УДК 519.8

С. Н. Астраков, И. И. Тахонов

РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ В МОДЕЛИ ГРУППОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ*

Рассматривается распределенная система, моделируемая взвешенным двудольным графом $G = (I \cup J, \mathcal{E})$. Каждой вершине $i \in I$ (агенту i) приписан ресурс, который она полностью распределяет между смежными вершинами из множества J (полями взаимодействия). Агент i оценивает эффект от размещения ресурса на поле j согласно значениям известных оценивающих функций $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j)$, где x_{ij} — это количество ресурса, выделенного агентом i на поле j, а $\hat{X}_j$ — общее количество ресурса, выделенное всеми агентами на поле j. Среди всех допустимых распределений ресурсов выделяются *равновесные* распределения, при которых у каждого агента оценки эффективности взаимодействий на всех доступных ему полях совпадают, т. е. для всех $(i,j) \in \mathcal{E}$ выполнены равенства $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = c_i$. В работе исследуется вопрос существования равновесных распределений ресурсов в системах, моделируемых различными графами и с линейными оценивающими функциями нескольких видов. Приводятся достаточные условия существования равновесных распределений, получены аналитические выражения для их вычисления.

Ключевые слова: групповые взаимодействия, равновесие, распределенная система.

Введение

Рассмотрим следующую модель групповых взаимодействий. Пусть $G = (I \cup J, \mathcal{E})$, $|I| = n$, $|J| = m$ — взвешенный двудольный граф. Назовем элементы множества I *агентами*, а элементы множества J — *полями взаимодействия*. В дальнейшем будем полагать, что $n \geq 1$, $m \geq 1$, и граф G является связным (иначе можно рассмотреть каждую компоненту связности отдельно). Говорим, что агент i присутствует на поле j, если $(i,j) \in \mathcal{E}$. Обозначим через V_k множество вершин, смежных с $k \in I \cup J$.

Каждый агент $i \in I$ обладает ресурсом в размере q_i, который он полностью распределяет между смежными с ним полями. Обозначим через x_{ij} количество ресурса, выделяемое агентом i на поле j. Под *состоянием* агента i будем понимать распределение его ресурса между смежными с ним полями: $X_i = \{x_{ij} :\ j \in V_i\}$. *Состоянием системы* будем называть совокупность состояний агентов: $X = \{X_i :\ i \in I\}$. Обозначим также через $\hat{X}_j$ общее количество ресурса, выделенное всеми агентами $l \in V_j$ на поле j: $\hat{X}_j = \sum\limits_{l \in V_j} x_{lj}$. Агент i оценивает эффект от своего вклада в поле j согласно значениям известных оценивающих функций $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j)$.

В дальнейшем будем обозначать через $S(G, q, \{c_{ij}\})$ систему, представленную графом G с вектором ресурсов $q = (q_1, \ldots, q_n)$ и оценивающими функциями c_{ij} $(i \in I, j \in V_i)$.

Состояние X называется *равновесным* [1], если выполнены равенства

$$c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = c_i \quad (i \in I, j \in V_i), \tag{1}$$

* Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-92650-ИНД_а.

а также выполнены условия баланса ресурсов

$$\sum_{j \in V_i} x_{ij} = q_i \quad (i \in I). \tag{2}$$

Целью работы является поиск достаточных условий существования равновесных состояний в системах с линейными оценивающими функциями. Ранее подобные исследования для частных случаев графов были проведены в работах [1–4].

Рассматриваемая проблема допускает различные содержательные трактовки. Например, пусть исходная система — это глобальная распределенная коммуникационная сеть, состоящая из узлов (элементов множества J), к каждому из которых присоединены пользователи (агенты I). Каждый пользователь имеет некоторый ресурс, отражающий доступные ему аппаратные, программные и другие средства, которые он распределяет между смежными с ним узлами с целью улучшить качество связи. Накопленный в узле ресурс расходуется на поддержание в хорошем техническом состоянии самого узла и линий, связывающих с ним пользователей. Ресурс вершины i распределяется по инцидентным дугам (i, j), $j \in V_i$ таким образом, чтобы величины $ax_{ij} + b\hat{X}_j$ были одинаковыми. Такая стратегия имеет смысл, когда все инцидентные ребра равнозначны, а их качество прямо пропорционально количеству выделенного ресурса. Например, если ресурс используется для профилактики заражения компьютерным вирусом, то неважно, откуда придет вирус. Необходимо обезопасить все направления в равной степени.

В работах [5–7] исследовался вопрос существования равновесного состояния в системах, представленных двудольными графами G, в которых на каждом поле j присутствуют ровно два агента: $i_1(j)$ и $i_2(j)$. Рассматривались оценивающие функции вида $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = \hat{X}_j - 2x_{ij}$. В этом случае равновесное состояние определяется соотношением $x_{i_1(j),j} = x_{i_2(j),j}$, или, в наших обозначениях, $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = 0$, $(i, j) \in \mathcal{E}$. Такая постановка связана, в частности, с вопросом существования баланса сил сторон.

В разделе 1 рассматривается система $S1 = S(G, q, \{c_{ij}\})$ с оценивающими функциями вида $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = ax_{ij} + b\hat{X}_j$, представленная произвольным двудольным связным графом G. Эта модель является обобщением модели, изложенной в [1]. Найдены легко проверяемые условия существования равновесных состояний, получены аналитические выражения для их вычисления.

В разделе 2 рассматриваются системы, представленные графом G специального вида, с оценивающими функциями вида $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = a_j x_{ij} + b_j \hat{X}_j$ и $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = a_j x_{ij} + b_j \hat{X}_j + f_{ij}$. Для этих систем установлены более сильные условия существования равновесий, получены более простые для вычисления выражения для равновесных состояний.

Раздел 3 посвящен исследованию сложности задач о существования равновесия в системах с линейными и нелинейными оценивающими функционалами.

1. Поиск равновесных состояний в системе $S1$

Рассмотрим систему $S1 = S(G, q, \{c_{ij}\})$ с оценивающими функциями вида $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = ax_{ij} + b\hat{X}_j$, представленную произвольным двудольным связным графом G.

Введем обозначения.

- $M_{n,m}$ — множество матриц размером $n \times m$; M_n — множество квадратных матриц размером $n \times n$.
- Пусть $A \in M_n$. Обозначим через $Spec(A)$ множество собственных чисел матрицы A. Спектральным радиусом A назовем $r(A) = \max\limits_{\lambda \in Spec(A)} |\lambda|$.
- I_l — вектор-столбец размерностью l, каждый элемент которого равен 1.
- E_l — единичная матрица размерностью l. В случае, когда размерность ясна из контекста, будет использоваться обозначение E.
- e_i — i-й орт (столбец).
- q — вектор (строка), состоящий из величин q_i $(i \in I)$; $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$ — суммарное количество ресурсов агентов.
- $\hat{X}$ — вектор (строка), состоящий из величин $\hat{X}_j$ $(j \in J)$.
- $\Gamma = \{\gamma_{ij}\} \in M_{n,m}$. Элемент $\gamma_{ij} = 1$, если $(i,j) \in \mathcal{E}$. Остальные элементы равны нулю.
- Будем обозначать через d_l^I (d_l^J) степень вершины $l \in I$ $(l \in J)$ в графе G. В случаях, когда из контекста понятно, какому множеству принадлежит вершина l, верхний индекс будет опускаться.
- D_I — диагональная матрица размером $n \times n$ с d_i $(i \in I)$ в i-й строке; D_J — диагональная матрица размером $m \times m$ с d_j $(j \in J)$ в j-й строке.
- При $a \neq 0$ обозначим $\varepsilon = \frac{b}{a}$ и $\Delta = E + \varepsilon\left(D_J - \Gamma^T D_I^{-1}\Gamma\right)$.

Докажем несколько утверждений, касающихся свойств матрицы Δ. Для этого нам потребуются следующие известные теоремы матричного анализа.

Теорема 1 [8]. *Пусть $A \in M_n$ — неотрицательная матрица. Справедливы следующие неравенства:*

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq r(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij},$$

$$\min_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq r(A) \leq \max_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Теорема 2 [8]. *Пусть A и B — эрмитовы матрицы, и собственные числа $\lambda_l(A)$, $\lambda_l(B)$ и $\lambda_l(A+B)$ упорядочены по возрастанию. Тогда для любого $k = 1, \ldots, n$ верны неравенства*

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B).$$

Теорема 3 [8]. *Пусть $A \in M_{n,m}$. Тогда $AA^T \in M_n$ — эрмитова положительно полуопределенная матрица,* $\operatorname{rank}(AA^T) = \operatorname{rank}(A)$.

Лемма 1. *Матрица Δ обладает следующими свойствами:*

1) *матрица Δ симметрична: $\Delta^T = \Delta$;*

2) *при выполнении условия $\varepsilon \cdot \max\limits_{j\in J} d_j > -1$ матрица Δ невырождена;*

3) *при выполнении условия $|\varepsilon \cdot \max\limits_{j\in J} d_j| < 1$ матрица Δ обратима и*

$$\Delta^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma - D_J\right)^k. \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно, докажем второе.

Рассмотрим матрицу $\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma \in M_m$. Понятно, что имеет место равенство: $\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma = \left(D_I^{-1/2}\Gamma\right)^T \cdot \left(D_I^{-1/2}\Gamma\right)$. Согласно теореме 3, матрица является положительно полуопределенной.

Пусть выполняются неравенства $0 > \varepsilon > -1/(\max\limits_{j\in J} d_j)$. В этом случае матрица $-\varepsilon\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma$ также будет положительно полуопределенной, а матрица $E + \varepsilon D_J$ — строго положительно определенной. Их сумма строго положительно определенная, и потому невырожденная матрица.

Пусть $\varepsilon > 0$. Покажем, что в этом случае матрица Δ обладает свойством диагонального преобладания. Из этого будет следовать ее невырожденность. По определению, элементы матрицы Δ имеют вид

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 1 + \varepsilon d_i^J - \varepsilon \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}}{d_l^I}, & i = j, \\ -\varepsilon \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}\gamma_{lj}}{d_l^I}, & i \neq j. \end{cases}$$

Заметим, что верно равенство $\gamma_{ij}^2 = \gamma_{ij}$, $(i,j) \in \mathcal{E}$. Также $\frac{\gamma_{li}}{d_l^I} \le \gamma_{li}$. Следовательно, $\sum\limits_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}}{d_l^I} \le \sum\limits_{l=1}^{n} \gamma_{li} = d_i^J$, и все диагональные элементы матрицы Δ положительны. Все внедиагональные элементы отрицательны. Вычислим сумму модулей внедиагональных элементов строки i:

$$\begin{aligned} \sum_{j\neq i} |\Delta_{ij}| &= \sum_{j\neq i} \left| -\varepsilon \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}\gamma_{lj}}{d_l^I} \right| = \varepsilon \sum_{j\neq i} \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}\gamma_{lj}}{d_l^I} = \varepsilon \Big(\sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}\gamma_{lj}}{d_l^I} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}}{d_l^I} \Big) = \\ &= \varepsilon \Big(\sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}}{d_l^I} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{lj} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}}{d_l^I} \Big) = \varepsilon \Big(\sum_{l=1}^{n} \gamma_{li} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}}{d_l^I} \Big) = \varepsilon \Big(d_i^J - \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}}{d_l^I} \Big). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$1 + \varepsilon \Big(d_i^J - \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}}{d_l^I} \Big) > \varepsilon \Big(d_i^J - \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{li}}{d_l^I} \Big),$$

и, следовательно,

$$|\Delta_{ii}| > \sum_{j\neq i} |\Delta_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, матрица Δ обладает свойством диагонального преобладания.

Докажем третий пункт леммы. Заметим, что матрица $\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma - D_J$ эрмитова, и, следовательно, все ее собственные числа вещественны. Оценим спектральный радиус этой матрицы.

Как показано ранее, матрица $\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma$ положительно полуопределена. Следовательно, ее спектр состоит из вещественных неотрицательных чисел, и для минимального собственного числа верна оценка $\lambda_1(\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma) \geq 0$. Получим оценку для максимального собственного числа $\lambda_m(\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma)$.

Введем обозначения $d_{\max} = \max\limits_{j\in J} d_j$; $d_{\min} = \min\limits_{j\in J} d_j$. Заметим, что матрица Γ обладает следующим свойством: сумма элементов строки i равна d_i $(i \in I)$, сумма элементов столбца j равна d_j $(j \in J)$. Другими словами, верны равенства $\Gamma I_m = D_I I_n$ и $\Gamma^T I_n = D_J I_m$. Следовательно, $\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma I_m = \Gamma^T I_n = D_J I_m$. Таким образом, согласно теореме 1, верно неравенство $r(\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma) \leq d_{\max}$. Так как все собственные числа этой матрицы вещественны и неотрицательны, $\lambda_m(\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma) \leq d_{\max}$.

Очевидно, что $\lambda_1(D_J) = d_{\min}$, $\lambda_m(D_J) = d_{\max}$. Согласно теореме 2, верны неравенства

$$\lambda_1(\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma - D_J) \geq -d_{\max},\ \lambda_m(\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma - D_J) \leq d_{\max} - d_{\min}.$$

Таким образом, $r\left(\varepsilon\left(\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma - D_J\right)\right) \leq |\varepsilon d_{\max}|$, и при выполнении неравенства $|\varepsilon d_{\max}| < 1$ матрица Δ^{-1} представима в виде суммы ряда (3). □

1.1. ***Поиск равновесного состояния***

Если $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = ax_{ij} + b\hat{X}_j$, то условия равновесия (1)–(2) принимают вид системы линейных уравнений размерностью $|\mathcal{E}| + n$:

$$\begin{cases} ax_{ij} + b\hat{X}_j = c_i, & i \in I, j \in V_i; \\ \sum\limits_{j\in V_i} x_{ij} = q_i, & i \in I. \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что при $a = 0$ система (4), вообще говоря, вырождена. Действительно, в этом случае уравнения первой группы принимают вид $b\hat{X}_j = c_i$ для всех $(i, j) \in A$. В силу связности графа G из этого следует, что величины c_i и $\hat{X}_j$ одинаковы для всех вершин соответствующих долей графа: $c_i = c$ для всех $i \in I$ и $\hat{X}_j = \hat{X}$ для всех $j \in J$. Найдем значение $\hat{X}$. Согласно (2) и определению величины $\hat{X}_j$ верна цепочка равенств

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \hat{X}_j = m\hat{X}.$$

Таким образом, $\hat{X}_j = \sum\limits_{i\in V_j} x_{ij} = Q/m$ $(j \in J)$, $c_i = bQ/m$ $(i \in I)$, и система (4) принимает вид

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in V_j} x_{ij} = \frac{Q}{m}, & j \in J; \\ \sum\limits_{j\in V_i} x_{ij} = q_i, & i \in I. \end{cases} \tag{5}$$

Несложно убедиться, что эта система совместна при любых значениях q_i $(i \in I)$. Матрицей этой системы является матрица инциденций графа G, и ее ранг равен $(m+n-1)$ [9].

Таким образом, в случае, если граф G содержит $m+n-1$ ребро (т. е. является деревом), у системы S имеется единственное равновесное состояние, определяемое решением системы (5). В противном случае множество равновесных состояний образует линейное многообразие размерности $|\mathcal{E}|-(m+n-1)$.

В дальнейшем предполагается, что $a \neq 0$. Найдем достаточные условия существования равновесия.

Рассмотрим систему (4). Зафиксируем $j \in J$, и просуммируем уравнения первой группы по всем $l \in V_j$:

$$\sum_{l=1}^{n} c_l \gamma_{lj} = \sum_{l \in V_j} c_l = a \sum_{l \in V_j} x_{lj} + b \sum_{l \in V_j} \hat{X}_j = a\hat{X}_j + bd_j^J \hat{X}_j = (a+bd_j^J)\hat{X}_j.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{a}\sum_{l=1}^{n} c_l \gamma_{lj} = (1+\varepsilon d_j)\hat{X}_j, \quad j \in J. \tag{6}$$

Просуммируем уравнения первой группы системы (4) по всем $j \in V_i$:

$$c_i d_i^I = \sum_{j=1}^{m} c_i \gamma_{ij} = a \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\gamma_{ij} + b \sum_{j=1}^{n} \hat{X}_j \gamma_{ij} = aq_i + b(\hat{X}\Gamma^T)_i.$$

Следовательно,

$$\frac{c_i}{a} = \frac{q_i}{d_i} + \frac{\varepsilon}{d_i}(\hat{X}\Gamma^T)_i, \quad i \in I. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получаем:

$$(1+\varepsilon d_j^J)\hat{X}_j = \sum_{l=1}^{n} \frac{c_l}{a}\gamma_{lj} = \sum_{l=1}^{n} \frac{q_l}{d_l^I}\gamma_{lj} + \varepsilon \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_{lj}}{d_l^I}(\hat{X}\Gamma^T)_l = (qD_I^{-1}\Gamma)_j + \varepsilon(\hat{X}\Gamma^T D_I^{-1}\Gamma)_j,$$

или, в векторном виде:

$$\hat{X}(E+\varepsilon(D_J - \Gamma^T D_I^{-1}\Gamma)) = qD_I^{-1}\Gamma. \tag{8}$$

В случае, если матрица $\Delta = E + \varepsilon(D_J - \Gamma^T D_I^{-1}\Gamma)$ обратима, система (8) имеет единственное решение, из которого с помощью (6) легко получить равновесное состояние:

$$x_{ij} = \frac{q_i}{d_i} + \varepsilon q D_I^{-1}\Gamma \left(E + \varepsilon(D_J - \Gamma^T D_I^{-1}\Gamma)\right)^{-1} \left(\Gamma^T \frac{e_i}{d_i} - e_j\right). \tag{9}$$

Согласно лемме 1, достаточным условием обратимости матрицы Δ является выполнение неравенства $\varepsilon > -\frac{1}{\max\limits_{j \in J} d_j}$.

Подводя итог, сформулируем основной результат этого раздела.

Теорема 4. *Для системы $S1 = S(G, q, \{c_{ij}\})$ с оценивающими функциями $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = ax_{ij} + b\hat{X}_j$, представленной двудольным связным графом G, верны следующие утверждения.*

1) *В случае, когда $a = 0$, у S существуют равновесные состояния, определяемые из решения системы (5). Если граф G — дерево, то равновесное состояние единственно. В противном случае множество равновесных состояний образует линейное многообразие размерностью $|\mathcal{E}|-(m+n-1)$.*

2) *Если $a \neq 0$ и матрица Δ не вырождена, у системы S существует единственное равновесное состояние, определяемое из соотношений (9). Достаточным условием обратимости матрицы Δ является выполнение неравенства $\varepsilon \cdot \max\limits_{j \in J} d_j > -1$, причем если $|\varepsilon \cdot \max\limits_{j \in J} d_j| < 1$, для вычисления Δ^{-1} можно воспользоваться выражением (3).*

2. Специальные модели

Самостоятельный интерес представляют распределенные системы, моделируемые следующим графом: $G_0 = (I \cup J, \mathcal{E})$, $I = \{1, \dots, n\}$, $J = \{1, \dots, n+1\}$ и ребро $(i, j) \in \mathcal{E}$ в том и только том случае, если $j = i$ или $j = n + 1$ $(i = 1, \dots, n)$.

Каждый агент $i \in I$ распределяет свой ресурс между двумя доступными ему полями: «внутренним» полем i (на котором присутствует только он один) и «внешним» полем $n + 1$ (к которому имеют доступ все агенты системы). Как и ранее, под *состоянием* элемента i будем понимать распределение ресурсов $(x_{i,i}, x_{i,n+1})$, удовлетворяющее равенству

$$x_{i,i} + x_{i,n+1} = q_i.$$

Состояние системы определяется распределениями ресурсов агентов и задается матрицей

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,2} & \dots & x_{n,n} \\ x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \dots & x_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

Как и ранее, полагаем, что агенты распределяют имеющийся у них ресурс между доступными им полями, оценивая эффект от своего вклада с помощью известных линейных оценивающих функций, и ищется такое распределение ресурсов, которое обеспечивало бы равную «полезность» на обоих полях.

В этом разделе рассматривается система $S2 = S(G_0, q, \{c_{ij}\})$ с оценивающими функциями вида $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = a_j x_{ij} + b_j \hat{X}_j$ $(i \in I, j \in \{i, n+1\})$. Сформулированы достаточные условия существования равновесного состояния, и получены аналитические выражения для его вычисления.

Рассмотрен также частный случай, в котором величины a_j и b_j связаны следующими соотношениями: $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \dots = a_n + b_n$. Указаны необходимые и достаточные условия существования равновесия.

Также рассмотрена система $S3 = S(G_0, q, \{c_{ij}\})$ с оценивающими функционалами более общего вида: $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = a_j x_{ij} + b_j \hat{X}_j + f_{ij}$. Показано, что для нее верны все выводы, сделанные для $S2$.

2.1. *Анализ системы S2*

Для анализа модели удобно произвести переобозначение: положим $\alpha_j = a_j + b_j$ $(j = 1, \dots, n)$, $\beta = b_{n+1}$. Оценивающие функции агентов принимают следующий вид:

$$\begin{cases} c_{i,i}(X) = \alpha_i x_{i,i} \\ c_{i,n+1}(X) = \alpha_{n+1} x_{i,n+1} + \beta \sum\limits_{j \neq i} x_{j,n+1} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Условия равновесия (1)–(2) в данном случае переписываются в виде системы уравнений:

$$(\alpha_i + \alpha_{n+1})x_{i,n+1} + \beta \sum_{j \neq i} x_{j,n+1} = \alpha_i q_i, \ i = 1, \ldots, n. \qquad (10)$$

Обозначим через A матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_{n+1} & \beta & \beta & \ldots & \beta \\ \beta & \alpha_2 + \alpha_{n+1} & \beta & \ldots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha_3 + \alpha_{n+1} & \ldots & \beta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta & \beta & \beta & \ldots & \alpha_n + \alpha_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Для определителя матрицы A верно следующее выражение:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta) + \beta \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (\alpha_j + \alpha_{n+1} - \beta). \qquad (11)$$

Найдем условия, при которых система (10) вырождена.

Утверждение 1. *Для вырожденности системы* (10) *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

1) *все члены последовательности* $\{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta | i = 1, \ldots, n\}$ *не равны нулю, и*

$$1 + \beta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta} = 0;$$

2) *по крайней мере два члена последовательности* $\{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta | i = 1, \ldots, n\}$ *равны нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то соотношение (11) переписывается в следующем виде:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta) \cdot \left[1 + \beta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta}\right].$$

В этом случае определитель равен нулю, только если равно нулю выражение в квадратных скобках.

Предположим теперь, что $\alpha_1 + \alpha_{n+1} - \beta = 0$. Тогда $\det(A) = \beta \prod_{i \geq 2} (\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta)$. Если все величины $\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta \neq 0$ $(i = 2, \ldots, n)$, то определитель не равен нулю. Следовательно, для того чтобы система (10) была вырождена, необходимо, чтобы в последовательности $\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta$ $(i = 1, \ldots, n)$ было по крайней мере два члена, равных нулю. □

Вычислим равновесное состояние системы $S2$. В случае, если $\det(A) \neq 0$, существует единственное равновесное состояние, определяемое из решения системы (10). Предположим, что $\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$\begin{cases} x_{i,n+1} = \dfrac{\alpha_i q_i \left(1 + \beta \sum\limits_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_j + \alpha_{n+1} - \beta}\right) + \beta \sum\limits_{j \neq i} \frac{\alpha_j q_j}{\alpha_j + \alpha_{n+1} - \beta}}{(\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta)\left(1 + \beta \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j + \alpha_{n+1} - \beta}\right)}; \\ x_{i,i} = q_i - x_{i,n+1}, \ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Пусть теперь $\alpha_i+\alpha_{n+1}-\beta=0$ и $\alpha_j+\alpha_{n+1}-\beta\neq 0$ при $j\neq i$. В этом случае равновесное распределение ресурсов определяется следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x_{i,n+1}=\frac{\alpha_i q_i}{\alpha_i+\alpha_{n+1}}+\sum\limits_{l\neq i}\frac{\alpha_i q_i+\alpha_l q_l}{\alpha_l-\alpha_i};\\ x_{j,n+1}=\frac{\alpha_i q_i+\alpha_j q_j}{\alpha_i-\alpha_j},\ j\neq i;\\ x_{j,j}=q_j-x_{j,n+1},\ j=1,\ldots,n.\end{cases}$$

Рассмотрим случаи, когда система вырождена.

Случай 1. Пусть $\alpha_i+\alpha_{n+1}-\beta=0$ для $i=1,\ldots,l$ $(l\geq 2)$. Рассмотрим расширенную матрицу системы (10):

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \alpha_1+\alpha_{n+1} & \beta & \ldots & \beta & \beta & \ldots & \beta & \alpha_1 q_1\\ \beta & \alpha_2+\alpha_{n+1} & \ldots & \beta & \beta & \ldots & \beta & \alpha_2 q_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \beta & \beta & \ldots & \alpha_l+\alpha_{n+1} & \beta & \ldots & \beta & \alpha_l q_l\\ \beta & \beta & \ldots & \beta & \alpha_{l+1}+\alpha_{n+1} & \ldots & \beta & \alpha_{l+1}q_{l+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \beta & \beta & \ldots & \beta & \beta & \ldots & \alpha_n+\alpha_{n+1} & \alpha_n q_n \end{array}\right).$$

Вычитая последнюю строку из каждой строки матрицы, приводим матрицу к следующему виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \beta-\alpha_n-\alpha_{n+1} & \alpha_1 q_1-\alpha_n q_n\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \beta-\alpha_n-\alpha_{n+1} & \alpha_2 q_2-\alpha_n q_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \beta-\alpha_n-\alpha_{n+1} & \alpha_l q_l-\alpha_n q_n\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{l+1}+\alpha_{n+1}-\beta & \ldots & \beta-\alpha_n-\alpha_{n+1} & \alpha_{l+1}q_{l+1}-\alpha_n q_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \beta & \beta & \ldots & \beta & \beta & \ldots & \alpha_n+\alpha_{n+1} & \alpha_n q_n \end{array}\right).$$

Первые l уравнений системы принимают вид $(\beta-\alpha_n-\alpha_{n+1})x_{nn+1}=\alpha_i q_i-\alpha_n q_n$. Левая часть уравнения не зависит от i, следовательно, решение существует только в том случае, если выполнено условие $\alpha_1 q_1=\alpha_2 q_2=\cdots=\alpha_l q_l$. При этом $x_{nn+1}=\frac{\alpha_1 q_1-\alpha_n q_n}{\alpha_1-\alpha_n}$.

Решая уравнения с номерами $i=l+1,\ldots,n-1$, получаем $x_{in+1}=\frac{\alpha_i q_i-\alpha_1 q_1}{\alpha_i-\alpha_1}$. Из последнего уравнения получаем следующее соотношение для переменных $x_{1n+1},\ldots,x_{ln+1}$:

$$\sum_{i=1}^{l}x_{in+1}+\sum_{i=l+1}^{n}\frac{\alpha_i q_i-\alpha_1 q_1}{\alpha_i-\alpha_1}=\frac{\alpha_1 q_1}{\alpha_1+\alpha_{n+1}}.$$

Случай 2. Пусть $\alpha_i+\alpha_{n+1}-\beta\neq 0$ при $i=1,\ldots,n$, и $1+\beta\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i+\alpha_{n+1}-\beta}=0$.

В этом случае расширенная матрица системы (10) эквивалентными преобразованиями приводится к следующему виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \nu_1 & 0 & \ldots & 0 & \beta-\alpha_n-\alpha_{n+1} & \alpha_1 q_1-\alpha_n q_n\\ 0 & \nu_2 & \ldots & 0 & \beta-\alpha_n-\alpha_{n+1} & \alpha_2 q_2-\alpha_n q_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \nu_{n-1} & \beta-\alpha_n-\alpha_{n+1} & \alpha_{n-1}q_{n-1}-\alpha_n q_n\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \nu_n\left(1+\beta\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\nu_i}\right) & \alpha_n q_n\left(1+\beta\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\nu_i}\right)-\beta\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i q_i}{\nu_i} \end{array}\right),$$

где $\nu_i = \alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta$. Ранг матрицы равен $n-1$, и решение существует только при выполнении условия

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i q_i}{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta} = 0.$$

Принимая компоненту решения x_{nn+1} за параметр, находим равновесное состояние:

$$\begin{cases} x_{nn+1} = t, & t \in R; \\ x_{in+1} = \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1} - \beta}{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta} t + \frac{\alpha_i q_i - \alpha_n q_n}{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta}, & i = 1, \dots, n-1; \\ x_{ii} = q_i - x_{in+1}, & i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Таким образом, для системы $S2$ верна следующая теорема.

Теорема 5. *Для системы $S2$ выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть все члены последовательности $\{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta \mid i = 1, \dots, n\}$ отличны от нуля, и $1 + \beta \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta} \neq 0$. Тогда при любом векторе потенциалов q у системы $S2$ существует единственное равновесное состояние, определяемое соотношениями*

$$\begin{cases} x_{i,n+1} = \dfrac{\tilde{q}_i \left(1 + \beta \sum\limits_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_j + \alpha_{n+1} - \beta}\right) + \beta \sum\limits_{j \neq i} \frac{\tilde{q}_j}{\alpha_j + \alpha_{n+1} - \beta}}{(\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta)\left(1 + \beta \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j + \alpha_{n+1} - \beta}\right)}; \\ x_{i,i} = q_i - x_{i,n+1}, & i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

2) *Пусть для некоторого номера i выполняются условия $\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta = 0$ и $\alpha_j + \alpha_{n+1} - \beta \neq 0$ при $j \neq i$. Тогда при любом векторе потенциалов q у системы $S2$ существует единственное равновесное состояние, определяемое соотношениями*

$$\begin{cases} x_{i,n+1} = \frac{\tilde{q}_i}{\alpha_i + \alpha_{n+1}} + \sum\limits_{l \neq i} \frac{\tilde{q}_i + \tilde{q}_l}{\alpha_l - \alpha_i}; \\ x_{j,n+1} = \frac{\tilde{q}_i + \tilde{q}_j}{\alpha_i - \alpha_j}, & j \neq i; \\ x_{j,j} = q_j - x_{j,n+1}, & j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

3) *Пусть все члены последовательности $\{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta \mid i = 1, \dots, n\}$ отличны от нуля, и $1 + \beta \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta} = 0$. Тогда для существования равновесия необходимо и достаточно выполнение следующего условия $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\tilde{q}_i}{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta} = 0$. Множество равновесных состояний в этом случае образует однопараметрическое семейство*

$$\begin{cases} x_{n,n+1} = t, & t \in R; \\ x_{i,n+1} = \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1} - \beta}{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta} t + \frac{\tilde{q}_i - \tilde{q}_n}{\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta}, & i = 1, \dots, n-1; \\ x_{i,i} = q_i - x_{i,n+1}, & i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

4) *Пусть $\alpha_i + \alpha_{n+1} - \beta = 0$ для $i = 1, \dots, l$ ($l \geq 2$). В этом случае необходимым и достаточный условием существования равновесия является выполнение равенств*

$\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \cdots = \tilde{q}_l$. *При этом множество равновесных состояний образует* $(l-1)$-*мерное аффинное пространство:*

$$\begin{cases} x_{i,n+1} = t_i, & i \in \{1,\ldots,l-1\},\ t_i \in R; \\ x_{l,n+1} = \frac{\tilde{q}_1}{\alpha_1+\alpha_{n+1}} - \sum\limits_{i=1}^{l-1} t_i - \sum\limits_{i=l+1}^{n} \frac{\tilde{q}_i - \tilde{q}_1}{\alpha_i - \alpha_1}; & \\ x_{i,n+1} = \frac{\tilde{q}_i - \tilde{q}_1}{\alpha_i - \alpha_1}, & i = l+1,\ldots,n; \\ x_{i,i} = q_i - x_{i,n+1}, & i = 1,\ldots,n. \end{cases}$$

Если $a_j = a$, $b_j = b$ для всех $j \in J$, то модель $S2$ представляет собой частный случай рассмотренной ранее модели S. Применяя теорему 4 к этому случаю, получаем следующие достаточные условия существования равновесия: $bn/a > -1$. Однако теорема 5 позволяет сформулировать более сильное утверждение.

Следствие 1. *Пусть в системе* $S2$ *выполняются равенства* $\alpha_i = \alpha$ $(i = 1,\ldots,n)$. *Тогда:*

1) *если* $2\alpha \neq \beta$ *и* $2\alpha \neq (1-n)\beta$, *то при любом векторе ресурсов* q *у системы существует единственное равновесное состояние*

$$\begin{cases} x_{i,n+1} = \frac{\alpha q_i(2\alpha+(n-1)\beta) - \alpha\beta Q}{(2\alpha-\beta)(2\alpha+(n-1)\beta)} \\ x_{i,i} = \frac{q_i(\alpha-\beta)(2\alpha+(n-1)\beta)+\alpha\beta Q}{(2\alpha-\beta)(2\alpha+(n-1)\beta)} \end{cases} \quad i = 1,\ldots,n,$$

где Q *— общий ресурс элементов системы;*

2) *если* $2\alpha = \beta$, *то необходимым и достаточным условием существования равновесия является выполнение равенств* $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = q$. *При выполнении этого условия, у системы существует семейство равновесных состояний, определяемых следующими соотношениями:*

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jn+1} = \frac{q}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ii} = \frac{2n-1}{2} q\,;$$

3) *если* $2\alpha = (1-n)\beta$, *то при условии* $q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n = 0$ *существует однопараметрическое семейство равновесных состояний*

$$\begin{cases} x_{n,n+1} = t,\ x_{n,n} = q_n - t, & \\ x_{i,n+1} = t + \frac{2n-1}{2n}(q_i - q_n), & i = 1,\ldots,n-1, \\ x_{i,i} = -t + \frac{1}{2n}((n+1)q_i + (n-1)q_n), & \end{cases}$$

где t *— произвольное число.*

2.2. *Система S3*

Также теорема 5 позволяет проанализировать систему с более сложными оценивающими функциями. Рассмотрим систему $S3$, в которой оценочные функции агентов зависят от поля, на которое выделяется ресурс, а также содержат дополнительные «надбавки» (или «штрафы»), не зависящие от количества выделенного ресурса: $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = a_j x_{ij} + b_j \hat{X}_j + f_{ij}$ $(i \in I, j \in \{i, n+1\})$.

Как и ранее, произведем переобозначение: положим $\alpha_j = a_j + b_j$ $(j = 1, \ldots, n+1)$, $\beta = b_{n+1}$. Оценивающие функции агентов принимают следующий вид:

$$\begin{cases} c_{i,i}(X) = \alpha_i x_{ii} + f_{i,i} \\ c_{i,n+1}(X) = \alpha_{n+1} x_{i,n+1} + \beta \sum\limits_{j \neq i} x_{j,n+1} + f_{i,n+1} \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Условия равновесия (1)–(2) переписываются в виде

$$(\alpha_i + \alpha_{n+1}) x_{i,n+1} + \beta \sum_{j \neq i} x_{j,n+1} = \alpha_i q_i - f_{i,n+1} + f_{i,i}, \ i = 1, \ldots, n. \qquad (12)$$

Видим, что (12) отличаются от (11) только правой частью. Следовательно, для системы $S3$ верны все выводы, сделанные ранее для системы $S2$.

Следствие 2. *Для системы* $S3 = S(G_0, q, \{c_{ij}\})$ *с оценивающими функциями вида* $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = a_j x_{ij} + b_j \hat{X}_j + f_{ij}$ $(i \in I, j \in \{i, n+1\})$ *верны все утверждения теоремы* 5. *Для вычисления равновесных состояний можно воспользоваться соотношениями теоремы* 5, *положив* $\tilde{q}_i = \alpha_i q_i - f_{i,n+1} + f_{i,i}$.

3. Сложность задач о существовании равновесия

Одной из особенностей рассмотренной выше модели является отсутствие ограничений на знаки и целочисленность компонент распределения ресурсов: распределение с $x_{ij} < 0$ для некоторого $(i, j) \in \mathcal{E}$ является допустимым. Это делает задачу поиска равновесия в системе с линейными функциями полиномиально разрешимой и позволяет использовать алгебраический подход для ее решения, хотя и сужает область возможных приложений модели. При добавлении этих ограничений, вопрос о существовании равновесных распределений становится NP-полной задачей уже в случае простейших линейных оценивающих функций.

Задача I. *Даны двудольный граф* $G = (I \cup J, \mathcal{E})$, *множество неотрицательных чисел* $q_1, \ldots, q_{|I|}$ *и семейство линейных функций* $c_{ij}(x, y)$, $(i, j) \in \mathcal{E}$. *Спрашивается, существует ли в системе* $S(G, q, \{c_{ij}\})$ *равновесное распределение ресурсов с неотрицательными целочисленными компонентами.*

Теорема 6. *Задача I является* NP*-полной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сведем задачу о трехмерном сочетании, которая формулируется следующим образом.

Задача 3DM: *Заданы* A, B, C — *непересекающиеся множества мощностью* t *и* $D \subseteq A \times B \times C$, $|D| = n$. *Без ограничения общности полагаем, что* $n > t$. *Спрашивается, существует ли* $D' \subseteq D$ *такое, что* $|D'| = t$, *и каждый элемент из* $A \cup B \cup C$ *входит ровно в одну тройку из* D'?

Задача $3DM$ является NP-полной в сильном смысле [10]. По данным задачи о трехмерном сочетании построим систему S со следующими параметрами.

- $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 = \{1, \ldots, n\}$, $I_2 = \{n+1, \ldots, 2n\}$. Будем отождествлять элементы множества I_1 с тройками из множества D.

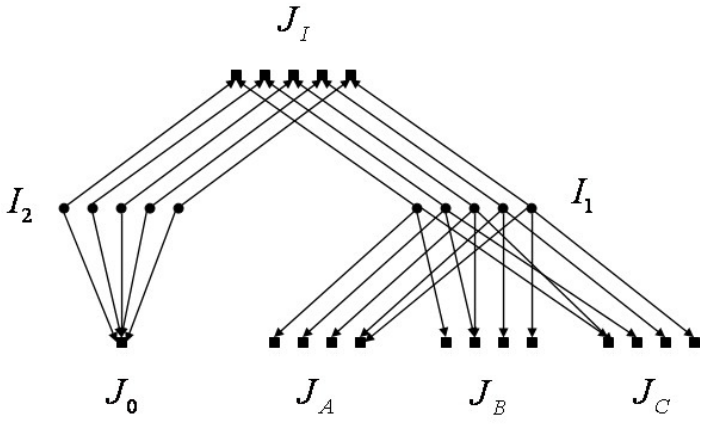

Иллюстрация к доказательству теоремы 6

- $J = J_A \cup J_B \cup J_C \cup J_I \cup J_0$. $J_0 = \{0\}$, $J_I = \{1, \ldots, n\}$, $J_A = \{n+1, \ldots, n+t\}$, $J_B = \{n+t+1, \ldots, n+2t\}$, $J_C = \{n+2t+1, \ldots, n+3t\}$. Полям из множеств J_A, J_B и J_C будем ставить в соответствие элементы множеств A, B и C.

- Ребро $(i,j) \in \mathcal{E}$, если:

  – $i \in I_1$, $j \in J_A \cup J_B \cup J_C$ и элемент j входит в тройку i;

  – $i \in I_2$ и $j = 0$;

  – $i \in I_1$ и $j = i \in J_I$;

  – $i \in I_2$, $j = i - n \in J_I$

  (пример графа изображен на рисунке).

- $q_i = 3$ при $i \in I_1$ и $q_i = 1$ для всех $i \in I_2$.

- Функции $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j)$, $(i,j) \in \mathcal{E}$, имеют вид

$$c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = \begin{cases} \hat{X}_j, & \text{при } i \in I_1, j \in J_A \cup J_B \cup J_C; \\ \frac{\hat{X}_j}{n-t}, & \text{при } i \in I_2, j = 0; \\ \frac{2x_{ij}}{3} + \frac{\hat{X}_j}{3}, & \text{при } i \in I_2, j \in J_I; \\ -\frac{2x_{ij}}{3} + \hat{X}_j, & \text{при } i \in I_1, j \in J_I \end{cases}$$

Пусть существует $D' \subseteq D$ — трехмерное сочетание в D, $|D'| = t$. Ему соответствует подмножество агентов $I' \subseteq I_1$. Рассмотрим следующее распределение ресурсов:

- $i \in I'$: $x_{ij} = 1$ для $j \in V_i \backslash \{i\}$, и $x_{ii} = 0$;

- $i \in I_1 \backslash I'$: $x_{i,i} = 3$, $x_{ij} = 0$ для $j \in V_i \backslash \{i\}$;

- $i \in I_2$, и вершина $i - n \in I'$: $x_{i,0} = 0$, $x_{i,i-n} = 1$;

- $i \in I_2$, и вершина $i - n \notin I'$: $x_{i,0} = 1$, $x_{i,i-n} = 0$.

Очевидно, это распределение допустимо. Кроме того, оно является равновесным. Действительно, так как D' — трехмерное сочетание, то каждое поле из $J_A \cup J_B \cup J_C$ смежно с одной и только одной вершиной из I'. Вершины из $I_1 \backslash I'$ не выделяют ресурса на эти поля. Таким образом, на каждом из этих полей $\hat{X}_j = 1$, и, следовательно, $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = 1$ для всех $i \in I_1$ и $j \in J_A \cup J_B \cup J_C$.

Рассмотрим поле из множества J_I. Если оно смежно с вершиной $i \in I'$, то $x_{i,i} = 0$, $x_{i+n,i} = 1$ и $\hat{X}_i = 1$. Следовательно, $c_{i,i}(x_{i,i}, \hat{X}_i) = 1$ и $c_{i+n,i}(x_{i+n,i}, \hat{X}_i) = 1$.

Пусть теперь поле $i \in J_I$ смежно с вершиной $i \in I \backslash I'$. В этом случае $x_{i,i} = 3$, $x_{i+n,i} = 0$ и $\hat{X}_i = 3$. Следовательно, $c_{i,i}(x_{i,i}, \hat{X}_i) = c_{i+n,i}(x_{i+n,i}, \hat{X}_i) = 1$.

Так как $|D'| = |I'| = t$, то количество вершин из I_2, выделяющих свой ресурс на поле 0, равно $n - t$. Следовательно, $c_{i0}(x_{i0}, \hat{X}_0) = 1$ для всех $i \in I_2$. Таким образом, $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = 1$ для всех $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Предположим обратное: пусть существует равновесное распределение ресурсов, компоненты которого неотрицательные целые числа. Покажем, что в этом случае в D существует трехмерное сочетание.

Заметим, что на полях из множества J_I значения оценивающих функционалов смежных с ними вершин совпадают: $c_{i,i}(x_{i,i}, \hat{X}_i) = c_{i+n,i}(x_{i+n,i}, \hat{X}_i) = \frac{x_{i,i}}{3} + x_{i+n,i}$. Выберем произвольный $j \in J_A \cup J_B \cup J_C$ и $i \in V_j$. Верна цепочка равенств

$$c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = c_{i,i}(x_{i,i}, \hat{X}_i) = c_{i+n,i}(x_{i+n,i}, \hat{X}_i) = c_{i+n,0}(x_{i+n,0}, \hat{X}_0).$$

Следовательно, в равновесном распределении ресурса значения функционалов на всех ребрах совпадают и равны $\hat{X}_0/(n - t)$. Кроме того, для всех $j \in J_A \cup J_B \cup J_C$ имеем $\hat{X}_j = \hat{X}_0/(n-t)$. Вычислим значение функционалов. Для этого просуммируем $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j)$ по всем ребрам графа:

$$\frac{6n\hat{X}_0}{n-t} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) = \sum_{i\in I_1} \sum_{j\in V_i\backslash\{i\}} \hat{X}_j + \sum_{i\in I_2} \frac{\hat{X}_0}{n-t} + 2\sum_{i\in I_1} \left(\frac{x_{i,i}}{3} + x_{i+n,i}\right) =$$
$$= \frac{3n\hat{X}_0}{n-t} + \frac{n\hat{X}_0}{n-t} + 2\sum_{i\in I_1} \left[1 - \frac{1}{3} \sum_{j\in V_i\backslash\{i\}} x_{ij} + (1 - x_{i+n,0})\right] =$$
$$= \frac{4n\hat{X}_0}{n-t} + 4n - \frac{2}{3} \cdot \frac{3t\hat{X}_0}{n-t} - 2\hat{X}_0 = \frac{2n\hat{X}_0}{n-t} + 4n.$$

Таким образом, $\hat{X}_0 = n - t$, и значения оценивающих функций на всех ребрах равны 1. Также $\hat{X}_j = 1$ для всех $j \in J_A \cup J_B \cup J_C$. Так как компоненты распределений каждого агента — неотрицательные целые числа, то ровно t агентов из множества I_2 выделяют по единице ресурса на поля из множества J_I. Обозначим множество этих полей через J', а множество смежных с ними агентов из I_1 через $I' \subseteq I_1$, $|I'| = t$.

Функция $c_{i,i}(x_{i,i}, \hat{X}_i) = \frac{x_{i,i}}{3} + x_{i+n,i}$ может принимать значение 1 только в одном из двух случаев: если $x_{i,i} = 3$, $x_{i+n,i} = 0$, или $x_{i,i} = 0$, $x_{i+n,i} = 1$. Следовательно, для $j \in J_A \cup J_B \cup J_C$ $x_{ij} \neq 0$ в том и только том случае, если $i \in I'$. Кроме того, так как $\hat{X}_j = 1$ для всех $j \in J_A \cup J_B \cup J_C$, то каждое поле из этого множества должно быть смежно с одной из вершин I', причем только с одной. Иными словами, I' определяет трехмерное сочетание. □

Заметим, что при отсутствии ограничений на целочисленность компонент равновесного распределения задача I представляет собой частный случай задачи линейного программирования и может быть решена за полиномиальное время. Однако вопрос о существовании равновесного распределения в системе с нелинейными оценивающими функциями является сложной задачей, даже когда компоненты распределения могут принимать вещественные значения.

ЗАДАЧА II. *Даны двудольный граф $G = (I \cup J, \mathcal{E})$, множество неотрицательных чисел $q_1, \ldots, q_{|I|}$ и семейство функций $c_{ij}(x, y)$, $(i, j) \in \mathcal{E}$. Спрашивается, существует ли в системе $S(G, q, \{c_{ij}\})$ равновесное распределение ресурсов.*

Следствие 3. *Задача II NP-полна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно изменить некоторые функции в доказательстве теоремы 6. Например, положить $c_{i,i}(x_{i,i}, \hat{X}_i) = (x_{i,i} - 3)(\hat{X}_i - x_{i,i} - 1) + 1$ $(i \in I_1)$ и $c_{i,i-n}(x_{i,i-n}, \hat{X}_{i-n}) = (x_{i,i-n} - 1)(\hat{X}_{i-n} - x_{i,i-n} - 3) + 1$ $(i \in I_2)$. Несложно убедиться, что в равновесном состоянии значения оценивающих функционалов на всех ребрах снова равны 1, и каждая вершина из I_1 выделяет на поля из J_I либо 0, либо 3 единицы ресурса. Таким образом, сведение остается в силе. □

В случае, когда присутствуют ограничения на знак или целочисленность компонент распределения, вместо стратегии, определяемой (1), естественно рассматривать следующие стратегии поведения агентов $(i \in I)$:

$$\begin{cases} \min\limits_{j \in V_i} c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j) \to \max\limits_{\{x_{ij}\}}, \\ \sum\limits_{j \in V_i} x_{ij} \le q_i, \\ x_{ij} \ge 0, \; j \in V_i. \end{cases}$$

Под равновесным распределением при этом естественно понимать такое распределение X^*, при котором ни один из агентов не может «улучшить» свое состояние, в одностороннем порядке изменив распределение своего ресурса. Для всех $i \in I$ и для любого X_i — допустимого распределения ресурсов агента i, выполняется неравенство

$$\min_{j \in V_i} c_{ij}(x^*_{ij}, \hat{X}^*_j) \;\ge\; \min_{j \in V_i} c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}^*_j - x^*_{ij} + x_{ij}).$$

Иначе говоря, равновесное распределение ресурсов является равновесием по Нэшу в соответствующей игре. Вопрос о существовании равновесия в этой игре тоже является NP-полной проблемой (сведение из теоремы 6 остается в силе после незначительных модификаций). Заметим, что решение задачи (1)–(2) также определяет равновесие по Нэшу.

Заключение

Перечислим основные полученные результаты. Предложена модель коллективных взаимодействий в распределенной сети. Указаны условия существования равновесного распределения ресурсов в терминах топологии сети и соотношений между количествами ресурса у агентов. Предложены формулы вычисления равновесных состояний, трудоемкость вычисления которых не превосходит $O(n^3)$.

Показано, что задача о существовании равновесного распределения с целочисленными компонентами в системе с линейными оценивающими функциями является NP-полной. Также NP-полной является задача о существовании равновесия системе с нелинейными функциями. Предложенный в работе алгебраический подход позволяет с небольшой трудоемкостью производить качественный анализ этих более сложных моделей и может быть использован для нахождения приближенного решения возникающих задач.

Список литературы

1. *Ерзин А. И., Тахонов И. И.* Равновесное распределение ресурсов сетевой модели // Сиб. журн. индустр. мат. 2005. Т. 8, № 3 (23). С. 58–68.

2. *Астраков С. Н., Ерзин А. И.* Одна модель саморегулирующейся системы // Математические структуры и моделирование. 2004. № 13. С. 30–38.

3. *Астраков С. Н., Ерзин А. И.* Моделирование устойчивых взаимоотношений на графах // Материалы 13-й Байкальской школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск, 2005. Т. 1. С. 413–420.

4. *Ерзин А. И., Тахонов И. И.* Задача поиска сбалансированного потока в сети // Сиб. журн. индустр. мат. 2006. Т. 9, № 4 (28). С. 50–63.

5. *Хакими С. Л.* О реализуемости множества целых чисел степенями вершин графа // Кибернетика: Сб. науч. ст. Новая серия. М.: Мир, 1966. Т. 2. С. 40–53.

6. *Макеев С. П.* О реализуемости взвешенных графов с заданными весами вершин // Управляемые системы. Новосибирск, 1993. Т. 13. С. 40–52.

7. *Adamidou E. A., Kornhauser A. L., Koskosidis Y. A.* A Game Theoretic / Network Equilibrium Solution Approach for the Railroad Freight Car Management Problem // Transportation Research. Part B: Methodological. 1993. Vol. 27. No. 3. P. 237–252.

8. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

9. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.

10. *Garey M. R., Johnson D. S.* Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco: W. H. Freeman and Co., 1979.

Материал поступил в редколлегию 02.12.2010

Адреса авторов

АСТРАКОВ Сергей Николаевич
Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН
ул. Акад. Ржанова, 6, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: astrakov90@gmail.com

ТАХОНОВ Иван Иванович
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: takhonov@gmail.com