УДК 512.56 + 512.57 + 514.146.01

Ц. Ч.-Д. Батуева

РЕШЕТКИ ВЫПУКЛЫХ ПОДМНОЖЕСТВ*

В статье дается характеризация решеток, изоморфных решеткам выпуклых подмножеств частично упорядоченных множеств конечной длины. Также описан класс решеток, изоморфных решеткам выпуклых подмножеств n-арных деревьев для любого целого $n > 1$.

Ключевые слова: решетка, частично упорядоченное множество, выпуклые подмножества, длина, лес, дерево.

Введение

Решетки выпуклых подмножеств частично упорядоченных множеств служат выразительным примером выпуклых геометрий (см. монографию Горбунова [1] и обзорную работу Семеновой [2]). Эти решетки интенсивно изучались рядом авторов (см. работы [3–8]). В частности, в работе Биркгофа и Беннет [3] получена характеризация класса решеток, изоморфных таким решеткам, а в работе Семеновой и Замойской-Дженио [8] описаны решетки, изоморфные решеткам выпуклых подмножеств частично упорядоченных множеств, являющихся лесами. В работе Семеновой и Верунга [4] показано, что класс решеток, вложимых в решетки выпуклых подмножеств частично упорядоченных множеств, является конечно базируемым многообразием, а также найден конкретный базис тождеств этого многообразия. Далее, в работах [5–7] получено описание классов [конечных] решеток, вложимых в решетки выпуклых подмножеств для различных конкретных классов частично упорядоченных множеств (в частности, для класса частично упорядоченных множеств конечной длины в [5]). Очень часто оказывалось, что эти классы решеток являются [псевдо]многообразиями.

В настоящей работе мы даем описание решеток, изоморфных решеткам выпуклых подмножеств частично упорядоченных множеств конечной длины (теорема 2). Кроме того, мы также даем характеризацию на языке предикатов первого порядка класса конечных решеток, изоморфных решеткам выпуклых подмножеств n-арных деревьев для любого целого $n > 1$ (теорема 4 и следствие 3). Отметим, что [конечные] решетки, вложимые в решетки выпуклых подмножеств деревьев, были описаны в работе Семеновой и Замойской-Дженио [7], где установлено, что класс таких решеток образует конечно базируемое [псевдо]многообразие. Отметим также, что класс решеток, вложимых в решетки выпуклых подмножеств унарных лесов (другими словами, раздельных объединений линейно упорядоченных множеств) описан в работе Семеновой и Верунга [6], где показано, что этот класс решеток образует конечно базируемое локально конечное многообразие. Наконец, мы показываем, что классы решеток, вложимых в решетки вы-

* Автор был поддержан грантом Президента РФ «Молодые доктора наук» МД-2587.2010.1.

пуклых подмножеств n-арных деревьев [изоморфных таким решеткам], различны для различных n (следствие 2).

1. Основные понятия

Пусть $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ — частично упорядоченное множество. Подмножество $X \subseteq P$ называется *выпуклым*, если $x \trianglelefteq z \trianglelefteq y$ влечет $z \in X$ для любых $x, y \in X$ и любого $z \in P$. Для $X \subseteq P$ пусть $\mathrm{Co}(X)$ обозначает *выпуклую оболочку* множества X, т. е. наименьшее выпуклое подмножество в P, содержащее X. Множество $\mathrm{Co}(P)$ всех выпуклых подмножеств в P, упорядоченное по включению, образует (полную) решетку, в которой

$$\bigwedge_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i; \quad \bigvee_{i\in I} A_i = \mathrm{Co}\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big)$$

для произвольных $A_i \in \mathrm{Co}(P)$, $i \in I$.

Для произвольного класса $\mathcal{K}$ частично упорядоченных множеств пусть $\mathbf{Co}(\mathcal{K})$ обозначает класс решеток, изоморфных решеткам выпуклых подмножеств частично упорядоченных множеств, принадлежащих классу $\mathcal{K}$, а $\mathbf{SCo}(\mathcal{K})$ — класс решеток, вложимых в решетки из $\mathbf{Co}(\mathcal{K})$. Далее, пусть $\mathcal{P}$ обозначает класс всех частично упорядоченных множеств. Кроме того, для произвольного $n < \omega$ пусть $\mathcal{P}_n$ обозначает класс всех частично упорядоченных множеств, длина которых не превосходит n.

Наименьший элемент частично упорядоченного множества $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ мы обозначаем 0_P или просто 0. Элемент $a \in P$ называется *атомом*, если $0_P \lhd a$ и не существует элемента $b \in P$, такого что $0_P \lhd b \lhd a$. Решетка называется *точечной*, если любой ее элемент есть сумма атомов. Множество атомов решетки L мы обозначаем через $\mathrm{At}(L)$. Элемент a решетки L называется *неразложимым* [*простым*], если для любых элементов $b, c \in L$ равенство $a = b \vee c$ [неравенство $a \leq b \vee c$ соответственно] влечет либо неравенство $a \leq b$, либо неравенство $a \leq c$. Множество всех неразложимых элементов в L мы обозначаем через $\mathrm{J}(L)$, а множество всех простых элементов в L — через $\mathrm{P}(L)$. Нетрудно записать формулу первого порядка $\mathrm{J}(x)$ [$\mathrm{Prime}(x)$] с одной свободной переменной x в сигнатуре $\{\vee, \wedge\}$, такую что элемент a неразложим [прост соответственно] в решетке L тогда и только тогда, когда $L \models \mathrm{J}(a)$ [$L \models \mathrm{Prime}(a)$ соответственно].

За всеми понятиями, не определенными здесь, мы отсылаем читателя к [1; 9; 10].

2. Характеризация класса $\mathbf{Co}(\mathcal{P}_n)$

Решетка называется *полудистрибутивной вверх*, если она удовлетворяет квазитождеству

$$x \vee y = x \vee z \ \longrightarrow\ x \vee y = x \vee (y \wedge z).$$

Решетка называется 2-*дистрибутивной*, если она удовлетворяет тождеству

$$x \wedge (y_0 \vee y_1 \vee y_2) = \bigvee_{i<j<3} x \wedge (y_i \vee y_j).$$

Решетка L называется *непрерывной вверх*, если для любого направленного вверх множества $C \subseteq L$ и элемента $a \in L$ выполняется

$$a \wedge \bigvee C = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in C\}.$$

Следующее тождество с переменными $\langle x, y, y_0, y_1, z \rangle$ мы обозначаем (S):

$$x \wedge (y' \vee z) = (x \wedge y') \vee \bigvee_{i<2} \big[x \wedge (y_i \vee z) \wedge \big((y' \wedge (x \vee y_i)) \vee z\big)\big],$$

где $y' = y \wedge (y_0 \vee y_1)$. Это тождество введено в работе Семеновой и Верунга [4], где показано, что класс решеток, вложимых в решетки выпуклых подмножеств частично упорядоченных множеств, является конечно базируемым многообразием, а также найден конкретный базис тождеств этого многообразия.

Предложение 1 [4. Лемма 4.1]. *Для любого частично упорядоченного множества* $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ *решетка* $\mathrm{Co}(P)$ *удовлетворяет тождеству* (S).

Пусть L является точечной решеткой, а $p_0 \neq p_1$ — различные атомы в L. Мы будем писать $p_0 \sim p_1$, если найдется атом $p_2 \in \mathrm{At}(L) \setminus \{p_0, p_1\}$, такой что $p_{\sigma(0)} \leq p_{\sigma(1)} \vee p_{\sigma(2)}$ для некоторой перестановки $\sigma \in \mathcal{S}_3$.

Последовательность $\langle p_0, p_1, \ldots, p_n \rangle$, $n < \omega$, атомов в L называется *зигзагом*, если $p_i \sim p_{i+1}$ для всех $i < n$ и $p_i \nleq p_{i-1} \vee p_{i+1}$ для всех $0 < i < n$. Следуя работе Биркгофа и Беннет [3], мы говорим, что точечная решетка L удовлетворяет *условию Альтвега*, если L не содержит зигзага вида $\langle p_0, p_1, \ldots, p_{2n}, p_0, p_1 \rangle$, $0 < n < \omega$. Решетка L имеет *ранг Каратеодори* 2, если для любого атома $p \in L$ произвольного множества $A \subseteq L$ неравенство $p \leq \bigvee A$ влечет существование атомов $a, b \in A$, таких что $p \leq a \vee b$.

В той же работе [3] была получена следующая характеризация решеток, принадлежащих классу $\mathbf{Co}(\mathcal{P})$.

Теорема 1 [3. Теорема 23]. *Решетка* L *принадлежит классу* $\mathbf{Co}(\mathcal{P})$ *тогда и только тогда, когда она полная, точечная, полудистрибутивная вверх, удовлетворяет условию Альтвега, а ее ранг Каратеодори равен* 2.

Нетрудно видеть, что существует (вообще говоря, бесконечное) множество предложений первого порядка Σ, такое что решетка L удовлетворяет условию Альтвега тогда и только тогда, когда $L \models \Sigma$.

Для $0 < n < \omega$ определим решеточные термы $U_{i,n}$, $0 < i \leqslant n+1$, и решеточные термы $V_{i,j,n}$, $0 < i \leqslant j < n+1$, от переменных $\langle x_0, \ldots, x_{n+1} \rangle$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&U_{n+1,n} = x_{n+1};\\
&U_{i,n} = x_i \wedge (x_0 \vee U_{i+1,n}),\ 0 < i < n+1;\\
&V_{j,j,n} = (x_j \wedge U_{j+1,n}) \vee (x_j \wedge x_0),\ 0 < j < n+1;\\
&V_{i,j,n} = x_i \wedge (x_0 \vee V_{i+1,j,n}),\ 0 < i < j < n+1.
\end{aligned}$$

Следующее тождество с переменными $\langle x_0, \ldots, x_{n+1} \rangle$ мы обозначаем (H_n):

$$U_{1,n} = \bigvee_{0<j<n+1} V_{1,j,n}.$$

Это тождество является аналогом одного тождества из работы Семеновой и Верунга [5], в которой было показано, что класс решеток, вложимых в решетки выпуклых подмножеств частично упорядоченных множеств длины, не превосходящей n, является конечно базируемым многообразием для любого $n < \omega$, а также был найден конкретный базис тождеств этого многообразия. Доказательство следующего предложения сходно с доказательством следствия 5.6 из работы [5].

Предложение 2. *Пусть $0 < n < \omega$. Для любого частично упорядоченного множества $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ решетка $\mathrm{Co}(P)$ удовлетворяет тождеству (H_n) тогда и только тогда, когда длина $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ не превосходит n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ содержит линейно упорядоченное подмножество длиной, по крайней мере, $n+1$:

$$p_0 \lhd \ldots \lhd p_{n+1}.$$

Для любого $0 < i < n+1$ имеет место неравенство $\{p_i\} \subseteq \{p_0\} \vee \{p_{i+1}\}$. Непосредственно обратной индукцией по $i \leqslant n+1$ проверяется, что $U_{i,n}(\{p_0\}, \ldots, \{p_{n+1}\}) = \{p_i\}$ для всех $0 < i \leqslant n+1$. Кроме того, для любого j с условием $0 < j < n+1$ имеем $V_{j,j,n}(\{p_0\}, \ldots, \{p_{n+1}\}) = (\{p_j\} \cap \{p_{j+1}\}) \vee (\{p_j\} \cap \{p_0\}) = \varnothing \vee \varnothing = \varnothing$. И вновь обратной индукцией по $i \leqslant j$ легко проверяется, что $V_{i,j,n}(\{p_0\}, \ldots, \{p_{n+1}\}) = \varnothing$ для всех i с условием $0 < i \leqslant j$. Таким образом, $U_{1,n}(\{p_0\}, \ldots, \{p_{n+1}\}) = \{p_1\} \neq \varnothing = \bigvee_{0<j<n+1} = V_{1,j,n}(\{p_0\}, \ldots, \{p_{n+1}\})$. Поэтому $L \not\models (\mathrm{H}_n)$.

Обратно, предположим, что длина любого линейно упорядоченного подмножества в $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ не превосходит n. Поскольку неравенство

$$\bigvee_{0<j<n+1} V_{1,j,n}(x_0, \ldots, x_{n+1}) \leq U_{1,n}(x_0, \ldots, x_{n+1})$$

имеет место в любой решетке, для доказательства того, что $L \models (\mathrm{H}_n)$, достаточно установить, что для произвольных множеств $A_0, \ldots, A_{n+1} \in \mathrm{Co}(P)$ и любого $p_1 \in U_{1,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место включение $p_1 \in V_{1,j,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$. Действительно, включение $p_1 \in U_{1,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$ означает, что $p_1 \in A_1$ и $p_1 \in A_0 \vee U_{2,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$. Если $p_1 \in A_0 \cup U_{2,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$, то $p_1 \in (A_1 \cap U_{2,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})) \vee (A_1 \cap A_0) = V_{1,1,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$, что и требовалось. В противном случае найдутся элементы $p_0 \in A_0$ и $p_2 \in U_{2,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$, такие что $p_0 \lhd p_1 \lhd p_2$ либо $p_2 \lhd p_1 \lhd p_0$. Мы рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогичным образом). Вновь $p_2 \in U_{2,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$. Это означает, что $p_2 \in A_2$ и $p_2 \in A_0 \vee U_{3,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$. Если $p_2 \in A_0 \cup U_{3,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$, то $p_2 \in (A_2 \cap U_{3,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})) \vee (A_2 \cap A_0) = V_{2,2,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$, т.е. $p_1 \in A_1 \cap (A_0 \vee V_{2,2,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})) = V_{1,2,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$, что и требовалось. В противном случае найдутся элементы $p \in A_0$ и $p_3 \in U_{3,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$, такие что $p \lhd p_2 \lhd p_3$ либо $p_3 \lhd p_2 \lhd p$. Во втором случае немедленно получаем $p_0 \lhd p_1 \lhd p_2 \lhd p$ и $p_0, p \in A_0$, т.е. $p_1 \in A_0$ и поэтому $p_1 \in A_1 \cap A_0 \subseteq V_{1,1,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$. В первом же случае иммем $p_0 \lhd p_1 \lhd p_2 \lhd p_3$ $p_3 \in U_{3,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$. Продолжая подобные рассуждения, мы либо построим цепь $p_0 \lhd \ldots \lhd p_{n+1}$, что невозможно по предположению о длине $\langle P, \trianglelefteq \rangle$, либо покажем, что $p_1 \in V_{1,j,n}(A_0, \ldots, A_{n+1})$. $\square$

Теперь мы можем сформулировать первый основной результат данной работы. Отметим, что $\mathbf{Co}(\mathcal{P}_0) = \mathbf{Co}(\mathcal{P}_1) = \{\mathcal{P}(X) \mid X$ — множество$\}$.

Теорема 2. *Пусть $0 < n < \omega$. Решетка L принадлежит классу $\mathbf{Co}(\mathcal{P}_n)$ тогда и только тогда, когда она является полной, точечной, непрерывной вверх, а также удовлетворяет условию Альтвега и тождествам* (H_n), (S).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ — частично упорядоченное множество длины, не превосходящей n. Согласно предложениям 1, 2, решетка $\mathrm{Co}(P)$ удовлетворяет тождествам (H_n) и (S). Более того, решетка $\mathrm{Co}(P)$ является, очевидно, полной, точечной и непрерывной вверх. Согласно [3], решетка $\mathrm{Co}(P)$ удовлетворяет условию Альтвега.

Обратно, предположим, что решетка L удовлетворяет всем предположениям из условия теоремы. Поскольку $L \models$ (S), решетка L является полудистрибутивной вверх, согласно [4. Лемма 4.3]. Более того, решетка также является 2-дистрибутивной, согласно [4. Лемма 4.2]. Нетрудно проверить, что в полной непрерывной вверх решетке любой атом компактен, следовательно, любая полная точечная непрерывная вверх 2-дистрибутивная решетка является биатомной и имеет ранг Каратеодори 2. Согласно теореме 1, $L \cong \mathrm{Co}(P)$ для некоторого частично упорядоченного множества $\langle P, \trianglelefteq \rangle$. Поскольку $L \models$ (H_n), мы заключаем, согласно предложению 2, что длина $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ не превосходит n, т.е. $L \in \mathbf{Co}(\mathcal{P}_n)$. $\square$

Отметим, что характеризационные условия в теореме Биркгофа-Беннет (см. теорему 1) носят геометрический характер, в то время как большинство из характеризационных условий теоремы 2 выразимо на языке предикатов первого порядка.

Следствие 1. *Для произвольного $n < \omega$ класс решеток $\mathbf{Co}(\mathcal{P}_n)$ [класс конечных решеток из $\mathbf{Co}(\mathcal{P}_n)$] аксиоматизируем на языке первого порядка в классе полных непрерывных вверх решеток [в классе конечных решеток соответственно].*

3. Решетки выпуклых подмножеств n-арных лесов

Частично упорядоченное множество $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ называется *лесом*, если нижний конус $\{p \in P \mid p \trianglelefteq a\}$ линейно упорядочен относительно $\trianglelefteq$ для любого $a \in P$. Связный лес называется *деревом*. Конечное дерево $\langle P, \trianglelefteq \rangle$ называется *n-арным*, $n > 0$, если каждый элемент $a \in P$ имеет не более n верхних покрытий относительно порядка $\trianglelefteq$. Лес называется *n-арным*, если он является раздельным объединением конечных n-арных деревьев.

Пусть $\mathcal{F}$ [$\mathcal{T}$] обозначает класс частично упорядоченных множеств, являющихся лесами [являющихся деревьями соответственно]. Для любого целого $n > 0$ пусть $\mathcal{F}^n$ [$\mathcal{T}^n$] обозначает класс частично упорядоченных множеств, являющихся n-арными лесами [конечными n-арными деревьями соответственно].

Следующее квазитождество с переменными $\langle x, y_0, \ldots, y_n, z \rangle$ мы обозначаем через (Q_n):

$$\bigvee_{i<n+1} (x \wedge y_i) \leq z \;\&\; x \leq \bigwedge_{i<n+1} (y_i \vee z) \;\&\; \bigvee_{i<j<n+1} \big((y_i \vee z) \wedge (y_j \vee z)\big) \leq x \vee z \;\longrightarrow\; x \leq z.$$

Предложение 3. *Пусть $0 < n < \omega$. Тогда $\mathrm{Co}(F) \models$ (Q_n) для любого конечного n-арного леса $\langle F, \trianglelefteq \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выпуклые множества A, B_0, …, B_n, $C \in \mathrm{Co}(F)$ удовлетворяют посылке квазитождества (Q_n). Покажем, что $A \subseteq C$. Если $A \backslash C \neq \varnothing$, то выберем максимальный элемент $a \in A \backslash C$. Если $a \in B_0 \cup \ldots \cup B_n$, то $a \in A \cap (B_0 \cup \ldots \cup B_n) \subseteq C$, что противоречит нашему выбору. Таким образом, $a \notin B_0 \cup \ldots \cup B_n$. Согласно посылке квазитождества (Q_n), найдутся элементы $c_i \in C$ и $b_i \in B_i$, $i < n+1$, такие что $c_i \lhd a \lhd b_i$ или $b_i \lhd a \lhd c_i$ для всех $i < n+1$. Рассмотрим случай, когда $c_n \lhd a \lhd b_n$ (случай $b_n \lhd a \lhd c_n$ может быть рассмотрен аналогично). Если $b_i \lhd a \lhd c_i$ для некоторого $i < n$, то $c_n \lhd a \lhd c_i$, и поэтому $a \in C$, что невозможно. Поэтому $c_i \lhd a \lhd b_i$ для всех $i < n+1$. Поскольку $\langle F, \unlhd \rangle$ является деревом, элементы множества $\{c_0, \ldots, c_n\}$ попарно сравнимы относительно $\unlhd$, поэтому без ограничения общности мы можем считать, что $c = c_0 = \ldots = c_n$. Далее, поскольку лес $\langle F, \unlhd \rangle$ является n-арным, найдется верхнее покрытие x элемента a, такое что $x \unlhd b_i, b_j$ для некоторых $i < j < n+1$. Так как $c \lhd a \lhd x \unlhd b_i, b_j$, получаем, что $x \in (B_i \vee C) \cap (B_j \vee C) \subseteq A \vee C$. Если $x \in C$, то $a \in C$, что противоречит нашему выбору a. Кроме того, $x \notin A$, поскольку a был выбран максимальным в $A \backslash C$. Таким образом, существуют элементы $a' \in A$ и $c' \in C$, такие что либо $a' \lhd x \lhd c'$, либо $c' \lhd x \lhd a'$. В первом случае получаем $c \lhd a \lhd x \lhd c'$, т. е. $a \in C$, что невозможно. Во втором случае получаем $a \lhd x \lhd a'$, т. е. $x \in A$, что вновь невозможно. Полученное противоречие показывает, что наше предположение было неверно и $A \subseteq C$. Таким образом, $\mathrm{Co}(F) \models (\mathrm{Q}_n)$. □

Следующее предложение с переменными $\langle x, y_0, \ldots, y_n, z_0, \ldots, z_n \rangle$ мы обозначаем через (R_n):

$$\bigvee_{i<j<n+1} (y_i \wedge y_j) \vee \bigvee_{i<n+1} (y_i \wedge z_i) \leq x \;\&\; \&_{i<j<n+1}\big((x \vee z_i) \wedge (x \vee z_j)\big) = x \;\&$$
$$\& \;\mathrm{Prime}(x) \;\&\; \mathrm{J}(y_0) \;\ldots\; \& \;\mathrm{J}(y_n) \;\&$$
$$\& \; y_0 \leq x \vee z_0 \;\&\; \ldots \;\&\; y_n \leq x \vee z_n \;\longrightarrow\; x = y_0 \;\vee\; \ldots \;\vee\; x = y_n.$$

Предложение 4. *Пусть $0 < n < \omega$. Тогда $\mathrm{Co}(F) \models (\mathrm{R}_n)$ для любого конечного n-арного леса $\langle F, \unlhd \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выпуклые множества A, B_0, …, B_n, C_0, …, $C_n \in \mathrm{Co}(F)$ удовлетворяют посылке предложения (R_n). Поскольку A, B_0, …, B_n являются неразложимыми элементами точечной решетки $\mathrm{Co}(F)$, мы заключаем, что $A, B_0, \ldots, B_n \in \mathrm{At}(\mathrm{Co}(F))$. Поэтому найдутся a, b_0, …, $b_n \in F$, такие что $A = \{a\}$, $B_0 = \{b_0\}$, … …, $B_n = \{b_n\}$. Если $B_i \neq A$ для всех $i < n+1$, то $a \neq b_i$ для всех $i < n+1$. Далее, если $b_i \in C_i$, то $B_i \subseteq B_i \cap C_i \subseteq A$, что невозможно согласно нашему предположению. Таким образом, $b_i \notin C_i$ для всех $i < n+1$. Поскольку $B_i \subseteq A \vee C_i$, то для каждого $i < n+1$ найдется $c_i \in C_i$, такой что $c_i \lhd b_i \lhd a$ или $a \lhd b_i \lhd c_i$. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1: $c_i \lhd b_i \lhd a$ и $a \lhd b_j \lhd c_j$ для некоторых различных $i, j < n+1$. В этом случае $b_i \lhd a \lhd b_j$, и поэтому $A \subseteq B_i \vee B_j$ нетривиальным образом, что противоречит простоте элемента A в решетке $\mathrm{Co}(F)$.

Случай 2: $c_i \lhd b_i \lhd a$ для всех $i < n+1$. Поскольку $\langle F, \unlhd \rangle$ является лесом, элементы $c_0, \ldots, c_n$ сравнимы относительно $\unlhd$. Таким образом, для некотрых различных $i, j < n+1$

имеют место неравенства $c_i \trianglelefteq c_j \triangleleft a$. Поэтому $c_j \in (A \vee C_i) \cap (A \vee C_j) = A$, т. е. $c_j = a$, что невозможно.

Случай 3: $a \triangleleft b_i \triangleleft c_i$ для всех $i < n+1$. Поскольку лес $\langle F, \trianglelefteq\rangle$ является n-арным, $a \triangleleft x \trianglelefteq b_i, b_j$ для некоторого верхнего покрытия x элемента a и некоторых различных $i, j < n+1$. Таким образом, $a \triangleleft x \trianglelefteq c_i, c_j$, и поэтому $x \in (A \vee C_i) \cap (A \vee C_j) = A$, т. е. $x = a$, что невозможно.
Полученные противоречия показывают, что наше предположение неверно, поэтому заключение предложения (R_n) выполняется и $\mathrm{Co}(F) \models (\mathrm{R}_n)$. □

Предложение 5. *Пусть* $0 < n < \omega$. *Для любого конечного леса* $\langle F, \trianglelefteq\rangle$ $\mathrm{Co}(F) \models (\mathrm{Q}_n)$, (R_n) *тогда и только тогда, когда лес* $\langle F, \trianglelefteq\rangle$ *является* n*-арным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если лес $\langle F, \trianglelefteq\rangle$ является n-арным, то $\mathrm{Co}(F) \models (\mathrm{Q}_n)$, (R_n) согласно предложениям 3–4. Обратно, предположим, что лес $\langle F, \trianglelefteq\rangle$ не является n-арным. Выберем элемент $a \in F$, имеющий по крайней мере $n+1$ различных верхних покрытий $b_0, \ldots, b_n$ в $\langle F, \trianglelefteq\rangle$.

Если a не является минимальным элементом в $\langle F, \trianglelefteq\rangle$, пусть c обозначает (единственное) нижнее покрытие a в $\langle F, \trianglelefteq\rangle$. Выпуклые множества $\{a\}$, $\{b_0\}, \ldots, \{b_n\}$, $\{c\} \in \mathrm{Co}(F)$ удовлетворяют посылке квазитождества (Q_n), поскольку

$$\varnothing = \{a\} \cap \{b_0\} = \ldots = \{a\} \cap \{b_n\};$$
$$a \in \{a, c\} = \{a\} \vee \{c\} = (\{b_i\} \vee \{c\}) \cap (\{b_j\} \vee \{c\}) \text{ для всех } i < j < n+1.$$

Однако $\{a\} \nsubseteq \{c\}$, и поэтому $\mathrm{Co}(F) \not\models (\mathrm{Q}_n)$.

Предположим теперь, что a является минимальным элементом в $\langle F, \trianglelefteq\rangle$. Пусть $c_0, \ldots, c_n$ обозначают верхние покрытия элементов $b_0, \ldots, b_n$. Тогда нетрудно проверить, что выпуклые множества $\{a\}$, $\{b_0\}, \ldots, \{b_n\}$, $\{c_0\}, \ldots, \{c_n\} \in \mathrm{Co}(F)$ удовлетворяют посылке предложения (R_n), поскольку $\{a\}$ является простым элементом, а $\{b_0\}, \ldots, \{b_n\}$ являются неразложимыми элементами в $\mathrm{Co}(F)$. Кроме того,

$$\{b_i\} \cap \{b_j\} = \{b_i\} \cap \{c_i\} = \varnothing \subseteq \{a\} \text{ для всех } i < j < n+1;$$
$$(\{a\} \vee \{c_i\}) \cap (\{a\} \vee \{c_j\} = \{a\} \text{ для всех } i < j < n+1;$$
$$b_i \in \{a\} \vee \{c_i\} \text{ для всех } i < n+1.$$

Однако $\{a\} \notin \{b_0, \ldots, b_n\}$, и поэтому $\mathrm{Co}(F) \not\models (\mathrm{R}_n)$. □

Имеет место следующее несложное утверждение.

Лемма 1. *Для любого целого* $n > 1$ *и для любой конечной решетки* L *равносильны следующие условия:*

1) $L \in \mathbf{SCo}(\mathcal{F}^n)$;

2) $L \in \mathbf{SCo}(\mathcal{T}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что условие 2 влечет условие 1. Предположим, что решетка L вложима в решетку выпуклых подмножеств некоторого n-арного леса. Тогда, согласно [7. Следствие 9.2], вложима в решетку $\mathrm{Co}(F)$ для некоторого конечного n-арного леса $\langle F, \trianglelefteq^* \rangle$. Пусть $\langle F, \trianglelefteq^* \rangle$ является раздельным объединением n-арных деревьев $\langle T_i, \trianglelefteq^* \rangle$, $i < m < \omega$. Определим дерево $\langle T, \trianglelefteq \rangle$ следующим образом. Полагаем

$$T = \bigcup_{i \in I} T_i \cup \{a_0, \ldots, a_{m-1}\} \cup \{b_0, \ldots, b_{m-2}\},$$

где

$$T \cap \{a_0, \ldots, a_{m-1}\} = T \cap \{b_0, \ldots, b_{m-2}\} = \{a_0, \ldots, a_{m-1}\} \cap \{b_0, \ldots, b_{m-2}\} = \varnothing.$$

Определим бинарное отношение $\trianglelefteq$ на T, полагая $x \trianglelefteq y$ для $x, y \in T$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

$$\begin{aligned}
&x, y \in T_i \text{ для некоторого } i < m \text{ и } x \trianglelefteq^* y;\\
&x = a_i,\ y \in T_j \cup \{a_j, b_j\} \text{ для некоторых } i \leqslant j < m;\\
&x = b_i,\ y \in T_j \text{ для некоторых } i \leqslant j < m.
\end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что $\langle T, \trianglelefteq \rangle$ является конечным n-арным деревом и что отображение

$$\varphi\colon \mathrm{Co}(F) \to \mathrm{Co}(T), \quad \varphi\colon X \mapsto X,$$

является решеточным вложением. Таким образом, условие 1 влечет условие 2.

□

Комбинируя предложение 3 и лемму 1, получаем такое следствие.

Следствие 2. *Для любого целого $n > 0$ имеют место следующие включения:*

1) $\mathbf{SCo}(\mathcal{F}^{n+1}) = \mathbf{SCo}(\mathcal{T}^{n+1}) \subset \mathbf{SCo}(\mathcal{F}^{n+2}) = \mathbf{SCo}(\mathcal{T}^{n+2})$;

2) $\mathbf{Co}(\mathcal{F}^{n}) \subset \mathbf{Co}(\mathcal{F}^{n+1})$.

В работе Семеновой и Замойской-Дженио [8] были указаны тождества (S), (U), (B), (T_3), (T_4), а также предложения (D), (G), характеризующие класс решеток $\mathbf{Co}(\mathcal{F})$. Мы не приводим эти предложения здесь в явном виде, чтобы не усложнять изложение.

Теорема 3 [8. Теорема 8.3]. *Для любой решетки L равносильны следующие условия:*

1) $L \in \mathbf{Co}(\mathcal{F})$;

2) $L \models$ (S), (U), (B), (T_3), (T_4), (D), (G).

Теперь мы можем сформулировать еще один основной результат нашей работы.

Теорема 4. *Для любого целого $n > 0$ и для любой конечной решетки L равносильны следующие условия:*

1) $L \in \mathbf{Co}(\mathcal{F}^n)$;

2) *L является точечной решеткой и* $L \models$ (S), (U), (B), (T_3), (T_4), (D), (G), (Q_n), (R_n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3 и предложениям 3–4, условие 1 влечет условие 2. Предположим, что решетка L полностью удовлетворяет условиям 2. Согласно теореме 3, $L \cong \mathrm{Co}(F)$ для некоторого конечного леса $\langle F, \trianglelefteq \rangle$. Поскольку $L \models (\mathrm{Q}_n)$, (R_n), лес $\langle F, \trianglelefteq \rangle$ является n-арным, согласно предложению 5. $\square$

Следствие 3. *Класс конечных решеток из* $\mathbf{Co}(\mathcal{F}^n)$ *является конечно аксиоматизируемым в классе всех конечных решеток.*

Отметим, что класс решеток, вложимых в решетки выпуклых подмножеств раздельных объединений линейно упорядоченных множеств, описан в работе Семеновой и Верунга [6], где показано, что этот класс решеток образует конечно базируемое локально конечное многообразие. Отметим также, что класс конечных решеток из $\mathbf{SCo}(\mathcal{F})$ (который, очевидно, совпадает с классом конечных решеток из $\bigcup_{n>0} \mathbf{SCo}(\mathcal{F}^n)$) определим конечным множеством тождеств в классе всех конечных решеток и поэтому образует псевдомногообразие, согласно [7. Следствие 9.3(ii)]. В связи с этими результатами возникает следующая задача.

Задача 1. *Пусть* $n > 1$.

1) *Описать класс решеток* $\mathbf{SCo}(\mathcal{F}^n)$. *Верно ли, что этот класс образует многообразие?*

2) *Описать класс конечных решеток из* $\mathbf{SCo}(\mathcal{F}^n)$. *Верно ли, что этот класс образует псевдомногообразие?*

Список литературы

1. *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. кн., 1999.

2. *Semenova M.* Closure Lattices of Closure Spaces // Contributions to General Algebra. 2008. Vol. 18. P. 175–188.

3. *Birkhoff G., Bennett M. K.* The Convexity Lattice of a Poset // Order. 1985. Vol. 2. P. 223–242.

4. *Semenova M., Wehrung F.* Sublattices of Lattices of Order-Convex Sets, I. The Main Representation Theorem // J. Algebra. 2004. Vol. 277. P. 543–564.

5. *Semenova M., Wehrung F.* Sublattices of Lattices of Order-Convex Sets, II. Posets of Finite Length // Internat. J. Algebra Comput. 2003. Vol. 13. P. 543–564.

6. *Semenova M., Wehrung F.* Sublattices of Lattices of Order-Convex Sets, III. The Case of Totally Ordered Sets // Internat. J. Algebra Comput. 2004. Vol. 14. P. 357–387.

7. *Semenova M. V., Zamojska-Dzienio A.* On Lattices Embeddable into Lattices of Order-Convex Sets. Case of Trees // Internat. J. Algebra Comput. 2007. Vol. 17. P. 1667–1712.

8. *Semenova M., Zamojska-Dzienio A.* Lattices of Order-Convex Sets of Forests // Order. 2010. Vol. 27. P. 383–404.

9. *Crawley P., Dilworth R. P.* Algebraic Theory of Lattices. Englewood: Prentice-Hall, 1973.

10. *Freese R., Ježek J., Nation J. B.* Free Lattices // Mathematical Surveys and Monographs, 42. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995.

Материал поступил в редколлегию 18.02.2011

Адрес автора
БАТУЕВА Цындыма Чимит-Доржиевна
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: cendema@ngs.ru