarrow} \overset{k-2}{\longleftrightarrow} P_{k-m-2} \overset{k-1}{\longleftrightarrow} d_i^0(P)p_k$ для некоторого $0 \leq m \leq (k-2)$. Определим i-конец $d_i^1(P)$ кубического пути P с $\dim p_k > 0$ как кубический путь из $\mathcal{CP}_{d_i^1(p_k)}(\mathrm{M})$ такой, что $d_i^1(P) = = Pd_i^1(p_k)$.

Лемма 1. *Для любого кубического пути $P \in \mathcal{CP}_{p_k}(\mathrm{M})$ с $\dim p_k > 0$ существует единственный кубический путь $d_i^l(P) \in \mathcal{CP}_{d_i^l(p_k)}(\mathrm{M})$ при любом $l = 0, 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно следует из рассуждений, приведенных в работе [5. С. 280–281]. □

Теперь можем определить универсальную di-накрывающую полукубического множества, которая, как будет показано ниже, является di-односвязным полукубическим множеством, а также рассмотрим понятие универсального di-накрытия. Кроме того, будет показано, что функтор универсальной di-накрывающей сопряжен справа к функтору включения **oPS** $\hookrightarrow$ **PS**.

Определение 7. Пусть $\mathrm{M} = (M, i_0^{\mathrm{M}}, l_L^{\mathrm{M}})$ — полукубическое множество. Тогда *универсальным di-накрытием* M называется отображение $\rho_{\mathrm{M}} = \langle \rho_M, 1_L \rangle : \mathcal{U}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$, где $\mathcal{U}(\mathrm{M}) = (A, i_0, l_L)$ — универсальная di-накрывающая M, которая выглядит следующим образом:

- $A_n = \{[P = p_0 \ldots p_k] \mid P \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$ и $p_k \in M_n\}$ $(n \geq 0)$, при этом $\widetilde{d_i^m}([P]) = [d_i^m(P)]$;
- $i_0 = [i_0^{\mathrm{M}}]$;
- $l_L([p_0 \ldots p_k]) = l_L^{\mathrm{M}}(p_k)$ для $[p_0 \ldots p_k] \in A_1$,

а отображение ρ_{M} определяется формулой $\rho_M([p_0 \ldots p_k]) = p_k$ для всех $[p_0 \ldots p_k] \in A$.

Пример универсального di-накрытия $\rho_{\mathrm{M}} : \mathcal{U}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ можно найти на рис. 3. Здесь слева изображено полукубическое множество M, а справа — его универсальная di-накрывающая. Кубические пути $P = i_0x_1sx_2t_1z_1t_2z_2t_2z_2t_2$ и $Q = i_0y_1ry_2t_1z_1t_2z_2t_2z_2t_2$ не являются di-гомотопными в M. Следовательно, два 0-куба $[P]$ и $[Q]$ не совпадают в $\mathcal{U}(\mathrm{M})$, хотя $\rho_M([P]) = t_2 = \rho_M([Q])$.

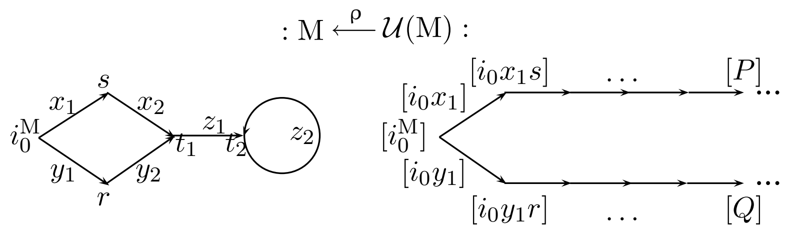

Рис. 3. Пример универсального di-накрытия

Теорема 2. *Пусть* M *— полукубическое множество, размеченное множеством* L, *и* $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ *— его универсальная* di*-накрывающая. Тогда верно:*

1) $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ *— объект категории* **PS** *и отображение* $\rho_{\mathrm{M}} = \langle \rho_M, 1_L\rangle : \mathcal{U}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$, *определенное выше, — это* $\mathbf{cP}_L$*-открытый морфизм категории* $\mathbf{PS}_L$, *т. е.* M *и* $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ $\mathbf{cP}_L$*-бисимуляционны;*

2) $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ *—* di*-односвязное полукубическое множество;*

3) $\mathcal{U}$ *— функтор, сопряженный справа к функтору включения* $\iota : \mathbf{oPS} \hookrightarrow \mathbf{PS}$, *и, таким образом,* **oPS** *— корефлективная подкатегория категории* **PS**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Сначала докажем справедливость пункта 1 теоремы. Начнем с доказательства коммутативности диаграмм из определения полукубического множества, так как условие об n-кубе, начинающегося и заканчивающегося n различными гранями, для $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ очевидно. Имеем $\widetilde{d}_i^m(\widetilde{d}_j^k([P])) = [d_i^m(d_j^k(P))] = [d_{j-1}^k(d_i^m(P))] = \widetilde{d}_{j-1}^k(\widetilde{d}_i^m([P]))$ для $i < j$. Покажем справедливость аксиомы A0 (справедливость аксиомы A1 доказывается аналогично). Пусть $[p_0 \dots p_k], [q_0 \dots q_m] \in A_1$, $\widetilde{d}_1^0([p_0 \dots p_k]) = \widetilde{d}_1^0([q_0 \dots q_m])$ и $[p_0 \dots p_k] \sim_\square [q_0 \dots q_m]$. Тогда из равенства функций границ следует, что $d_1^0(p_k) = d_1^0(q_m)$, а из определения отношения $\sim_\square$ вытекает, что $p_k \sim_\square q_m$. Так как для M справедлива аксиома A0, верно, что $p_k = q_m$. Таким образом, $[p_0 \dots p_k] = [d_1^0(p_0 \dots p_k)p_k] = [d_1^0(q_0 \dots q_m)p_k] = [d_1^0(q_0 \dots q_m)q_m] = [q_0 \dots q_m]$.

Докажем, что ρ_{M} — $\mathbf{cP}_L$-открытый морфизм. Поскольку очевидно, что это морфизм, можем воспользоваться теоремой 1. Докажем справедливость только пункта 2 этой теоремы, так как доказательство справедливости пункта 1 аналогично. Рассмотрим произвольный кубический путь $O = o_0 \dots o_k$ в $\mathcal{U}(\mathrm{M})$. Пусть $\rho_M(O) = p_0 \dots p_k$. Тогда, индукцией по k, легко показать, что $o_i = [p_0 \dots p_i]$ для всех $0 \le i \le k$. Пусть $\rho_M(O) \overset{(s,u,v)}{\longleftrightarrow} P'$ для некоторого кубического пути $P' = p_0 \dots p'_s \dots p_k$ в M. Тогда положим $o'_s = [p_0 \dots p_{s-1}p'_s]$. В соответствии с построением $\mathcal{U}(\mathrm{M})$, $O' = o_0 \dots o'_s \dots o_k$ — кубический путь в $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ и $O \overset{(s,u,v)}{\longleftrightarrow} O'$. Ясно, что $\rho_M(O') = P'$.

Теперь покажем, что выполнен пункт 2 теоремы 3. В определении di-односвязности справедливость пункта 1 очевидна, а справедливость пункта 2 следует из теоремы 1, примененной к ρ_{M}.

И наконец, докажем справедливость пункта 3 теоремы. Пусть M, N — полукубические множества, и $\mathcal{U}(\mathrm{M})$, $\mathcal{U}(\mathrm{N})$ — их универсальные di-накрывающие соответственно. Для морфизма $\mathrm{f} = \langle f, \alpha\rangle : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ определим отображение $\mathcal{U}(\mathrm{f}) = \langle \mathcal{U}(f), \alpha\rangle : \mathcal{U}(\mathrm{M}) \to \mathcal{U}(\mathrm{N})$ следующим образом: $\mathcal{U}(f)([P]) = [f(P)]$, где $P \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$. Понятно, что $\mathcal{U}(\mathrm{f})$ — морфизм категории **oPS**, а значит, очевидно, что $\mathcal{U}$ — функтор.

Предположим, что M — объект **PS**, и O — объект категории **oPS**. Необходимо найти биекцию между морфизмами $\mathrm{f} : \mathrm{O} \to \mathrm{M}$ категории **PS** и морфизмами $\mathrm{g} : \mathrm{O} \to \mathcal{U}(\mathrm{M})$ категории **oPS**, а также показать, что эта биекция естественная как по O, так и по M. Для морфизма $\mathrm{f} = \langle f, \alpha\rangle : \mathrm{O} \to \mathrm{M}$ определим морфизм $\varphi_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{f}) = \langle \varphi_{\mathrm{O,M}}(f), \alpha\rangle : \mathrm{O} \to \mathcal{U}(\mathrm{M})$, заданный как $\varphi_{\mathrm{O,M}}(f)(v) = [f(P_v)]$ для всех $v \in O$, где $P_v \in \mathcal{CP}_v(\mathrm{O})$. Также для морфизма $\mathrm{g} = \langle g, \alpha\rangle : \mathrm{O} \to \mathcal{U}(\mathrm{M})$ определим морфизм $\psi_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{g}) = \langle \psi_{\mathrm{O,M}}(g), \alpha\rangle : \mathrm{O} \to \mathrm{M}$, заданный как $\psi_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{g}) = \rho_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{g}$. Легко показать, что $\varphi_{\mathrm{O,M}}$ и $\psi_{\mathrm{O,M}}$ определены корректно.

Теперь докажем, что $\varphi_{\mathrm{O,M}}$ — биекция. Предположим, что $\mathrm{f}, \mathrm{f}' : \mathrm{O} \to \mathrm{M}$ — морфизмы такие, что $\varphi_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{f}) = \varphi_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{f}')$. Тогда имеем, что $[f(P_v)] = \varphi_{\mathrm{O,M}}(f)(v) = \varphi_{\mathrm{O,M}}(f')(v) = [f'(P_v)]$ для любых $v \in O$ и $P_v \in \mathcal{CP}_v(\mathrm{O})$. Это означает, что $f(v) = f'(v)$ для любого v. Далее, рассмотрим морфизм $\mathrm{g} = \langle g, \alpha\rangle : \mathrm{O} \to \mathcal{U}(\mathrm{M})$ категории **oPS**. Нужно доказать, что существует морфизм $\mathrm{f} = \langle f, \alpha\rangle : \mathrm{O} \to \mathrm{M}$ категории **PS** такой, что $\varphi_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{f}) = \mathrm{g}$. Положим $\mathrm{f} = \langle f, \alpha\rangle = \psi_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{g})$. Действительно, если $P_v = p_0 \ldots (p_k = v)$, то имеем, что $\varphi_{\mathrm{O,M}}(f)(v) = [f(P_v)] = [\rho_M(g(P_v))] = [\rho_M(g(p_0)) \ldots \rho_M(g(p_k))] = g(\rho_O([P_v])) = g(v)$. Следовательно, $\varphi_{\mathrm{O,M}}$ — биекция такая, что $\varphi^{-1}_{\mathrm{O,M}} = \psi_{\mathrm{O,M}}$.

Покажем, что $\varphi_{\mathrm{O,M}}$ — естественная биекция по O (доказательство естественности $\varphi_{\mathrm{O,M}}$ по M аналогично). Для этой цели нам нужно рассмотреть следующую диаграмму для произвольных объектов O, O' и произвольного морфизма $\mathrm{r} : \mathrm{O}' \to \mathrm{O}$ категории **oPS**:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{PS}(\mathrm{O},\mathrm{M}) \arrow[d, "(r)^*"'] & \mathbf{oPS}(\mathrm{O},\mathcal{U}(\mathrm{M})) \arrow[l, "\varphi^{-1}_{\mathrm{O,M}}"'] \arrow[d, "r^*"] \\
\mathbf{PS}(\mathrm{O}',\mathrm{M}) & \mathbf{oPS}(\mathrm{O}',\mathcal{U}(\mathrm{M})) \arrow[l, "\varphi^{-1}_{\mathrm{O}',\mathrm{M}}"]
\end{tikzcd}
$$

Отображения r^* и $(r)^*$ определены следующим образом: $r^*(\mathrm{g}) = \mathrm{g} \circ \mathrm{r}$ для любого морфизма $\mathrm{g} : \mathrm{O} \to \mathcal{U}(\mathrm{M})$ и $(r)^*(\mathrm{f}) = \mathrm{f} \circ \mathrm{r}$ для любого морфизма $\mathrm{f} : \mathrm{O} \to \mathrm{M}$. Докажем, что рассматриваемая диаграмма коммутирует. Действительно, с одной стороны, имеем, что $(r)^*(\varphi^{-1}_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{g})) = (r)^*(\rho_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{g}) = \rho_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{g} \circ \mathrm{r}$, а с другой стороны, верно, что $\varphi^{-1}_{\mathrm{O}',\mathrm{M}}(r^*(\mathrm{g})) = \varphi^{-1}_{\mathrm{O}',\mathrm{M}}(\mathrm{g} \circ \mathrm{r}) = \rho_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{g} \circ \mathrm{r}$.

Таким образом, $\mathcal{U} : \mathbf{PS} \to \mathbf{oPS}$ — функтор, сопряженнный справа к функтору включения $\mathbf{oPS} \hookrightarrow \mathbf{PS}$ (см. [18]). □

4. Поступательные Чу-пространства и их пути

В данном разделе определяется категория **SCS** поступательных Чу-пространств и выделяется ее подкатегория **P** путей в Чу-пространствах.

Сначала рассмотрим формальное определение поступательных Чу-пространств и путей в них. Пусть E — множество, тогда $\mathcal{L}(\mathcal{P}_{fin}(E))$ — множество всех линейных порядков на конечных подмножествах множества E.

Определение 8. *(Размеченное) поступательное Чу-пространство* (ПЧ) — это тройка $\mathrm{E} = (E, \diamond, l_L)$, где

- E — множество *событий*;
- $\diamond = \bigcup\limits_{n\geq 0} \diamond^n = \bigcup\limits_{n\geq 0, <\in\mathcal{L}(\mathcal{P}_{fin}(E))} \diamond^n_< \subseteq \mathcal{P}_{fin}(E)\times\mathcal{P}_{fin}(E)$ — *отношение поступательности* такое, что если $F \diamond^n_< G$, то $F \subseteq G$, на n-элементном множестве $G \setminus F$ действует линейный порядок $<$ и, кроме того, $F \diamond^m_{<|_{H\setminus F}} H \diamond^{n-m}_{<|_{G\setminus H}} G$ для всех $F \subseteq H \subseteq G$.
- $l_L : E \to L$ — *размечающая* функция из множества событий в множество действий.

Такие пространства в теории параллелизма называются структурами событий высших размерностей [19], являющиеся некоторым подклассом структур конфигураций [13].

Наложим на поступательные Чу-пространства следующие аксиомы:

$$\mathrm{B0}\ : \text{если } F\diamond^3 F\sqcup^4\{e\} \text{ и } G\diamond G\sqcup\{e\},$$
$$\text{то } F\cap G \diamond (F\cap G)\sqcup\{e\} \diamond^{k_1}_{<_1} \begin{cases} \cdots\diamond^{k_m}_{<_m} F\sqcup\{e\} \\ \cdots\diamond^{k^l}_{<^l} G\sqcup\{e\} \end{cases},$$

$$\mathrm{B1}\ : \text{если } F\diamond F\sqcup\{e_1\}\diamond F\sqcup\{e_1,e_2\}\diamond\cdots\diamond F\sqcup\{e_1,\dots,e_n\} \text{ и}$$
$$G\diamond^n_< G\sqcup\{e_1,\dots,e_n\}, \text{ то } F\diamond^n_< F\sqcup\{e_1,\dots,e_n\}.$$

Поскольку поступательные Чу-пространства моделируют параллельные процессы, аксиомы имеют следующую интерпретацию: аксиома B0 выражает так называемое условие стабильности, запрещающее одному и тому же событию возникать в конфликтующих процессах, в то время как аксиома B1 утверждает, что если n событий параллельны в некотором подмножестве множества событий, то они будут параллельны всюду, где они выполнены последовательно.

Путь в ПЧ E — это последовательность $F = (\emptyset \diamond^{k_1}_{<_1} F_1 \diamond^{k_2}_{<_2} \cdots \diamond^{k_n}_{<_n} F_n)$ в E. Пусть $\Pi(\mathrm{E})$ ($\Pi_{F_n}(\mathrm{E})$) обозначает множество путей (заканчивающихся общим подмножеством F_n) в ПЧ E, а $\Pi_1(\mathrm{E})$ — множество одноэлементных путей в ПЧ E, т. е. путей с $k_1 = \cdots = k_n = 1$. *di-гомотопия* на путях в ПЧ E — это минимальная эквивалентность такая, что если путь F получен из пути G с помощью удаления одного подмножества, не являющегося ни началом ни концом пути, то F эквивалентно G. Для каждого пути F обозначим через $[F]$ его di-гомотопический класс.

Отметим, что в общем случае не все события и не каждые две точки, связанные отношением поступательности, могут быть достигнуты из множества $\{\emptyset\}$ с помощью отношения $\diamond$. Для того чтобы исключить такие ситуации, определим специальный подкласс ПЧ. Поступательное Чу-пространство $\mathrm{E} = (E, \diamond, l_L)$ называется *достижимым*, если для

[3] Мы опускаем (верхний) и (нижний) индекс у поступательного отношения $\diamond$ в тех случаях, когда это не вызывает разночтений.

[4] Здесь и далее символ $\sqcup$ обозначает объединение непересекающихся множеств.

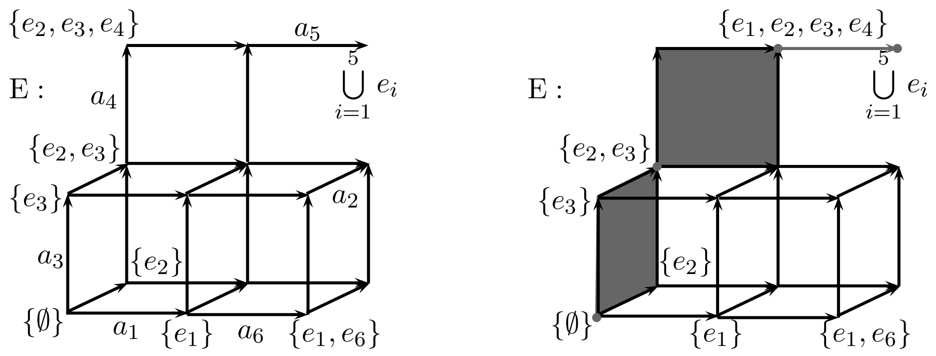

Рис. 4. Пример пути в поступательном Чу-пространстве E

каждого события $e \in E$ найдется пара $(F, F) \in \diamond$ такая, что $e \in F$, для каждой пары $(F, F) \in \ \diamond$ найдется путь, заканчивающийся подмножеством F, и все пути, заканчивающиеся одним и тем же подмножеством, di-гомотопны. В дальнейшем будем рассматривать только достижимые ПЧ и называть их поступательными Чу-пространствами.

В качестве примера поступательного Чу-пространства рассмотрим E, изображенное на рис. 4. Оно состоит из множества $E = \{e_1, \ldots, e_6\}$, отношения поступательности

$$\begin{gathered}\diamond = (\diamond^3 = \{(\{\emptyset\}, \{e_1, e_2, e_3\})\}) \ \cup \ (\diamond^2 = \{(\{e_2, e_3\}, \{e_i \mid i = 1 \ldots 4\}), (\{e_1\}, \{e_1, e_2, e_6\}),\\ (\{e_1\}, \{e_1, e_3, e_6\}), (\{e_1\}, \{e_1, e_2, e_3\}), (\{e_1, e_6\}, \{e_i \mid i = 1 \ldots 4\}),\\ (\{e_1, e_2\}, \{e_i \mid i = 1 \ldots 4\}), (\{e_1, e_3\}, \{e_i \mid i = 1 \ldots 4\})\} \cup A) \cup\\ \cup (\diamond^1 = \{(\{e_i \mid i = 1 \ldots 4\}, \{e_i \mid i = 1 \ldots 5\})\} \cup B),\end{gathered}$$

где множества A и B состоят из подотношений поступательности отношений $\diamond^3$ и $\diamond^2 \cup \diamond^3$ соответственно, и функции разметки l_L, действующей по правилу $l_L(e_i) = a_i$ для всех $1 \le i \le 6$. Примером пути может служить последовательность $F = (\emptyset \diamond^2 \{e_2, e_3\} \diamond^2 \diamond^2 \{e_i \mid i = 1 \ldots 4\} \diamond^1 \{e_i \mid i = 1 \ldots 5\})$, выделенная на рис. 4 серым цветом. Путь F di-гомотопен пути $G = (\emptyset \diamond^3 \{e_1, e_2, e_3\} \diamond^1 \{e_i \mid i = 1 \ldots 4\} \diamond^1 \{e_i \mid i = 1 \ldots 5\})$ через путь $\emptyset \diamond^2 \{e_2, e_3\} \diamond^1 \{e_i \mid i = 1 \ldots 3\} \diamond^1 \{e_i \mid i = 1 \ldots 4\} \diamond^1 \{e_i \mid i = 1 \ldots 5\}$.

Определим понятие морфизма на поступательных Чу-пространствах. Пусть $\mathrm{E}^1 = (E^1, \diamond^1, l^1_{L^1})$ и $\mathrm{E}^2 = (E^2, \diamond^2, l^2_{L^2})$ — ПЧ. *Морфизм* из E^1 в E^2 — это пара функций $f : E^1 \to E^2$ и $\alpha : L^1 \to L^2$ таких, что верно

1) $\alpha \circ l^1_{L^1} = l^2_{L^2} \circ f$,

2) $F(\diamond^1)^n_{<} G \Rightarrow f(F)(\diamond^2)^n_{\prec} f(G)$,

3) $e_i < e_j \Rightarrow f(e_i) \prec f(e_j)$ для всех $1 \le i, j \le n$ и $F(\diamond^1)^n_{<}(F \sqcup \{e_1, \ldots, e_n\})$.

Пусть **SCS** обозначает категорию ПЧ с только что определенными морфизмами.

Поскольку все ПЧ таковы, что не имеет значения, какой путь приведет нас в заранее выбранное подмножество событий, то удобно записывать класс эквивалентности $[F = (\emptyset \diamond^{k_1}_{<_1} F_1 \diamond^{k_2}_{<_2} \cdots \diamond^{k_n}_{<_n} F_n)]$ как $[F_n]$. Кроме того, по $[F_n]$ в ПЧ E можно построить *вычисление* $\mathrm{F_n}$, т.е. под-ПЧ, лежащее в E, с множеством событий $F_n \subseteq E$, отношением поступательности и размечающей функцией ПЧ E, ограниченными на события из множества F_n.

Определим $\mathbf{P}$ как полную подкатегорию категории $\mathbf{SCS}$ с вычислениями в качестве объектов. Таким образом, можно говорить о $\mathbf{P}_L$-открытых морфизмах категории $\mathbf{SCS}_L$ и $\mathbf{P}_L$-бисимуляции на объектах категории $\mathbf{SCS}_L$.

5. Эквивалентность категорий oPS и SCS с сохранением открытости морфизмов

В этом разделе сначала строятся отображения $\mathcal{F} : \mathbf{SCS} \to \mathbf{oPS}$ и $\mathcal{G} : \mathbf{oPS} \to \mathbf{SCS}$ и доказывается, что они являются функторами. Затем с помощью функтора $\mathcal{G}$ показывается, что $\mathcal{F}$ — строгий, полный и плотный функтор, т.е. категории $\mathbf{oPS}$ и $\mathbf{SCS}$ эквивалентны (см., например, [18]).

Утверждение 1. *Отображение* $\mathcal{F} : \mathbf{SCS} \to \mathbf{oPS}$, *сопоставляющее объекту* $\mathrm{E} = (E, \diamond, l_L)$ *категории* $\mathbf{SCS}$ *объект* $\mathcal{F}(\mathrm{E}) = (M, i_0^{\mathrm{M}}, l_L^{\mathrm{M}})$ *категории* $\mathbf{oPS}$, *где*

- $M_n = \{(F,G)_< \mid F, G \in \mathcal{P}_{fin}(E),\ <\in \mathcal{L}(\mathcal{P}_{fin}(E)),\ F \diamond^n_< G\}$, *при этом*

$$\widehat{d}^0_i(F,G)_< = (F, G \setminus pr_i(G \setminus F))_{<|_H} \quad \text{и} \quad \widehat{d}^1_i(F,G)_< = (F \sqcup pr_i(G \setminus F), G)_{<|_H},$$

где $pr_i(e_1 < \dots < e_n) = e_i$ *(проекция на i-й элемент) и* $H = G \setminus (F \sqcup pr_i(G \setminus F))$;

- $i_{0_{\mathrm{M}}} = (\emptyset, \emptyset)$[5];
- $l_L^{\mathrm{M}}(F, F \sqcup e) = l_L(e)$ *для всех* $(F, F \sqcup e) \in \diamond^1$,

и сопоставляющее морфизму $\mathrm{f} = \langle f, \alpha \rangle : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2$ *категории* $\mathbf{SCS}$ *морфизм* $\mathcal{F}(\mathrm{f}) = \left\langle \widehat{f}, \alpha \right\rangle : \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ *категории* $\mathbf{oPS}$, *где* $\widehat{f}(F,G)_< = (f(F), f(G))_\prec$ *для всех* $(F,G)_< \in (M^1)_n$, *является функтором.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $\mathcal{F}(\mathrm{E})$ — полукубическое множество. Докажем коммутативность диаграмм из определения полукубического множества, например, для $k = m = 0$ (остальные случаи доказываются аналогично). Пусть $(F,G) \in M_n$ и $G \setminus F = e_1 < \dots < e_n$. При $i < j$ имеем, что

$$\begin{aligned}
\widehat{d}^0_i(\widehat{d}^0_j(F,G)) &= (F, (G \setminus pr_j(G \setminus F)) \setminus pr_i((G \setminus pr_j(G \setminus F)) \setminus F)) = \\
&= (F, G \setminus (pr_j(e_1 < \dots < e_n) \cup pr_i(e_1 < \dots < e_{j-1} < e_{j+1} < \dots < e_n))) = \\
&= (F, G \setminus (e_j \cup e_i)) = \\
&= (F, G \setminus (pr_i(e_1 < \dots < e_n) \cup pr_{j-1}(e_1 < \dots < e_{i-1} < e_{i+1} < \dots < e_n))) = \\
&= (F, (G \setminus pr_i(G \setminus F)) \setminus pr_{j-1}((G \setminus pr_i(G \setminus F)) \setminus F)) = \\
&= \widehat{d}^0_{j-1}(\widehat{d}^0_i(F,G)).
\end{aligned}$$

[5] Здесь и далее мы будем опускать значок линейного порядка в тех случаях, когда это не приводит к разночтениям.

Проверим справедливость аксиомы A0 для $\mathcal{F}(\mathrm{E})$ (справедливость аксиомы A1 доказывается аналогично). Пусть $(F, F \sqcup e_1), (G, G \sqcup e_2) \in M_1$, $\widehat{d}_1^0(F, F \sqcup e_1) = \widehat{d}_1^0(G, G \sqcup e_2)$ и $(F, F \sqcup e_1) \sim_\square (G, G \sqcup e_2)$. Равенство граничных функций означает, что $F = G$, а отношение $\sim_\square$ между 1-кубами влечет $e_1 = e_2$. Таким образом, $(F, F \sqcup e_1) = (G, G \sqcup e_2)$.

Теперь докажем справедливость второго пункта определения di-односвязности для $\mathcal{F}(\mathrm{E})$ (справедливость первого пункта доказывается аналогично). Пусть $\widehat{P}$, $\widehat{Q} \in \in \mathcal{CP}_{(F,G)_<}(\mathcal{F}(\mathrm{E}))$, где $(F,G)_< \in M_n$, $n \geq 0$. Без ограничения общности можем считать, что

$$\widehat{P} = P\widehat{d}_2^0 \circ \cdots \circ \widehat{d}_n^0(F,G)_< \ldots \widehat{d}_n^0(F,G)_<(F,G)_<$$

и

$$\widehat{Q} = Q\widehat{d}_2^0 \circ \cdots \circ \widehat{d}_n^0(F,G)_< \ldots \widehat{d}_n^0(F,G)_<(F,G)_<\,,$$

где $P, Q \in \mathcal{CP}_{1,(F,F)}(\mathcal{F}(\mathrm{E}))$. Пусть

$$P = (\emptyset,\emptyset)\ldots(F_i,F_i)(F_i,F_{i+1})(F_{i+1},F_{i+1})\ldots(F,F)$$

и

$$Q = (\emptyset,\emptyset)\ldots(G_j,G_j)(G_j,G_{j+1})(G_{j+1},G_{j+1})\ldots(F,F).$$

Из определения отображения $\mathcal{F}$ следует, что для P и Q найдутся их прообразы

$$P_1 = (\emptyset \diamond \cdots \diamond F_i \diamond \cdots \diamond F)$$

и

$$Q_1 = (\emptyset \diamond \cdots \diamond G_j \diamond \cdots \diamond F)$$

соответственно из $\Pi_{1,F}(\mathrm{E})$. Благодаря свойству достижимости ПЧ E, P_1 и Q_1 di-гомотопны. Нетрудно проверить, что под действием $\mathcal{F}$ di-гомотопные пути из $\Pi_1(\mathrm{E})$ переходят в di-гомотопные кубические пути из $\mathcal{CP}_1(\mathcal{F}(\mathrm{E}))$. Следовательно, P и Q также di-гомотопны, а значит, di-гомотопны $\widehat{P}$ и $\widehat{Q}$.

То, что отображение $\mathcal{F}(\mathrm{f}) = \langle \widehat{f}, \alpha \rangle$, определенное ранее, является морфизмом категории **oPS**, незамедлительно вытекает из того факта, что f — морфизм категории **SCS**. Таким образом, легко видеть, что $\mathcal{F}$ — функтор. $\square$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* M — di-*односвязное ПМ. Определим множество* $E = \{\ll x \gg \mid x \in \in M_1\}$ *и отображение* $\pi : M_0 \to \mathcal{P}_{fin}(E)$, *заданное следующим образом: для любой точки* $u \in M_0$ *положим* $\pi(u) = \{\ll x_0 \gg, \ldots, \ll x_k \gg\} \subseteq E$ *для некоторого кубического пути* $P = (p_0x_0p_1 \ldots p_kx_ku) \in \mathcal{CP}_1(\mathrm{M})$. *Тогда* π *является инъекцией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что, в силу di-односвязности полукубического множества M, π определено корректно, т. е. является отображением.

Далее, пусть $\pi(u) = \pi(v) = \{\ll x_0 \gg, \ldots, \ll x_k \gg\}$. Покажем индукцией по k, что $u = v$. Случай $k = -1$, а именно, $\pi(u) = \pi(v) = \emptyset$, очевиден. Случай $\pi(u) = \pi(v) = \ll x \gg$ вытекает из выполнения аксиомы A0 для M. Пусть для k доказано, что π — инъекция. Продемонстрируем справедливость этого факта для $k+1$. Рассмотрим кубические пути $P = (p_0x_0p_1 \ldots p_kx_ku)$, $Q = (q_0y_0q_1 \ldots q_ky_kv) \in \mathcal{CP}_1(\mathrm{M})$ и предположим, что

$\pi(u) = \pi(v)$. Ясно, что $\ll x_k \gg = \ll y_{\sigma(k)} \gg$, где $\sigma : \{0, \dots, k\} \to \{0, \dots, k\}$ — перестановка порядка $k+1$. Тогда, без ограничения общности, можем предположить, что существует цепочка 2-кубов $w_1, \dots, w_l$ такая, что $x_k = d_{i_1}^{1-\varepsilon}(w_1)$, $d_{i_1}^{\varepsilon}(w_1) = d_{i_2}^{1-\varepsilon}(w_2)$, $\dots$, $d_{i_{s_1-1}}^{\varepsilon}(w_{s_1-1}) = d_{i_{s_1}}^{\varepsilon}(w_{s_1})$, $\dots$, $d_{i_{l-1}}^{1-\varepsilon}(w_{l-1}) = d_{i_l}^{\varepsilon}(w_l), d_{i_l}^{1-\varepsilon}(w_l) = y_{\sigma(k)}$ при $\varepsilon = 0, 1$. Будем считать, например, что $\varepsilon = 0$, т.е. существует единственное $s_1 \in \{1, \dots, l\}$ такое, что $d_1^0(w_{s_1-1}) = d_1^0(w_{s_1})$. Так как M — di-односвязное полукубическое множество, найдется кубический путь $T = (t_0 z_0 t_1 \dots t_m z_m t_{m+1}) \in \mathcal{CP}_1(\mathrm{M})$ и верно, что $t_{m+1} = d_1^0(d_2^0(w_{s_1}))$. Поскольку $[T d_{3-i_{s_1-1}}^0(w_{s_1-1}) \dots d_{3-i_1}^0(w_1) p_k] = [p_0 x_0 p_1 \dots p_k]$, $[T d_{3-i_{s_1}}^0(w_{s_1}) \dots d_{3-i_l}^0(w_l) q_{\sigma(k)}] = [q_0 y_0 q_1 \dots q_{\sigma(k)}]$ и $\pi(u) = \pi(v)$, то для любого j $(\sigma(k)+1 \le j \le k)$ найдется число r_j $(1 \le r_j \le (s_1 - 1))$ такое, что $\ll y_j \gg = \ll d_{3-i_{r_j}}^0(w_{r_j}) \gg$. Учитывая это обстоятельство и справедливость аксиомы A1 для M, легко доказать индукцией по $n = k - \sigma(k)$, что найдется кубический путь $Q' = (q_0 y_0 q_1 \dots q_{\sigma(k)} y'_{\sigma(k)} q'_{\sigma(k)+1} \dots q'_k y'_k v)$ такой, что $Q \sim Q'$ и $y_{\sigma(k)} \sim_\Box y'_k$. Кубические пути $\bar{P} = (p_0 x_0 p_1 \dots p_k)$ и $\bar{Q} = (q_0 y_0 q_1 \dots q_{\sigma(k)} y'_{\sigma(k)} q'_{\sigma(k)+1} \dots q'_k)$ удовлетворяют индукционной гипотезе, таким образом, получаем, что $p_k = q'_k$. Кроме того, имеем, что $x_k \sim_\Box y_{\sigma(k)} \sim_\Box y'_k$, а значит, в силу справедливости аксиомы A0 для M получаем, что $x_k = y'_k$, т.е. $u = v$. Таким образом, π — инъекция.

$\Box$

Утверждение 2. *Отображение* $\mathcal{G} : \mathbf{oPS} \to \mathbf{SCS}$, *сопоставляющее объекту* $\mathrm{M} = (M, i_0^{\mathrm{M}}, l_L^{\mathrm{M}})$ *категории* $\mathbf{oPS}$ *объект* $\mathcal{G}(\mathrm{M}) = (E, \diamond, l_L)$ *категории* $\mathbf{SCS}$, *где*

- $E = \{\ll x \gg \mid\ x \in M_1\}$ — *множество событий;*
- $\diamond \subseteq \mathcal{P}_{fin}(E) \times \mathcal{P}_{fin}(E)$ *определяется следующим образом:* $F \diamond_\prec^n G \overset{def}{\Leftrightarrow}$ *найдется куб* $x_{(F,G,\prec)} \in M_n$ *такой, что* $F = \pi(D^0(x_{(F,G,\prec)}))$, $G = \pi(D^1(x_{(F,G,\prec)}))$ *и* $\prec = <_{x_{(F,G,<)}}$, *где* $(e, \epsilon) \in <_{x_{(F,G,<)}}$ *в* $G \setminus F \overset{def}{\Leftrightarrow} e = \ll d_1^0 \circ \dots \circ d_{i-1}^0 \circ d_{i+1}^0 \circ \dots \circ d_n^0(x_{(F,G,<)}) \gg$, $\epsilon = \ll d_1^0 \circ \dots \circ d_{j-1}^0 \circ d_{j+1}^0 \circ \dots \circ d_n^0(x_{(F,G,<)}) \gg$ *и* $i < j$;
- $l_L(\ll x \gg) = l_L^{\mathrm{M}}(x)$ *для всех* $x \in M_1$,

и сопоставляющее морфизму $\mathrm{g} = \langle g, \alpha \rangle : \mathrm{M}^1 \to \mathrm{M}^2$ *категории* $\mathbf{oPS}$ *морфизм* $\mathcal{G}(\mathrm{g}) = \langle \widehat{g}, \alpha \rangle : \mathcal{G}(\mathrm{M}^1) \to \mathcal{G}(\mathrm{M}^2)$ *категории* $\mathbf{SCS}$, *где* $\widehat{g}(\ll x \gg) = \ll g(x) \gg$ *для всех* $\ll x \gg \in E^1$, *является функтором.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — di-односвязное ПМ. Покажем, что $\mathcal{G}(\mathrm{M})$ — ПЧ. Проверим выполнение условий, налагаемых на произвольное отношение поступательности $F \diamond_<^n G$ в ПЧ. Тогда, по определению, существует $x_{(F,G,<)} \in M_n$ такой, что $F = \pi(D^0(x_{(F,G,<)}))$ и $G = \pi(D^1(x_{(F,G,<)}))$, т.е. $F \subseteq G$. Пусть $F \subseteq H \subseteq G$, причем $G \setminus F = (e_1 < \dots < e_n)$, где $e_i = \ll d_1^0 \circ \dots \circ d_{i-1}^0 \circ d_{i+1}^0 \circ \dots \circ d_n^0(x_{(F,G,<)}) \gg$ для всех $1 \le i \le n$, и $H \setminus F = (e_{i_1} < \dots < e_{i_m})$. Тогда m-куб $d_{j_1}^0 \circ \dots \circ d_{j_{n-m}}^0(x_{(F,G,<)})$ соответствует $F \diamond_{<|_{H \setminus F}}^m H$ и $(n-m)$-куб $d_{i_1}^1 \circ \dots \circ d_{i_m}^1(x_{(F,G,<)})$ — $H \diamond_{<|_{G \setminus H}}^{(n-m)} G$, где упорядоченные последовательности $(i_1, \dots, i_m)$ и $(j_1, \dots, j_{n-m})$ составляют упорядоченную последовательность $(1, \dots, n)$. Заметим, что $x_{(F,G,<)}$ — единственный куб, соответствующий отношению поступательности $F \diamond_<^n G$ в силу справедливости аксиом A0 и A1 для ПМ M.

Теперь необходимо доказать справедливость аксиомы B0 для $\mathcal{G}(\mathrm{M})$. Пусть $F \diamond F \sqcup \{e\}$ и $G \diamond G \sqcup \{e\}$. Без потери общности предположим, что существуют различные $z_1^1, \dots z_{k^1}^1, z_1^2, \dots z_{k^2}^2 \in M_2$ такие, что $x_{(F, F \sqcup e)} = d_{i_{k^1}}^{1-m}(z_{k^1}^1)$, $d_{i_{k^1}}^m(z_{k^1}^1) = d_{i_{k^1-1}}^{1-m}(z_{k^1-1}^1)$, $\dots$,

$d^m_{i_1}(z^1_1) = d^m_{j_1}(z^2_1), \ldots, d^{1-m}_{j_{k^2-1}}(z^2_{k^2-1}) = d^m_{j_{k^2}}(z^2_{k^2}), d^{1-m}_{j_{k^2}}(z^2_{k^2}) = x_{(G,G\sqcup e)}$ для некоторого $m = 0, 1$. Рассуждая аналогичным образом, как в доказательстве леммы 2, выполнение B0 проверяется индукцией по количеству элементов в множестве $(F \cap G) \setminus S$, если $m = 0$, или в множестве $S \setminus (F \cap G)$, если $m = 1$, где $S = \pi(d^0_1(d^m_{i_1}(z^1_1)))$.

Справедливость аксиомы B1 для $\mathcal{G}(\mathrm{M})$ незамедлительно следует из леммы 2 и справедливости аксиомы A1 для M.

Доказательство выполнения условия достижимости ПЧ $\mathcal{G}(\mathrm{M})$ сводится к проверке di-гомотопности двух путей, заканчивающихся в одном и том же подмножестве событий. Рассмотрим произвольные пути $P_1 = (\emptyset \diamond^{k_1}_{<_1} F_1 \diamond^{k_2}_{<_2} \cdots \diamond^{k_n}_{<_n} (F_n = F))$ и $Q_1 = (\emptyset \diamond^{m_1}_{\prec_1} G_1 \diamond^{m_2}_{\prec_2} \cdots \diamond^{m_l}_{\prec_l} (G_m = F))$ из $\Pi_F(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$, где $F \in \mathcal{P}_{fin}(E)$. Без ограничения общности можем считать, что эти пути одноэлементные. По определению $\mathcal{G}$, для P_1 и Q_1 найдутся их прообразы $P = x_{(\emptyset,\emptyset)}\ x_{(\emptyset,F_1)} x_{(F_1,F_1)} \ldots x_{(F,F)}$ и $Q = x_{(\emptyset,\emptyset)}\ x_{(\emptyset,G_1)} x_{(G_1,G_1)} \ldots x_{(F,F)}$ соответственно из $\mathcal{CP}_{1,x_{(F,F)}}(\mathrm{M})$. Поскольку M — di-односвязное ПМ, то P и Q di-гомотопны. Нетрудно проверить, что под действием $\mathcal{G}$ di-гомотопные кубические пути из $\mathcal{CP}_1(\mathrm{M})$ переходят в di-гомотопные пути из $\Pi_1(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$. Отсюда следует, что пути P_1 и Q_1 в $\mathcal{G}(\mathrm{M})$ также будут di-гомотопны.

Пусть $\mathrm{g} = \langle g, \alpha\rangle : \mathrm{M}^1 \to \mathrm{M}^2$ — морфизм **oPS**. Покажем, что отображение $\mathcal{G}(\mathrm{g}) = \langle \widehat{g}, \alpha\rangle$, определенное в утверждении, — морфизм **SCS**. Поскольку M^1, M^2 — di-односвязные ПМ, и g — морфизм **oPS**, легко показать, что если n-куб $x_{(F,G,<)}$ соответствует отношению поступательности $F \diamond^n_< G$ в $\mathcal{G}(\mathrm{M}^1)$, то n-куб $g(x_{(F,G,<)})$ соответствует отношению поступательности $\widehat{g}(F) \diamond^n_\prec \widehat{g}(G)$ в $\mathcal{G}(\mathrm{M}^2)$. Теперь проверка факта, что $\mathcal{G}(\mathrm{g})$ — морфизм **SCS**, становится очевидной. Таким образом, очевидно, что $\mathcal{G}$ — функтор.

□

Основываясь на вышеприведенных определениях и утверждениях, установим следующий факт.

Теорема 3. *Категории* **SCS** *и* **oPS** *эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продемонстрируем эквивалентность категорий **SCS** и **oPS**, установив, что $\mathcal{F}$ — строгий, полный и плотный функтор.

Лемма 3.1. *$\mathcal{F}$ — строгий функтор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E^1, E^2 — объекты **SCS**, и $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2$ — морфизмы **SCS**. Нужно показать, что из $\mathcal{F}(\mathrm{f}_1) = \mathcal{F}(\mathrm{f}_2)$ следует, что $\mathrm{f}_1 = \mathrm{f}_2$. По определению функтора $\mathcal{F}$, условие $\mathcal{F}(\mathrm{f}_1) = \mathcal{F}(\mathrm{f}_2)$ влечет равенство вторых компонент морфизмов f_1 и f_2. Пусть f_i и $\widehat{f_i}$ — первые компоненты $\mathrm{f_i}$ и $\mathcal{F}(\mathrm{f_i})$ соответственно ($i = 1, 2$). Тогда $(f_1(F), f_1(G))_{\prec_1} = \hat{f}_1(F,G)_< = \hat{f}_2(F,G)_< = (f_2(F), f_2(G))_{\prec_2}$ для всех кубов $(F,G)_<$ из $\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$. Это означает, что $f_1(e) = f_2(e)$ для всех $e \in E$ таких, что найдется множество F такое, что $F \diamond (F \sqcup e)$. Благодаря свойству достижимости ПЧ E^1 имеем $f_1 = f_2$.

□

Лемма 3.2. *$\mathcal{F}$ — полный функтор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathrm{g} = \langle g, \alpha\rangle : \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ — морфизм категории **oPS**. Нужно показать, что существует морфизм $\mathrm{f} = \langle f, \alpha\rangle : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2$ категории **SCS** такой, что $\mathcal{F}(\mathrm{f}) = \mathrm{g}$.

Для всех $e \in E^1$ положим $f(e) = p_2(g(F, F \sqcup e)) \setminus p_1(g(F, F \sqcup e))$, где p_i — проекция на i-й элемент пары $g(F, F \sqcup e)$ $(i = 1, 2)$. Для начала покажем, что f — отображение. Пусть $f(e) = p_2(g(F, F \sqcup e)) \setminus p_1(g(F, F \sqcup e)) = \epsilon$ и $f(e) = p_2(g(G, G \sqcup e)) \setminus p_1(g(G, G \sqcup e)) = \varepsilon$. Необходимо показать, что $\epsilon = \varepsilon$. Поскольку E^1 — ПЧ, найдутся пути

$$P = (\{\emptyset\} \diamond^{k_1}_{<_1} F_1 \diamond^{k_2}_{<_2} \cdots \diamond^{k_n}_{<_n} (F_n = F) \diamond F \sqcup \{e\})$$

и

$$Q = (\{\emptyset\} \diamond^{m_1}_{\prec_1} \cdots \diamond^{m_l}_{\prec_l} (F \cap G) \diamond ((F \cap G) \sqcup \{e\}) \diamond^{m_{l+1}}_{\prec_{l+1}} \cdots \diamond^{m_r}_{\prec_r} (F \sqcup \{e\})).$$

Без ограничения общности можем считать, что $G \subseteq F$. Тогда имеем, что

$$Q = (\emptyset \diamond^{m_1}_{\prec_1} \cdots \diamond^{m_l}_{\prec_l} G \diamond (G \sqcup \{e\}) \diamond^{m_{l+1}}_{\prec_{l+1}} \cdots \diamond^{m_r}_{\prec_r} (F \sqcup \{e\})).$$

Поскольку пути P и Q содержат $\{e\}$ и эти пути di-гомотопны, т. к. E^1 — ПЧ, то найдутся 2-кубы $z_1, \ldots, z_n$ в $\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$ такие, что

$$(F, F \sqcup e) = d^{k_1}_{i_1}(z_1), d^{3-k_1}_{i_1}(z_1) = d^{k_2}_{i_2}(z_2), \ldots, d^{1-k_n}_{i_n}(z_n) = (G, G \sqcup e).$$

Индукцией по n с помощью очевидных равенств

$$p_2(g(d^0_s(z_i))) \setminus p_1(g(d^0_s(z_i))) = p_2(g(d^1_s(z_i))) \setminus p_1(g(d^1_s(z_i)))$$

для $(1 \leq i \leq n)$, получаем

$$\epsilon = p_2(g(F, F \sqcup e)) \setminus p_1(g(F, F \sqcup e)) = \cdots = p_2(g(G, G \sqcup e)) \setminus p_1(g(G, G \sqcup e)) = \varepsilon.$$

Докажем, что $\mathrm{f} = \langle f, \alpha \rangle$ — действительно морфизм категории **SCS**. Покажем справедливость условия 2. Пусть $F(\diamond^1)^n_{<} G$ в E^1. Тогда, поскольку E^1 — ПЧ, существует путь $\{\emptyset = \epsilon_0\} \diamond^1 \{\epsilon_1\} \diamond^1 \cdots \diamond^1 (\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\} = F)(\diamond^1)^n_{<} G$. Имеем

$$f(F) = \bigcup_{e \in F} f(e) =$$
$$= \bigcup_{j=1}^{k} p_2(g(\epsilon_1 \sqcup \ldots \sqcup \epsilon_{j-1}, \epsilon_1 \sqcup \ldots \sqcup \epsilon_j)) \setminus p_1(g(\epsilon_1 \sqcup \ldots \sqcup \epsilon_{j-1}, \epsilon_1 \sqcup \ldots \sqcup \epsilon_j)) =$$
$$= p_2(g(\epsilon_1 \sqcup \ldots \sqcup \epsilon_{k-1}, F)) = p_1(g(F, G)_<).$$

Аналогично получаем, что $f(G) = p_2(g(F, G)_<)$. Так как g — морфизм категории **PS**, то размерность куба $g(F, G)_<$ в $\mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ равна n, таким образом, $g(F, G)_< \in (\diamond^2)^n_{\prec}$. Следовательно, верно, что $f(F)(\diamond^2)^n_{\prec} f(G)$ в E^2. Теперь доказательство справедливости условий 1 и 3 очевидно.

И наконец, продемонстрируем, что $\mathcal{F}(\mathrm{f}) = \mathrm{g}$. По определению $\mathcal{F}$ и f, вторые компоненты морфизмов $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ и g совпадают. Докажем равенство их первых компонент $\hat{f}$ и g. Возьмем произвольный куб $(F, G)_<$ в $\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$. Тогда $\hat{f}(F, G)_< = (f(F), f(G))_{\prec} = (p_1(g(F, G)), p_2(g(F, G)))_{\prec} = g(F, G)_<$. $\square$

Лемма 3.3. *$\mathcal{F}$ — плотный функтор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — объект категории **oPS**. Построим объект E категории **SCS** такой, что M изоморфно $\mathcal{F}$(E).

Положим $\mathrm{E} = \mathcal{G}(\mathrm{M})$ и рассмотрим *di*-односвязное ПМ $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$. В силу конструирования $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, верно, что куб $(F,G)_<$ из $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$, если и только если существует единственный куб $x_{(F,G,<)}$ из M такой, что $F = \pi(D^0(x_{(F,G,<)}))$, $G = \pi(D^1(x_{(F,G,<)}))$ и $<=<_{x_{(F,G,<)}}$. Положим $\xi_M(x) = (\pi(D^0(x)), \pi(D^1(x)))_{<_x}$ для всех кубов x в M и $\eta_M((F,G)_<) = x_{(F,G,<)}$ для всех кубов $(F,G)_<$ в $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$. Ясно, что $\xi_\mathrm{M} = \langle \xi_M, id\rangle : \mathrm{M} \to \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$ и $\eta_\mathrm{M} = \langle \eta_M, id\rangle : \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{M})) \to \mathrm{M}$ являются морфизмами в **PS**. Докажем, что эти морфизмы взаимно обратны друг другу. Имеем, что

$$\xi_M(\eta_M((F,G)_<)) = \xi_M(x_{(F,G,<)}) = \\ = (\pi(D^0(x_{(F,G,<)})), \pi(D^1(x_{(F,G,<)})))_{<_{x_{(F,G,<)}}} = (F,G)_<$$

и

$$\eta_M(\xi_M(x)) = \eta_M((\pi(D^0(x)), \pi(D^1(x)))_{<_x}) = x_{(\pi(D^0(x)), \pi(D^1(x)), <_x)} = x.$$

□

Таким образом, эквивалентность категорий **SCS** и **oPS** доказана. □

Далее показывается, что $\mathbf{P}_L$-открытые морфизмы отображаются функтором $\mathcal{F} : \mathbf{SCS} \to \mathbf{oPS}$ в $\mathbf{cP}_L$-открытые морфизмы, и наоборот, что позволяет установить совпадение $\mathbf{cP}_L$-бисимуляции ПМ с $\mathbf{P}_L$-бисимуляцией ЧМ, полученных из универсальных *di*-накрывающих данных ПМ.

В дальнейшем нам понадобятся следующие факты. Изоморфизмы $\xi_\mathrm{M} = \langle \xi_M, id\rangle : \mathrm{M} \to \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$, где M — объект категории **oPS**, заданные в доказательстве леммы 3.3 теоремы 3, и изоморфизмы $\varsigma_\mathrm{E} = \langle \varsigma_E, id\rangle : \mathrm{E} \to \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{E}))$, заданные следующим образом: $\varsigma_E(e) =\ll (F, F \sqcup e) \gg$ для всех $e \in E$, могут быть с легкостью расширены до натуральных изоморфизмов $\xi : \mathbf{1_{oPS}} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ и $\varsigma : \mathbf{1_{SCS}} \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$. Действительно, для произвольного морфизма $\mathrm{f} : \mathrm{M}^1 \to \mathrm{M}^2$ категории **oPS** имеем, что

$$\xi_{\mathrm{M}^2} \circ f = \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{f})) \circ \xi_{\mathrm{M}^1}, \tag{1}$$

и для произвольного морфизма $\mathrm{g} : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2$ категории **SCS** имеем, что

$$\varsigma_{\mathrm{E}^2} \circ g = \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{g})) \circ \varsigma_{\mathrm{E}^1}. \tag{2}$$

Рассмотрим вспомогательное утверждение и следствие из него.

Утверждение 3. *Пусть* E^1 *— объект* $\mathbf{P}_L$, E^2 *— объект категории* $\mathbf{SCS}_L$, $\mathrm{f} = \langle f, id\rangle : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2$ *— морфизм категории* $\mathbf{SCS}_L$ *и* $\mathrm{g} = \langle g, id\rangle : \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ *— морфизм категории* $\mathbf{oPS}_L$. *Тогда* f *и* g *— инъективные отображения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что f — инъективное отображение, доказывается от противного с помощью противопоставления любого пути, заканчивающегося в множестве событий E^1, его образу при действии f. Следовательно, g — инъективные отображение, учитывая полноту функтора $\mathcal{F}$. □

Кубическое вычисление в *di*-односвязном ПМ M — это *di*-односвязное ПМ V такое, что $\mathcal{G}$(V) — вычисление в ПЧ $\mathcal{G}$(M).

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{P} \arrow[r, "\mathrm{p}"] \arrow[d, "\mathrm{m}"'] & \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{f})"] \\
\mathrm{Q} \arrow[r, "\mathrm{q}"'] & \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(\mathrm{P}) \arrow[r, "\mathcal{G}(\mathrm{p})"] \arrow[d, "\mathcal{G}(\mathrm{m})"'] & \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)) \arrow[r, "\upsilon_{\mathrm{E}^1}"] \arrow[d, "\mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{f}))"'] & \mathrm{E}^1 \arrow[d, "\mathrm{f}"] \\
\mathcal{G}(\mathrm{Q}) \arrow[r, "\mathcal{G}(\mathrm{q})"'] & \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{E}^2)) \arrow[r, "\upsilon_{\mathrm{E}^2}"'] & \mathrm{E}^2
\end{tikzcd}
$$

Рис. 5. Диаграммы для морфизма $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ категории $\mathbf{oPS}_L$ и для морфизма f категории $\mathbf{SCS}_L$.

Следствие 1. *Пусть* E^1, E^2 *— объекты* $\mathbf{SCS}_L$, $\mathcal{F}(\mathrm{f}) = \langle \widehat{f}, id \rangle : \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ *— морфизм* $\mathbf{oPS}_L$ *и* V *— кубическое вычисление в* $\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$. *Тогда ограничение морфизма* $\mathcal{F}(\mathrm{f}) \mid_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ *имеет инъективную первую компоненту.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{G}(\mathrm{V})$ — объект категории $\mathbf{P}_L$, и $\mathcal{F}$ — полный функтор, то, по утверждению 3, морфизм $\mathcal{F}(\mathrm{f})_{\mathrm{V}} \circ \eta_{\mathrm{V}} : \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{V})) \to \mathrm{V} \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ имеет инъективную первую компоненту. Поскольку η_{V} — изоморфизм, обратный ξ_{V}, то первая компонента $\mathcal{F}(\mathrm{f})_{\mathrm{V}}$ также инъективна. □

Сформулируем результат о сохранении и отражении свойства морфизмов быть открытыми при действии функтора $\mathcal{F}$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathrm{f} = \langle f, id \rangle : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2$ *— морфизм* $\mathbf{SCS}_L$. *Тогда* f $\mathbf{P}_L$*-открыт тогда и только тогда, когда* $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ $\mathbf{cP}_L$*-открыт.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Пусть $\mathrm{m} : \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ — морфизм категории $\mathbf{cP}_L$, $\mathrm{p} : \mathrm{P} \to \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$, и $\mathrm{q} : \mathrm{Q} \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ — морфизмы категории $\mathbf{oPS}_L$ такие, что диаграмма, показанная слева на рис. 5, коммутативна. Значит, применяя функтор $\mathcal{G}$ и используя формулу (2), коммутативна и диаграмма, изображенная справа на рис. 5, где $\upsilon_{\mathrm{E}^i} : \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{E}^i)) \to \mathrm{E}^i$ – изоморфизм, обратный ς_{E^i} и заданный следующим образом: $\upsilon_{\mathrm{E}^i}(\ll (F, F \sqcup e) \gg) = e$ для всех событий $\ll (F, F \sqcup e) \gg$ из $\mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{E}^i))$ $(i = 1, 2)$.

Поскольку $\mathcal{G}(\mathrm{P})$ и $\mathcal{G}(\mathrm{Q})$ — объекты категории $\mathbf{P}_L$, и f — $\mathbf{P}_L$-открыт, найдется морфизм $\mathrm{r} : \mathcal{G}(\mathrm{Q}) \to \mathrm{E}^1$ категории $\mathbf{SCS}_L$ такой, что $\upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathrm{p}) = \mathrm{r} \circ \mathcal{G}(\mathrm{m})$ и $\upsilon_{\mathrm{E}^2} \circ \mathcal{G}(\mathrm{q}) = \mathrm{f} \circ \mathrm{r}$. Тогда, применяя функтор $\mathcal{F}$ к диаграмме справа на рис. 5 и достраивая ее с помощью формулы (1), получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{P} \arrow[r, "\xi_{\mathrm{P}}"] \arrow[d, "\mathrm{m}"'] & \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{P})) \arrow[r, "\mathcal{F}(\upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathrm{p}))"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{m}))"'] & \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{f})"] \\
\mathrm{Q} \arrow[r, "\xi_{\mathrm{Q}}"'] & \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{Q})) \arrow[r, "\mathcal{F}(\upsilon_{\mathrm{E}^2} \circ \mathcal{G}(\mathrm{q}))"'] \arrow[ur, "\mathcal{F}(\mathrm{r})"'] & \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)
\end{tikzcd}
$$

Рассмотрим равенство $\mathcal{F}(\upsilon_{\mathrm{E}^1}) \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{p})) = \mathcal{F}(\mathrm{r}) \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{m}))$. Используя формулу (1), имеем, что

$$
\mathcal{F}(\upsilon_{\mathrm{E}^1}) \circ \xi_{\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)} \circ \mathrm{p} \circ \eta_{\mathrm{P}} = \mathcal{F}(\mathrm{r}) \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{m})), \tag{3}
$$

где $\eta_{\mathrm{P}} : \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{P})) \to \mathrm{P}$ — изоморфизм, обратный к ξ_{P}. Поскольку $\mathcal{F}$ — полный и строгий функтор, верно, что $\xi_{\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)} = \mathcal{F}(\varsigma_{\mathrm{E}^1})$. Таким образом, умножая равенство (3) на изоморфизм ξ_{P} слева и используя коммутативность левого квадрата предыдущей диаграмы,

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{P}} \arrow[r, "\mathrm{p}"] \arrow[d, "\mathrm{m}"'] & \mathrm{E}^1 \arrow[d, "\mathrm{f}"] \\
\widehat{\mathrm{Q}} \arrow[r, "\mathrm{q}"'] & \mathrm{E}^2
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\widehat{\mathrm{P}}) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{p})"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{m})"'] & \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{f})"] \\
\mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}}) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{q})"'] & \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)
\end{tikzcd}
$$

Рис. 6. Диаграммы для морфизма f категории $\mathbf{SCS}_L$ и для морфизма $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ категории $\mathbf{oPS}_L$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\widehat{\mathrm{P}}) \arrow[rr, "\mathcal{F}(\mathrm{p})"] \arrow[ddd, "\mathcal{F}(\mathrm{m})"'] & & \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \arrow[ddd, "\mathcal{F}(\mathrm{f})"] \\
& \mathrm{P_k} \arrow[ul, "\iota_{\mathrm{k}}"'] \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l}"'] & \\
& \mathrm{Q_l} \arrow[dl, "\iota'_{\mathrm{l}}"] \arrow[uur, dashed, "\mathrm{r_{k,l}}"'] & \\
\mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}}) \arrow[rr, "\mathcal{F}(\mathrm{q})"'] & & \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)
\end{tikzcd}
$$

Рис. 7. Расширенная диаграмма для морфизма $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ категории $\mathbf{oPS}_L$

имеем, что $\mathrm{p} = \mathcal{F}(\mathrm{r}) \circ \xi_{\mathrm{Q}} \circ \mathrm{m}$. Аналогично получаем, что $\mathrm{q} = \mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathcal{F}(\mathrm{r}) \circ \xi_{\mathrm{Q}}$. Следовательно, искомый морфизм $\mathcal{F}(\mathrm{r}) \circ \xi_{\mathrm{Q}} : \mathrm{Q} \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$ удовлетворяет требуемым равенствам, т. е. $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ $\mathbf{cP}_L$-открыт.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathrm{m} = \langle m, id \rangle : \widehat{\mathrm{P}} \to \widehat{\mathrm{Q}}$ — морфизм категории $\mathbf{P}_L$, $\mathrm{p} = \langle p, id \rangle : \widehat{\mathrm{P}} \to \mathrm{E}^1$ и $\mathrm{q} = \langle q, id \rangle : \widehat{\mathrm{Q}} \to \mathrm{E}^2$ — морфизмы категории $\mathbf{SCS}_L$ такие, что диаграмма слева на рис. 6 коммутативна, а значит, коммутативна и диаграмма справа на рис. 6.

Пусть $\{\mathrm{P_k}\}_{k \le n^P}$, $\{\mathrm{Q_l}\}_{l \le n^Q}$ — совокупности всех объектов категории $\mathbf{cP}_L$ таких, что $\iota_{\mathrm{k}} : \mathrm{P_k} \to \mathcal{F}(\widehat{\mathrm{P}})$ и $\iota'_{\mathrm{l}} : \mathrm{Q_l} \to \mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}})$ — естественные морфизмы вложения и $(\widehat{Q}, \widehat{Q}) = \iota'_l(t_l)$, где t_l — конечная точка[6] в $\mathrm{Q_l}$. Для всех $k \le n^P$ и $l \le n^Q$ выберем некоторые максимальные кубические пути P_k и Q_1 для $\mathrm{P_k}$ и $\mathrm{Q_l}$ соответственно. Пусть $S = \{(k,l) \mid \exists \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l} : \mathrm{P_k} \to \mathrm{Q_l},\ k \le n^P,\ l \le n^Q\}$, где $\mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l} : \mathrm{P_k} \to \mathrm{Q_l}$ — сужение морфизма $\mathcal{F}(\mathrm{m})$ на $\mathrm{P_k}$ с областью значений $\mathrm{Q_l}$. Рассмотрим произвольные $(k,l) \in S$. Ясно, что в этом случае левый внутренний квадрат в диаграмме на рис. 7 коммутативен. Следовательно, из коммутативности внешнего квадрата той же диаграммы получаем, что $\mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ (\mathcal{F}(\mathrm{p}) \circ \iota_{\mathrm{k}}) = (\mathcal{F}(\mathrm{q}) \circ \iota'_{\mathrm{l}}) \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l}$. Значит, поскольку $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ — $\mathbf{cP}_L$-открытый морфизм, найдется морфизм $\mathrm{r_{k,l}} : \mathrm{Q_l} \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$ такой, что $\mathcal{F}(\mathrm{p}) \circ \iota_{\mathrm{k}} = \mathrm{r_{k,l}} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l}$ и $\mathcal{F}(\mathrm{q}) \circ \iota'_{\mathrm{l}} = \mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r_{k,l}}$. Более того, как правило, такой морфизм не единственен, о чем говорится в следующей лемме.

Лемма 4.1. *При фиксированных* $(k,l) \in S$ *существует совокупность морфизмов* $\{\mathrm{r^V_{k,l}} : \mathrm{Q_l} \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^1)\}_{\mathrm{V} \in A_k}$ *таких, что* $\mathrm{r^V_{k,l}}(\mathrm{Q_l}) \subseteq \mathrm{V}$, *где* $A_k = \{\mathrm{V} \in A \mid \mathcal{F}(\mathrm{p})(\iota_{\mathrm{k}}(\mathrm{P_k})) \subseteq \mathrm{V}\}$, $A = \{\mathrm{V}$ *— кубическое вычисление в* $\mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \mid \widehat{f}(t_V) = \widehat{q}(\widehat{Q}, \widehat{Q})$, t_V *— конечная точка в* $\mathrm{V}\}$. *Кроме того, выполнены равенства:* $\mathcal{F}(\mathrm{p}) \circ \iota_{\mathrm{k}} = \mathrm{r^V_{k,l}} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l}$ *и* $\mathcal{F}(\mathrm{q}) \circ \iota'_{\mathrm{l}} = \mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r^V_{k,l}}$.

[6] Точка u в ПМ M называется конечной, если не существует $v \in M_1$ такого, что $u = d^0_1(v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при фиксированных $(k,l) \in S$ существование по крайней мере одного $\mathrm{r}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{k,l}} \in \{\mathrm{r}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{k,l}}\}_{\mathrm{V}\in A_k}$ следует из $\mathbf{cP}_L$-открытости морфизма $\mathcal{F}(\mathrm{f})$. Если $|A_k| > 1$, то рассмотрим элемент $\mathrm{U} \in A_k$ такой, что $\mathrm{U} \neq \mathrm{W}$. Ясно, что найдется кубический путь P_{t_U} в U, заканчивающийся в конечной точке t_U кубического вычисления U. Тогда, поскольку $\widehat{f}(t_U) = \widehat{q}(\widehat{Q},\widehat{Q}) = \widehat{f}(r^W_{k,l}(t_l))$ и $\mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ — di-односвязное ПМ, то $\widehat{f}(P_{t_U}) \overset{(\bar{s}_1,\bar{u}_1,\bar{v}_1)}{\longleftrightarrow} \dots \overset{(\bar{s}_b,\bar{u}_b,\bar{v}_b)}{\longleftrightarrow} \widehat{f}(r^W_{k,l}(Q_l))$. А значит, так как $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ — $\mathbf{cP}_L$-открытый морфизм, то, применяя теорему 1 b раз, получаем, что существует кубический путь P'_U такой, что $P_{t_U} \overset{(\bar{s}_1,\bar{u}_1,\bar{v}_1)}{\longleftrightarrow} \dots \overset{(\bar{s}_b,\bar{u}_b,\bar{v}_b)}{\longleftrightarrow} P'_U$, т.е. P'_U лежит в U, и $\widehat{f}(P'_U) = \widehat{f}(r^W_{k,l}(Q_l))$.

Ясно, что отображение $\mathrm{r}^{\mathrm{U}}_{\mathrm{k,l}}$, определяемое как $r^U_{k,l}(Q_l) = P'_U$, достраивается до морфизма категории $\mathbf{oPS}_L$, используя равенство $\widehat{f}(r^U_{k,l}(Q_l)) = \widehat{f}(r^W_{k,l}(Q_l)) = \widehat{q}(\iota'_l(Q_l))$. Из этого же равенства следует коммутативность нижнего внутреннего квадрата в диаграмме на рис. 7 для $\mathrm{r}^{\mathrm{U}}_{\mathrm{k,l}}$. Отсюда получаем, что верно и равенство $\mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r}^{\mathrm{U}}_{\mathrm{k,l}} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l} = \mathcal{F}(\mathrm{q}) \circ \iota'_{\mathrm{l}} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l}$. Следовательно, используя коммутативность левого внутреннего и внешнего квадратов, получаем, что $\mathcal{F}(\mathrm{f})|_{\mathrm{U}} \circ \mathrm{r}^{\mathrm{U}}_{\mathrm{k,l}} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l} = \mathcal{F}(\mathrm{f})|_{\mathrm{U}} \circ \mathcal{F}(\mathrm{p}) \circ \iota_{\mathrm{k}}$, поскольку $\mathrm{r}^{\mathrm{U}}_{\mathrm{k,l}}(\mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l}(\mathrm{P_k})), \mathcal{F}(\mathrm{p})(\iota_{\mathrm{k}}(\mathrm{P_k})) \subseteq \mathrm{U}$. В силу следствия 1 коммутативен и верхний внутренний квадрат в диаграмме на рис. 7 для $\mathrm{r}^{\mathrm{U}}_{\mathrm{k,l}}$. □

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\widehat{\mathrm{P}}) \arrow[rrrr, "\mathcal{F}(\mathrm{p})"] \arrow[ddd, "\mathcal{F}(\mathrm{m})"'] & & & & \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \arrow[ddd, "\mathcal{F}(\mathrm{f})"] \\
& \mathrm{P_k} \arrow[ul, "\iota_{\mathrm{k}}"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l}"'] & I \arrow[l] \arrow[r] \arrow[ull, "\iota_{\mathrm{I}}"'] \arrow[dl] \arrow[dr] & \mathrm{P_i} \arrow[ulll, "\iota_{\mathrm{i}}"'] \arrow[ur, "\mathcal{F}(\mathrm{p})\circ\iota_{\mathrm{i}}"] \arrow[d] & \\
& \mathrm{Q_l} \arrow[dl, "\iota'_{\mathrm{l}}"'] & \leftrightarrow \ \cdots \ \leftrightarrow & \mathrm{Q_j} \arrow[dlll, "\iota'_{\mathrm{j}}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}(\mathrm{q})\circ\iota'_{\mathrm{j}}"'] \arrow[uur, dashed, bend left=10, "\mathrm{r_{i,j}}"] \arrow[uur, dashed, bend right=10, "\mathrm{r_j}"'] & \\
\mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}}) \arrow[rrrr, "\mathcal{F}(\mathrm{q})"'] & & & & \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)
\end{tikzcd}$$

где I — объект категории $\mathbf{oPS}$, состоящий из единственного куба нулевой размерности. Понятно, что существуют морфизмы вложения $\iota_{\mathrm{I,k}} : \mathrm{I} \hookrightarrow \mathrm{P_k}$ и $\iota_{\mathrm{I,i}} : \mathrm{I} \hookrightarrow \mathrm{P_i}$. Поскольку $I \in \{\mathrm{P_k}\}_{k \leq n^P}$, то существуют морфизмы $\{\mathrm{r}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{I,l}}\}_{\mathrm{V}\in A_I}$ для всех $l \leq n^Q$. Будем обозначать такие морфизмы как $\mathrm{r}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{l}} = \mathrm{r}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{I,l}}$. Заметим, что $A_I = A$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.2. *Пусть* $\mathrm{V} \in A$. *Если* $y^l \in M_{\mathrm{Q_l}}$ *и* $y^j \in M_{\mathrm{Q_j}}$ *такие, что* $\iota'_l(y^l) = \iota'_j(y^j) = y \in M_{\mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}})}$, *то* $r^V_l(y^l) = r^V_j(y^j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}})$ — di-односвязное ПМ, то, по определению Q_l и Q_j, $\iota'_l(Q_l)$ и $\iota'_j(Q_j)$ di-гомотопны. Значит, достаточно доказать лемму в случае $\iota'_l(Q_l) \overset{(s,u,v)}{\longleftrightarrow} \iota'_j(Q_j)$. Пусть, например, $\iota'_{\mathrm{l}}(\mathrm{Q_l}) \subseteq \iota'_{\mathrm{j}}(\mathrm{Q_j})$. Тогда существует морфизм вложения $\iota'_{\mathrm{l,j}} : \mathrm{Q_l} \to \mathrm{Q_j}$. Ясно, что $\iota'_{\mathrm{l}} = \iota'_{\mathrm{j}} \circ \iota'_{\mathrm{l,j}}$. Тогда из коммутативности нижних внутренних квадратов диаграммы на рис. 7 для $\mathrm{r}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{l}}$ и $\mathrm{r}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{j}}$, получаем, что $\mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{j}} \circ \iota'_{\mathrm{l,j}} = \mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{l}}$. Так как $\mathrm{r}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{l}}(\mathrm{Q_l})$, $\mathrm{r}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{j}}(\iota'_{\mathrm{l,j}}(\mathrm{Q_l})) \subseteq \mathrm{V}$, то требуемый результат очевиден, в силу следствия 1. □

Так как для каждого $y \in M_{\mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}})}$ существует число $l \leq n^Q$ такое, что $y = \iota'_l(y^l)$, где $y^l \in M_{\mathrm{Q_l}}$, то, по лемме 4.2, равенство $r^V \circ \iota'_l = r^V_l$ для всех $l \leq n^Q$ дает отображение $\mathrm{r^V} = \langle r^V, id_L\rangle : \mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}}) \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$, являющееся морфизмом категории $\mathbf{oPS}$.

Рассмотрим произвольный $\mathrm{P_k}$ такой, что $\iota_k(\tau_k) = (\hat{P}, \hat{P})$, где τ_k — конечная точка $\mathrm{P_k}$. Выберем для k номер l такой, что $(k,l) \in S$. Так как $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ — $\mathbf{cP}_L$-открытый морфизм, найдется морфизм $\mathrm{r^{V_0}_{k,l}}$ (с некоторым $\mathrm{V_0} \in A_k$) такой, что $\mathrm{r^{V_0}_{k,l}} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l} = \mathcal{F}(\mathrm{p}) \circ \iota_\mathrm{k}$ и $\mathcal{F}(\mathrm{q}) \circ \iota'_\mathrm{l} = \mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r^{V_0}_{k,l}}$. Заметим, что тогда $\mathrm{V_0} \in A_i$ для всех $i \leq n^P$. Действительно, продлим кубический путь $\iota_i(P_i)$ до некоторого кубического пути $\bar{P}$, содержащегося в $\mathcal{F}(\widehat{\mathrm{P}})$ и заканчивающегося в точке $(\hat{P}, \hat{P})$. Поскольку $\bar{P} \sim \iota_k(P_k)$, а значит, $\widehat{p}(\bar{P}) \sim \widehat{p}(\iota_k(P_k))$, и кубический путь $\widehat{p}(\iota_k(P_k)) = r^{V_0}_{k,l}(\widehat{m}|_{k,l}(P_k))$ лежит в кубическом вычислении $\mathrm{V_0}$, то кубический путь $\widehat{p}(\bar{P})$, а с ним и $\widehat{p}(\iota_i(P_i))$ также лежат в кубическом вычислении $\mathrm{V_0}$. Следовательно, $\mathcal{F}(\mathrm{p})(\iota_\mathrm{i}(\mathrm{P_i})) \subseteq \mathrm{V_0}$. Таким образом, существует морфизм $\mathrm{r^{V_0}_{i,j}}$ для всех i, j таких, что $(i,j) \in S$.

Ясно, что $\mathrm{r^{V_0}_{k,l}} = \mathrm{r^{V_0}_l}$. Действительно, в силу коммутативности нижних внутренних квадратов в диаграмме на рис. 7 для $\mathrm{r^{V_0}_{k,l}}$ и $\mathrm{r^{V_0}_l}$, имеем, что $\mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r^{V_0}_{k,l}} = \mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r^{V_0}_l}$. А так как $\mathrm{r^{V_0}_{k,l}}(\mathrm{Q_l})$, $\mathrm{r^{V_0}_l}(\mathrm{Q_l}) \subseteq \mathrm{V_0}$, то, по следствию 1, получаем, нужный результат.

Учитывая вышесказанное, ясно, что $\mathrm{r^{V_0}} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m}) = \mathcal{F}(\mathrm{p})$ и $\mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r^{V_0}} = \mathcal{F}(\mathrm{q})$. Тогда, используя формулу (2), имеем, что искомый морфизм $\upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathrm{r^{V_0}}) \circ \varsigma_{\widehat{\mathrm{Q}}} : \widehat{\mathrm{Q}} \to \mathrm{E}^1$ удовлетворяет следующим равенствам: $\mathrm{p} = \upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{p})) \circ \varsigma_{\widehat{\mathrm{P}}} = \upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathrm{r^{V_0}}) \circ \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{m})) \circ \varsigma_{\widehat{\mathrm{P}}} = \upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathrm{r^{V_0}}) \circ \varsigma_{\widehat{\mathrm{Q}}} \circ \mathrm{m}$ и, аналогично, $\mathrm{q} = \mathrm{f} \circ \upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathrm{r^{V_0}}) \circ \varsigma_{\widehat{\mathrm{Q}}}$. □

В заключение сформулируем важное следствие полученных результатов.

Теорема 5. *Два полукубических множества, размеченных с помощью одного и того же множества L действий,* $\mathbf{cP}$*-бисимуляционны, если и только если их универсальные di-накрывающие, представленные в виде ПЧ,* $\mathbf{P}$*-бисимуляционны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое следствие теорем 2, 3, 4 и утверждения 3 из статьи [15]. □

Список литературы

1. *Grandis M.* Directed Algebraic Topology // New Mathematical Monographs. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

2. *Fajstrup L.* Dicovering spaces // Homology, Homotopy, and Applications. 2003. Vol. 5 (2). P. 1–17.

3. *van Glabbeek R. J.* Bisimulation Semantics for Higher Dimensional Automata. URL: http://theory.stanford.edu/∼rvg/hda

4. *Pratt V. R.* Modeling Concurrency with Geometry // Proc. 18th Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages. Orlando, 1991. P. 311–322.

5. *van Glabbeek R. J.* On the Expressiveness of Higher Dimensional Automata // Theoretical Computer Science. 2006. Vol. 356 (3). P. 265–290.

6. *Fajstrup L.* Dihomotopy Classes of Dipaths in the Geometric Realization of a Cubical Set: From Discrete to Continuous and back again // Proc. Dagstuhl Seminar on Spatial Representation: Discrete vs Continuous Computational Models. Schloss Dagstuhl, 2005.

7. *Goubault E., Jensen T. P.* Homology of Higher Dimensional Automata // Lecture Notes in Computer Science. 1992. Vol. 630. P. 254–268.

8. *Grandis M.* Directed Combinatorial Homology and Noncommutative Tori (The Breaking of Symmetries in Algebraic Topology) // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 2005. Vol. 138. P. 233–262.

9. *Fahrenberg U.* Directed Homology // Electrotic Notes in Theoretical Computer Science. 2004. Vol. 100.

10. *Хусаинов А. А.* О группах гомологий полукубических множеств // Сиб. мат. журнал. 2008. Т. 1, № 49. С. 224–237.

11. *Скурихин Е. Е., Сухонос А. Г.* Топологии Гротендика на пространствах Чу // Мат. труды. 2008. Т. 2, № 11. С.159–186.

12. *Gupta V.* Chu Spaces: A Model of Concurrency: PhD Thesis. Stanford: Stanford University, 1994. URL: http://boole.stanford.edu/pub/gupthes.ps.gz

13. *van Glabbeek R. J., Plotkin G. D.* Configuration Structures // Proc. 10th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science. Chicago, 2005. P. 199–209.

14. *Joyal A., Moerdijk I.* A Completeness Theorem for Open Maps // Annals of Pure and Applied Logic. 1994. Vol. 70. P. 51–86.

15. *Joyal A., Nielsen M., Winskel G.* Bisimulation from Open Maps // Information and Computation. 1996. Vol. 127 (2). P. 164–185.

16. *Oshevskaya E. S.* Open Maps Bisimulations for Higher Dimensional Automata Models // Lecture Notes in Computer Science. 2009. Vol. 5699. P. 274–286.

17. *Fahrenberg U.* A Category of Higher-Dimensional Automata // Lecture Notes in Computer Science. 2005. Vol. 3441. P. 187–201.

18. *MacLane S.* Categories for the Working Mathematician. N. Y.: Springer, 1998.

19. *Sassone V., Cattani G.L.* Higher-Dimensional Transition Systems // Proc 11th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science. Los Alamitos, 1996. P. 55–62.

Материал поступил в редколлегию 12.11.2010

Адрес автора

ОШЕВСКАЯ Елена Сергеевна

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: oshevskaya@gmail.com