УДК 517.9

Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ В ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

В работе приводятся новые представления решений и коэффициентов уравнений математической физики, которые являются дифференциально-алгебраическими тождествами. Полученные представления частично использованы при изучении многомерных и одномерных обратных задач.

Ключевые слова: обратные задачи математической физики, аналитические методы решения, параболические уравнения.

Введение

Представление решений и коэффициентов дифференциальных уравнений достаточно широко освещается в математической литературе. К этому направлению относится построение функционально-инвариантных решений гиперболических уравнений [1], аналитические представления решений и коэффициентов параболических уравнений [2], представление решения и коэффициента уравнения Штурма – Лиувилля с применением в обратных задачах теории рассеяния, построение гармонических и других потенциалов для вычисления решений (скорости) и коэффициентов (давления) системы уравнений газовой динамики и др.

В настоящей работе приводятся новые представления решений и коэффициентов параболических уравнений, которые частично использованы при изучении многомерных обратных задач.

Начнем с некоторых пояснений, связанных с параболическими уравнениями.

1. Представления решений и коэффициентов параболических уравнений

В книге [3] для решения $w(x,y,t)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - q(y)w$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-01-00422а), Междисциплинарной интеграционной программы фундаментальных исследований СО РАН (проект № 81), ОМН РАН (проект № 1.3.8), программы фундаментальных исследований СО РАН, выполняемых совместно со сторонними научными организациями (проект № 93), Гранта Министерства образования (проект 3Н-24.10).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 3. С. 20–35

получена формула $w = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(y,\lambda) d\sigma(\lambda)$, где функция $\varphi(y,\lambda)$: $-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + {}$ $+q(y)\varphi = \lambda\varphi$. И эта формула использована для решения обратной задачи — нахождения коэффициента $q(y)$.

Уравнение диффузии, согласно [4], представлено параболическим уравнением

$$\rho(x,t)\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}(p(x,t)\nabla w) - q(x,t)w + F(x,t).$$

При этом уравнение теплопроводности имеет вид

$$c(x,t)\rho(x,t)\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}(k(x,t)\nabla w) + F(x,t),$$

где w — температура; ρ — плотность; c — теплоемкость; k — теплопроводность; F — функция источника.

С учетом переноса параболическое уравнение диффузии с приложениями указано в работе [5]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = V_1\frac{\partial w}{\partial x} + V_2\frac{\partial w}{\partial y} + V_3\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + F(x,y,z,t).$$

Интересная интерпретация решения и коэффициентов параболического уравнения приведена в работе [6]. Так, для уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}(k(x,y)\nabla w) - q(x,y), \ \ (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \ \ t > 0,$$

решение $w(x,y,t)$ и коэффициенты $k(x,y)$, $q(x,y)$ интерпретируются следующим образом: $w(x,y,t)$ — цена товара; $k(x,y)$ — коэффициент товаропроводности; $q(x,y)$ — разность спроса и предложения.

Прикладная направленность, характер приведенных уравнений и представления решений учитываются в непосредственно проверяемых леммах и теоремах работы.

Обозначим через $F_j(z,p)$, $j = 1,2$, фундаментальную систему решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с параметром p, $0 \le p < \infty$,

$$F^{''}(z) + b(z)F^{'}(z) + (pa(z) + c(z))F(z) = 0,$$

где $c(z)$, $b(z)$, $a(z)$ — некоторые мероморфные функции. Пусть $a_{ij}(x)$, $a_j(x)$, $i,j = 1,2,...,n$, $x = (x_1,...,x_n)$ — фиксированные непрерывно-дифференцируемые функции, заданные в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, и функция $\psi(x)$ — решение линейного уравнения

$$L\psi \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{j=1}^n a_j(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j} = 0.$$

Определим функцию $\varphi(x)$ равенством

$$\psi(x) = \int_0^{\varphi(x)} \exp\left(-\int_0^s b(z)dz\right) ds,$$

предполагая ее существование [7]. Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет нелинейному уравнению [7]

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{j=1}^n a_j(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = b(\varphi(x))\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}.$$

Обозначим через $Q(p)$, $R(p)$, $p \in \mathbb{R}$, некоторые интегрируемые и достаточно быстро убывающие на бесконечности функции (например, финитные).

Лемма 1. *Функции* $w(x,t)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$, *определенные формулами*

$$w(x,t) = \int_0^\infty [Q(p)F_1(\varphi(x),p) + R(p)F_2(\varphi(x),p)]\, e^{-pt} dp,$$

$$\lambda(x) = a(\varphi(x)) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}, \;\; \mu(x) = c(\varphi(x)) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j},$$

удовлетворяют эволюционному уравнению первого порядка по переменной t*:*

$$\lambda(x) \frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} + \mu(x) w.$$

Пример 1. Пусть, как и выше, $F_1(y,p)$, $F_2(y,p)$ — фундаментальная система решений уравнения Штурма—Лиувилля $F''(y) = (c(y) - p)F(y)$ с параметром $p \geq 0$, и пусть $u(x) \neq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ — гармоническая функция такая, что $\nabla u(x) \neq 0$. Тогда функция

$$w(x,t) = \int_0^\infty [Q(p)F_1(u(x),p) + R(p)F_2(u(x),p)]\, e^{-pt} dp,$$

удовлетворяет параболическому уравнению $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{1}{|\nabla u|^2} \Delta w - c(u) w.$

Для систем нелинейных уравнений, оказывается, имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* 1) $y \in \mathbb{R}$, $t_0 \leq t \leq t_1$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$; 2) $\varphi = \varphi(x,t)$, $\psi = \psi(x,t) \neq 0$ — *дважды непрерывно дифференцируемые решения системы*

$$\beta\, |\nabla\rho|^2 \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha\Delta\varphi = 0, \;\; \beta\, |\nabla\rho|^2 \frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha\Delta\psi = 0, \;\; \rho = \varphi/\psi;$$

3) $F(y,t) = (F_1, \ldots, F_m)$, $a(y,z) = (a_1, \ldots, a_m)$ — *дважды непрерывно дифференцируемые вектор-функции такие, что*

$$\beta \frac{\partial F}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = a(y, F(y,t)).$$

Тогда вектор-функция $w(x,t) = \psi(x,t) F(\rho(x,t), t)$ *является решением системы нелинейных дифференциальных уравнений*

$$\beta\, |\nabla\rho|^2 \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha\Delta w = \psi\, |\nabla\rho|^2\, a(\rho, w/\psi).$$

В случае независимости вектор-функции F от переменной t имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $y \in \mathbb{R}$, $t_0 \leq t \leq t_1$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, $u = u(x,t)$ — *функция*, $F = (F_1, \ldots, F_m)(y)$, $a = (a_1, \ldots, a_m)(y,z)$ — *вектор-функции, где* $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$. *Если выполнены соотношения*

$$\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = a(y, F(y)), \;\; \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\Delta u = 0$$

для некоторых, вообще говоря, комплекснозначных постоянных α, β, *то вектор-функция* $w(x,t) = F(u(x,t))$ *является решением системы нелинейных многомерных дифференциальных уравнений*

$$\beta\frac{\partial w}{\partial t} + \alpha\Delta w = |\nabla u|^2 a(u(x,t), w).$$

Пример 2. Если $\beta = i\hbar$, $\alpha = \hbar^2/(2m_0)$, $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$, $\psi = 1$, то

$$i\hbar\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta w = |\nabla\varphi|^2 a(\varphi(x,t), w),$$

вообще говоря, есть нелинейная система уравнений Шредингера.

Лемма 4. *Пусть заданы 1)* $V(x,t)$ *— произвольная дважды дифференцируемая функция,* $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $t \in \mathbb{R}$, *причем* $\nabla V \neq 0$; *2) постоянные* B, C *такие, что* $B - CV(x,t) \neq 0$; *3)* $F(y,t)$ *— произвольное решение уравнения*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \ \ y \in \mathbb{R}.$$

Тогда функции $w(x,t)$, $k(x,t)$, $A^i(x,t)$, $i = 1, \dots, n$, *определенные формулами*

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x,t)}F(V(x,t),t), \tag{1}$$

$$k(x,t) = \frac{1}{|\nabla V(x,t)|^2}, \tag{2}$$

$$A^i(x,t) = A^i_0(x,t) - \frac{1}{|\nabla V(x,t)|^2}\left(\frac{2C}{B - CV(x,t)} + \frac{\Delta V(x,t)}{|\nabla V(x,t)|^2} - \frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k(x,t)\Delta w + \sum_{i=1}^n A^i\frac{\partial w}{\partial x_i},$$

где $A^i_0(x,t)$, $i = 1, \dots, n$ *— некоторые функции такие, что* $\displaystyle\sum_{i=1}^n A^i_0\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$.

Замечание 1. К решению $w(x,t)$ можно добавлять $\widetilde{w}(x,t)$ — любое решение уравнения с теми же коэффициентами, т. е.

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x,t)}F(V(x,t),t) + \widetilde{w}(x,t).$$

Такая процедура часто необходима для удовлетворения начально-краевых условий, и мы далее существенно используем это.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы 4, и пусть* $A^i_0(x,t) = 0$, $i = 1, \dots, n$. *Тогда имеет место тождество*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{|\nabla V(x,t)|^2}\Delta w - \frac{1}{|\nabla V(x,t)|^2}\left(\frac{2C}{B - CV(x,t)} + \frac{\Delta V}{|\nabla V(x,t)|^2} - \frac{\partial V}{\partial t}\right)\sum_{i=1}^n\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

где $w(x,t)$ *определено формулой (1).*

Пример 3. Если в тождестве следствия 1 взять $n = 1$, $F(y,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-y_0)^2}{4t}\right)$, $B = 1$, $C = 0$, $V(x,t) = a(t)x + b(t)$, где $a(t)$, $b(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $a(t) \neq 0$, то получаются соотношения, похожие на формулы Колмогорова [2], а именно

$$w(x,t) = F(V(x,t),t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-P(t))^2}{Q(t)}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = C(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (A(t)x + B(t))\frac{\partial w}{\partial x},$$

где $Q(t) = 4ta^2(t)$, $P(t) = \frac{b(t) - y_0}{a(t)}$, $C(t) = \frac{1}{a^2(t)}$, $A(t) = \frac{a'(t)}{a(t)}$, $B(t) = \frac{b'(t)}{a(t)}$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия 1, и пусть функция $V(x,t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{2C}{B-CV} + \frac{\Delta V}{|\nabla V|^2} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0$. Тогда функция $w(x,t)$, определенная формулой (1), удовлетворяет уравнению $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{|\nabla V(x,t)|^2}\Delta w$.*

При $n = 1$ это уравнение имеет вид $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{2C}{B - CV(x)} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big/ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2$. Если определить функции $T(t)$ и $X(x)$ равенствами

$$T(t) = \pm 1/\left(C_1 - 2\alpha Ct\right)^{1/2}, \quad \int \exp\left(\frac{\alpha}{2X^2}\right) dX = C_2 x + C_3,$$

где α, C_1, C_2, C_3 — некоторые константы, то функция $V = \frac{B}{C} - \frac{1}{CT(t)X(x)}$ является его решением.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы 4, и пусть функция $V(x,t)$ является решением уравнения*

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\Delta V}{|\nabla V|^2} + \frac{2C}{B-CV} - \frac{2}{|\nabla V|^4}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j}. \tag{3}$$

Тогда функция $w(x,t)$, определенная формулой (1), удовлетворяет уравнению в дивергентной форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}\left(k(x,t)\nabla w\right),$$

где коэффициент $k(x,t)$ определен формулой (2).

При $n = 1$ уравнение (3) принимает вид $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{2C}{B - CV(x)} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big/ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2$. Если определить функции $T(t)$ и $X(x)$ равенствами

$$T(t) = \pm\left(6\alpha C^2 t + C_1\right)^{3/2}, \quad \int \exp\left(\frac{3\alpha}{2}X^{2/3}\right) dX = C_2 x + C_3,$$

где α, C_1, C_2, C_3 — некоторые константы, то функция $V = \frac{1}{C}\left(B - \sqrt[3]{T(t)X(x)}\right)$ является его решением.

Пусть дифференциальный оператор L определен формулой

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,t),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$ — достаточно гладкие функции от (x,t). Тогда для параболического уравнения

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial w}{\partial t} = Lw, \tag{4}$$

имеет место [8; 9] следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть функции $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$ являются решением нелинейной системы уравнений*

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = L\varphi, \ \ \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} = L\psi, \tag{5}$$

где

$$\frac{1}{\lambda^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right),$$

а $F(y,t)$ — любое решение параболического уравнения $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$. Тогда функция $w(x,t) = \psi F\left(\dfrac{\varphi}{\psi}, t\right)$ удовлетворяет уравнению (4).

Следствие 3. *Если коэффициенты a_{ij}, b_i, c оператора L не зависят от переменной t, то решением нелинейной системы (5) являются функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ такие, что $L\varphi = 0$, $L\psi = 0$. При этом если $\varphi(x) \neq 0$, $\psi(x) \neq 0$, то имеют место формулы*

$$\frac{1}{\lambda^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right), \ \ w(x,t) = \psi F\left(\frac{\varphi}{\psi}, t\right),$$

и поэтому поиск коэффициента $\lambda(x)$ может быть обусловлен краевыми данными для функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Дальнейшее расширение полученных формул возможно, в частности, путем одновременного преобразования координат и решений [10–12]. Приведем общую схему подобных преобразований с учетом начально-краевых условий.

Лемма 7. *Пусть заданы*

1) область $D \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\gamma = \partial D$, ν — единичный вектор нормали границы γ;

2) вектор-функция $v(x)$, осуществляющая диффеоморфное отображение области D на свой образ $v(D) \subset \mathbb{R}^n$;

3) матричнозначная функция $u(x) = (u_{ij}(x))$, $i,j = 1,\dots,m$, $m \geq 1$, $x \in D$, имеющая обратную функцию $u^{-1}(x)$ (в смысле умножения матриц);

4) вектор-функция $G(z)$, $z = (z_1,\dots,z_m)$, осуществляющая диффеоморфное отображение пространства $\mathbb{R}^m$ на себя;

5) некоторая вектор-функция $w_0(x) = (w_{01}(x),\dots,w_{0m}(x))$.

Предположим, что вектор-функция $F(y,t) = (F_1,\dots,F_m)$ является решением эволюционного уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} = L(F), \quad y \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0,$$

и удовлетворяет начальному условию

$$F|_{t=0} = u^{-1}(v^{-1}(y))G(w_0(v^{-1}(y))), \;\; y \in D.$$

Здесь L — некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор.

Тогда неявное решение $w(x,t)$ уравнения

$$G(w(x,t)) = u(x)F(v(x),t) \tag{6}$$

удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = B_G(w)$$

и начальному условию

$$w|_{t=0} = w_0(x), \;\; x \in D,$$

где оператор B_G определяется формулой

$$B_G(w) = \left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^{-1} u(x)L(u^{-1}(x)G(w))$$

$\big(\frac{\partial G}{\partial w}$ — матрица Якоби отображения $G(w)\big)$. При этом если

$$w|_\gamma = \alpha(s,t), \;\; \frac{\partial w}{\partial \nu}|_\gamma = \beta(s,t), \;\; u|_\gamma = 1, \;\; \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\gamma = 0, \;\; v|_\gamma = x, \;\; \frac{\partial v}{\partial \nu}|_\gamma = \nu, \tag{7}$$

то

$$F|_\gamma = G(\alpha(s,t)), \;\; \frac{\partial F}{\partial \nu}|_\gamma = \frac{\partial G}{\partial \alpha}\beta(s,t).$$

Заметим, что если $G(z) = z$, то краевые данные $\alpha(s,t)$, $\beta(s,t)$ для $w(x,t)$ и $F(y,t)$ совпадают, что важно для применений, и кроме того, если к оператору B_G предъявляются дополнительные требования самосопряженности в главной части или обращения в нуль коэффициентов при младших производных, то на $u(x)$ и $y = v(x)$ возникают дифференциальные уравнения (см. пример 4).

В качестве первого примера приведем преобразованную формулу Пуассона, содержащую значительный произвол, который можно использовать в обратных и других задачах.

Пример 4. Пусть $m = 1$ в лемме 7, и функция $F(y,t)$ — решение параболического уравнения $\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta F$. Тогда имеют место формулы

$$\widetilde{u}(y) = \frac{1}{u(V^{-1}(y))}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \;\; a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V_i^{-1}}{\partial y_k}\,\frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k}\bigg|_{y=V(x)},$$

$$a_j(x) = \frac{1}{\widetilde{u}(y)}\,\left[\sum_{k=1}^{n} 2\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_k}\,\frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k} + \widetilde{u}(y)\Delta V_j^{-1}\right]\bigg|_{y=V(x)}, \quad a(x) = \frac{1}{\widetilde{u}(y)}\Delta\widetilde{u}\bigg|_{y=V(x)},$$

$$w(x,t) = G^{-1}\left(\frac{u(x)}{\pi^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{G(w_0(V^{-1}(V(x) + 2\xi\alpha\sqrt{t})))}{u(V^{-1}(V(x) + 2\xi\alpha\sqrt{t}))}\, e^{-\xi^2}d\xi\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\,\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{G''(w)}{G'(w)}+\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}+a(x)\frac{G(w)}{G'(w)},$$
$$w\Big|_{t=0}=w_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

При $u(x)=1$, $G(z)=z$, $V(x)=x$, разумеется, получается формула Пуассона. Обращаем внимание на интересные, на наш взгляд, сочетания прямых и обратных отображений в формуле для решения $w(x,t)$.

Замечание 2. Если априори известно, что $a_j(x)=0$, $a(x)=0$, то на отображение $V(x)$ и функцию $u(x)$ возникают дифференциальные соотношения

$$\Delta\widetilde{u}(y)=0,\ \ \widetilde{u}(y)=\frac{1}{u(V^{-1}(y))},\quad y\in\mathbb{R}^n,$$

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y_k}\,\frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k}+\widetilde{u}(y)\Delta V_j^{-1}=0,\quad j=1,\ldots,n,$$

что может быть использовано для вычисления коэффициентов $a_{ij}(x)$ в конкретных обратных задачах, возможно, с использованием соотношений (7).

Интересный пример общей схемы леммы 7 получается при использовании формулы для решения задачи Коши параболического уравнения с переменными коэффициентами.

Пример 5. Следуя [13], рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\Delta_{\mu}F, \tag{8}$$

где $F=F(y,t)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$, Δ_μ — дифференциальный оператор второго порядка, определенный формулой

$$\Delta_\mu=\frac{1-|y|^2}{4}\left((1-|y|^2)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}-2\mu\sum_{j=1}^{n}y_j\frac{\partial}{\partial y_j}+\mu(2-n-\mu)\right).$$

Здесь $|y|^2=y_1^2+\ldots+y_n^2$. Если $\mu=2-n$, то Δ_{2-n} — оператор Лапласа—Бельтрами, связанный с метрикой $\dfrac{4|dy|^2}{(1-|y|^2)^2}$, где $|dy|^2=dy_1^2+\ldots+dy_n^2$.

Напомним, что гипергеометрическая функция Гаусса определяется формулой

$${}_2F_1(a,b,c,s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k s^k}{(c)_k k!},$$

где $(a)_0=1$, $(a)_k=a(a+1)\ldots(a+k-1)$, $k\geq 1$. Определим функции

$$\Phi_\lambda(y)=(1-|y|^2)^{\frac{1-\mu+i\lambda}{2}}\,{}_2F_1\left(\frac{n-1+i\lambda}{2},\frac{1-i\lambda}{2},\frac{n}{2},|y|^2\right),$$

$$C(\lambda)=\frac{2^{1-\mu-i\lambda}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(i\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1+i\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right)},\ \ C_{n,\mu}=\begin{cases}1,\ \text{если } n\in(2-n,0),\\[2ex] \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(\frac{2-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right)},\end{cases}$$

$$p(t,q)=C_{n,\mu}\int\limits_0^\infty\exp\left(-t\frac{(1-\mu)^2+\lambda^2}{4}\right)\Phi_\lambda(q)\,|C(\lambda)|^{-2}\,d\lambda.$$

Тогда функция $F(y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(t, y-z)F_0(z)dz$, оказывается, является решением уравнения (8) и удовлетворяет начальному условию $F|_{t=0} = F_0(y)$.

В соответствии с леммой 6, если функцию $F_0(y)$ взять в виде $F_0(y) = u^{-1}(v^{-1}(y))G(w_0(v^{-1}(y)))$, то функция $w(x,t)$, определенная соотношением (6), является решением преобразованного уравнения $\dfrac{\partial w}{\partial t} = B_G(w)$ и удовлетворяет начальным условиям $w|_{t=0} = w_0(x)$. Полученный произвол $G(y)$, $u(x)$, $v(x)$ можно использовать в различных, в том числе и обратных, задачах.

2. Обратные задачи

Исследование обратных задач начнем с общей схемы построения формальных решений линейных многомерных обратных задач. Аналогичные схемы построения решений будут приведены также в нелинейных обратных задачах, но с граничными условиями.

Сначала рассматривается многомерная линейная обратная задача для эволюционного уравнения первого порядка по переменной t: найти две функции $w(x,t)$, $\lambda(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, если

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial t} = Aw + f(t)\lambda(x), \tag{9}$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in D, \tag{10}$$

$$w|_{\partial D} = \varphi(s,t), \quad s \in \partial D, \quad t \geq 0, \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial D} = \psi(s,t), \quad s \in \partial D, \quad t \geq 0. \tag{12}$$

Здесь A — линейный дифференциальный эллиптический оператор второго порядка с гладкими коэффициентами; D — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂D; $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}$ — производная по нормали границы ∂D области D, функция $f(t) \neq 0$ и непрерывна; α — постоянная, непрерывно дифференцируемые функции $w_0(x)$, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$ известны.

Теорема 1. *Пусть $\widetilde{w}(x,t)$ — решение начально-краевой задачи:*

$$\alpha \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} = A\widetilde{w}, \quad \widetilde{w}|_{t=0} = w_0(x), \quad \widetilde{w}|_{\partial D} = \varphi(s,t),$$

а числа μ_k и функции $u_k(x)$ суть собственные числа и собственные функции задачи на собственные значения:

$$Au_k + \mu_k u_k = 0, \quad u_k|_{\partial D} = 0, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Если функция $\widetilde{\psi}(s,t) = \psi(s,t) - \dfrac{\partial \widetilde{w}(s,t)}{\partial \nu}$, $s \in \partial D$, представляется в виде формального ряда

$$\widetilde{\psi}(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \int\limits_0^t f(p) e^{-\frac{\mu_k}{\alpha}(t-p)} dp,$$

где a_k — некоторые постоянные, то искомые функции $w(x,t)$, $\lambda(x)$ обратной задачи (9)–(12) представляются в виде формальных рядов

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x) \int\limits_0^t f(p) e^{-\frac{\mu_k}{\alpha}(t-p)} dp + \widetilde{w}(x,t), \;\; \lambda(x) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x).$$

Доказательство теоремы осуществляется непосредственной проверкой. При этом построение искомых функций $w(x,t)$, $\lambda(x)$ обратной задачи состоит в следующем.

I. Решение первой краевой задачи (поиск функции $\widetilde{w}(x,t)$).

II. Нахождение собственных чисел и собственных функций оператора A (поиск μ_k и $u_k(x)$).

III. Построение функции $\widetilde{\psi}(s,t) = \psi(s,t) - \left.\dfrac{\partial \widetilde{w}(x,t)}{\partial \nu}\right|_{x=s\in\partial D}$.

IV. Вычисление постоянных a_k, $k = 1, 2, \ldots$, из разложения функции $\widetilde{\psi}(s,t)$:

$$\widetilde{\psi}(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \int\limits_0^t f(p) e^{-\frac{\mu_k}{\alpha}(t-p)} dp,$$

что связано с полнотой системы функций $\frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \int\limits_0^t f(p) e^{-\frac{\mu_k}{\alpha}(t-p)} dp$.

V. Нахождение функций $w(x,t)$, $\lambda(x)$ в соответствии с теоремой 1.

Замечание 3. Если $f(t) = \delta(t)$ — дельта-функция Дирака, то разложение функции $\widetilde{\psi}(s,t)$ имеет вид

$$\widetilde{\psi}(s,t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} e^{-\frac{\mu_k}{\alpha} t},$$

и, таким образом, основная проблема полноты систем функций $\dfrac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} e^{-\frac{\mu_k}{\alpha} t}$ определяется собственными функциями и собственными числами оператора A.

Перейдем теперь к нелинейным обратным задачам.

Если $A = \Delta$ и краевые условия имеют специальный вид, то можно определять кроме функции $\lambda(x)$ и коэффициент $k(x)$. А именно, рассмотрим обратную задачу для параболического уравнения: найти три функции $w(x,t)$, $k(x)$, $\lambda(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, такие, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k(x) \Delta w + f(t) \lambda(x), \tag{13}$$

$$w|_{\partial D} = \varphi(s,t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial D} = \psi(s,t), \quad s \in \partial D, \tag{14}$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in D, \tag{15}$$

непрерывно дифференцируемые функции $f(t) \neq 0$, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$, $w_0(x)$ известны, D — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂D.

Теорема 2. *Пусть функция* $\varphi(s,t)$ *обратной задачи* (13)–(15) *имеет специальное аналитическое представление*

$$\varphi(s,t) = F(v_0(s), t) + \widetilde{\varphi}(s,t),$$

где $F(y,t) \neq 0$ *— некоторое решение параболического уравнения* $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $t \geq 0$; $y \in \mathbb{R}$, $v_0(s) \neq 0$ *— непрерывная функция;* $\widetilde{\varphi}(s,t)$ *— фиксированная дифференцируемая добавка, возможно равная нулю, и пусть* $v(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, *— гармоническая функция* *такая, что* $v|_{\partial D} = v_0(s)$, *причем* $|\nabla v| \neq 0$. *Если* $\widetilde{w}(x,t)$ — *решение начально-краевой задачи*

$$\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} = \frac{1}{|\nabla v(x)|^2}\Delta \widetilde{w}, \quad \widetilde{w}|_{t=0} = w_0(x) - F(v(x),0), \quad \widetilde{w}|_{\partial D} = \widetilde{\varphi}(s,t),$$

а $u_k(x)$, μ_k — *собственные функции и собственные числа задачи на собственные значения*

$$\frac{1}{|\nabla v(x)|^2}\Delta u_k + \mu_k u_k = 0, \quad u_k|_{\partial D} = 0, \quad k = 1,2,\ldots$$

и последовательность чисел a_k, $k = 1,2,\ldots$ *определена разложением*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu}\int_0^t f(p)e^{-\mu_k(t-p)}dp = \psi(s,t) - \frac{\partial \widetilde{w}(s,t)}{\partial \nu} - \frac{\partial F(v_0(s),t)}{\partial y}\frac{\partial v(s)}{\partial \nu},$$

то имеют место формулы

$$w(x,t) = F(v(x),t) + \widetilde{w}(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x)\int_0^t f(p)e^{-\mu_k(t-p)}dp,$$

$$k(x) = \frac{1}{|\nabla v(x)|^2}, \quad \lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x).$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Таким образом, как и в линейных задачах, построение решения нелинейной обратной задачи связано с классическими проблемами теории дифференциальных уравнений. При этом решение $w(x,t)$ представляется в виде суммы трех функций: $F(V(x),t)$, $\widetilde{w}(x,t)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x)\int\limits_0^t f(p)e^{-\mu_k(t-p)}dp$, каждая из которых несет определенную смысловую нагрузку. Первая функция $F(V(x),t)$ определяет коэффициент $k(x)$, вторая функция $\widetilde{w}(x,t)$ ответственна за произвол в граничных и начальных условиях, а третья определяет функцию источника. Разумеется основным вопросом здесь является возможность и обоснованность представления краевого условия $\varphi(s,t)$ в виде $F(v_0(s),t) + \widetilde{\varphi}(s,t)$. Заметим только, что, например, функции $F(y,t)$ и $v_0(s)$ можно находить из вариационного принципа $\min\|\varphi(s,t) - F(v_0(s),t)\|$, где $\|\ \|$ — некоторая норма.

Для параболического уравнения более общего вида и более сложного представления следа решения можно рассмотреть обратную задачу поиска трех коэффициентов и правой части, а именно найти решение $w(x,t)$, коэффициенты $\rho(x)$, $k(x)$, $\mu(x)$ и $\lambda(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, такие, что

$$\rho(x)\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}(k(x)\nabla w) + \mu(x)w + \lambda(x)f(t), \ \ x \in D, \ \ t > 0, \tag{16}$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \ \ x \in D, \tag{17}$$

$$w|_{\partial D} = \varphi(s,t), \ \ \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial D} = \psi(s,t), \ \ s \in \partial D, \ \ t > 0, \tag{18}$$

где гладкие функции $w_0(x)$, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$ известны, D — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂D.

Теорема 3. *Пусть функция* $\varphi(s,t)$ *обратной задачи* (16)–(18) *имеет специальное представление*

$$\varphi(s,t)=\int\limits_0^\infty \left(Q(p)F_1(V_0(s),p)+R(p)F_2(V_0(s),p)\right)e^{-pt}dp+\widetilde{\varphi}(s,t),$$

где $Q(p)$, $R(p)$ *— достаточно быстро убывающие на бесконечности функции (например, финитные);* $V_0(s)$ *— непрерывная функция;* $\widetilde{\varphi}(s,t)$ *— фиксированная дифференцируемая добавка, возможно равная нулю;* $F_1(z,p)$, $F_2(z,p)$ *— фундаментальная система решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка*

$$F''(z)+b(z)F'(z)+(pa(z)+c(z))F(z)=0,$$

так что имеют место формулы

$$a(z)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\dfrac{\partial^2F_1}{\partial z^2}\dfrac{\partial F_2}{\partial z}-\dfrac{\partial^2F_2}{\partial z^2}\dfrac{\partial F_1}{\partial z}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial z}F_2-\dfrac{\partial F_2}{\partial z}F_1}\right),\quad b(z)=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}F_2-\frac{\partial F_2}{\partial z}F_1\right),$$

$$c(z)=\frac{\dfrac{\partial^2F_1}{\partial z^2}\dfrac{\partial F_2}{\partial z}-\dfrac{\partial^2F_2}{\partial z^2}\dfrac{\partial F_1}{\partial z}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial z}F_2-\dfrac{\partial F_2}{\partial z}F_1}-p\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\dfrac{\partial^2F_1}{\partial z^2}\dfrac{\partial F_2}{\partial z}-\dfrac{\partial^2F_2}{\partial z^2}\dfrac{\partial F_1}{\partial z}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial z}F_2-\dfrac{\partial F_2}{\partial z}F_1}\right),$$

при этом $a(z)>0$. *Пусть, далее,* $V(x)$ *— гармоническая в области* D *функция, такая, что* $V|_{\partial D}=V_0(s)$, *причем* $\nabla V\neq 0$.

Положим

$$\begin{aligned}&\rho(x)=a(V(x))|\nabla V|^2\exp\Bigg(\int\limits_0^{V(x)}b(z)dz\Bigg),\quad k(x)=\exp\Bigg(\int\limits_0^{V(x)}b(z)dz\Bigg),\\&\mu(x)=c(V(x))|\nabla V|^2\exp\Bigg(\int\limits_0^{V(x)}b(z)dz\Bigg)\end{aligned}\tag{19}$$

и пусть $u_k(x)$, μ_k, $k=1,2,\dots$ *— собственные функции и собственные значения оператора*

$$A=\frac{1}{\rho(x)}\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+\frac{\mu(x)}{\rho(x)},\ \ Au_k+\mu_ku_k=0,\ \ u_k|_{\partial D}=0,$$

а $\widetilde{w}(x,t)$ *— решение первой краевой задачи для уравнения* $\dfrac{\partial\widetilde{w}}{\partial t}=A\widetilde{w}$ *с условиями*

$$\widetilde{w}|_{t=0}=w_0(x)-\int\limits_0^\infty\left(Q(p)F_1(V(x),p)+R(p)F_2(V(x),p)\right)e^{-pt}dp,\ \ \widetilde{w}|_{\partial D}=\widetilde{\varphi}(s,t),$$

и постоянные a_k *определены из равенства*

$$\widetilde{\psi}(s,t)=\psi(s,t)-\frac{\partial V(s)}{\partial\nu}\int\limits_0^\infty\left(Q(p)\frac{\partial F_1(V_0(s),p)}{\partial z}+R(p)\frac{\partial F_2(V_0(s),p)}{\partial z}\right)e^{-pt}dp-\frac{\partial\widetilde{w}(s,t)}{\partial\nu}=$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \int_0^t b(p) e^{-\mu_k(t-p)}\, dp.$$

Тогда коэффициенты $\rho(x)$, $k(x)$, $\mu(x)$ *определены равенствами* (19), *и*

$$w(x,t) = \int_0^\infty \left(Q(p)F_1(V(x),p) + R(p)F_2(V(x),p)\right) e^{-pt} dp + \\ + \widetilde{w}(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x) \int_0^t b(p) e^{-\mu_k(t-p)}\, dp,$$

$$\lambda(x) = \rho(x) \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x)$$

есть решение обратной задачи (16)–(18).

Пример 6. Следу $\varphi(s,t)$ решения $w(x,t)$ на границе ∂D

$$\varphi(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(Q(\omega)\exp(i\omega\sqrt[3]{u_0(s)})(i\omega\sqrt[3]{u_0(s)} - 1) + \\ + R(\omega)\exp(-i\omega\sqrt[3]{u_0(s)})(i\omega\sqrt[3]{u_0(s)} + 1)\Big) e^{i\omega t} d\omega + \widetilde{\varphi}(s,t),$$

$u_0(s) > 0$, $s \in \partial D$, соответствует уравнение

$$\rho(x)\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + \lambda(x) f(t),$$

при этом

$$\rho(x) = \frac{1}{9}(u(x))^{-4/3}|\nabla u|^2,$$

где $u(x)$ — гармоническая функция такая, что $u|_{\partial D} = u_0(s)$, $s \in \partial D$.

Таким образом, в данном случае поиск коэффициента $\rho(x)$ сведен к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Остальные функции определяются по схеме, аналогичной схеме теоремы 3.

В начале работы приведена необычная экономическая интерпретация решения и коэффициентов параболического уравнения. Существенно используя независимость коэффициентов и функции источника от времени в параболическом уравнении, можно провести небольшое дополнительное исследование линейной обратной задачи, что и делается ниже.

Лемма 8. *Пусть функция* $w(x,t)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha \le t \le \beta$, *является решением параболического уравнения*

$$\rho(x)\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) + \lambda(x) \tag{20}$$

с коэффициентами $k(x)$, $\rho(x)$ *и правой частью* $\lambda(x)$, *не зависящими от переменной* t. *Тогда имеет место тождество*

$$\rho(x)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(k(x)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda(x) w\right). \tag{21}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножим уравнение (20) на $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ и воспользуемся тождествами

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(k(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2\right), \;\; i = 1,\ldots,n.$$

Следствие 4 (единственность). *Пусть заданы $k(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, и*

$$w|_{\partial D} = 0, \;\; w|_{t=\alpha} = w|_{t=\beta} = 0. \tag{22}$$

Тогда $\lambda(x) = 0$, $w(x,t) = 0$, $x \in D$, $\alpha \le t \le \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя тождество (21), с учетом данных (22), получаем

$$\int\limits_D \int\limits_\alpha^\beta \rho(x)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdt = 0.$$

Отсюда в силу того, что $\rho(x) > 0$, получаем $\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$. Так как $w|_{t=\alpha} = 0$, то $w = 0$. Из (20) следует, что $\lambda(x) = 0$.

Следствие доказано.

Следствие 5 (формула для коэффициента λ). *Если $w|_{\partial D} = \varphi(s)$, $s \in \partial D$, т. е. функция $\varphi(s)$ не зависит от переменной t и $w|_{t=\alpha} = w|_{t=\beta} = w_0(x)$, то имеет место следующая формула для коэффициента $\lambda(x)$:*

$$\lambda(x) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (21) интегрированием получается равенство

$$\int\limits_D \int\limits_\alpha^\beta \rho(x)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdt = 0.$$

Отсюда в силу того, что $\rho(x) > 0$, получаем $\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$, т. е. решение $w(x,t)$, оказывается, не зависит от переменной t. Подставляя в (20) значение $t = \alpha$ (или β), получаем искомую формулу для $\lambda(x)$.

Далее рассматриваются обратные задачи для параболических уравнений поиска решений и двух зависимых коэффициентов. Явные формулы для решений обратных задач получаются с точностью до решения задачи Коши

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial F}{\partial t}, \;\; F|_{y=0} = \alpha(t), \;\; \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} = \beta(t).$$

Так, обратная задача для параболического самосопряженного уравнения состоит в поиске функций $w(x,t)$, $A(x)$, $C(x)$ таких, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right) + C(x)w,$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \;\; w|_{x=0} = \alpha(t), \;\; \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \beta(t), \tag{23}$$

где $w_0(x) > 0$, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, $w_0(0) = \alpha(0)$, $w_0^{'}(0) = \beta(0)$ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $0 \le x < \infty$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. *Пусть $F(y,t)$ — решение задачи Коши по переменной y:*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial F}{\partial t}, \;\; F|_{y=0} = \alpha(t), \;\; \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} = \beta(t),$$

и $\varphi(y) = \int\limits_0^y F_0^2(p)dp$, $F_0(p) = F(p,0)$. *Имеют место формулы*

$$w(x,t) = \sqrt{V'(x)}F(V(x),t), \;\; A(x) = \frac{1}{V'^2}, \;\; C(x) = \frac{5(V'')^2 - 2V'''V'}{4(V')^4},$$

где $V(x) = \varphi^{-1}\left(\int\limits_0^x w_0^2(p)dp\right)$.

Для несамосопряженного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C(x)w$$

с начально-краевыми условиями (23) имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $F(y,t)$ — решение задачи Коши по переменной y:*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial F}{\partial t}, \;\; F|_{y=0} = \alpha(t), \;\; \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} = \beta(t),$$

и $\varphi(y) = \int\limits_0^y \frac{dp}{F_0^2(p)}$, где $F_0(p) = F(p,0)$. *Тогда имеют место формулы*

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{V'(x)}}F(V(x),t), \;\; A(x) = \frac{1}{V'^2}, \;\; C(x) = \frac{2V'''V' - 3(V'')^2}{4(V')^4},$$

где $V(x) = \varphi^{-1}\left(\int\limits_0^x \frac{dp}{w_0^2(p)}\right)$.

Другие сходные результаты по одномерным обратным задачам поиска трех связанных коэффициентов можно найти в работе [14].

Список литературы

1. *Соболев С. Л.* Функционально-инвариантные решения волнового уравнения // Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1934. Т. 5. С. 259–264.

2. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук. 1938. Вып. 5. С. 5–41.

3. *Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982.

4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

5. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды // Математическое моделирование. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1989. С. 238–254.

6. *Малков А. С., Малинецкий Г. Г., Чернавский Д. С.* Моделирование развития аграрных обществ с позиции нелинейной динамики // Новое в синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение. М.: Наука, 2007. С. 134–148.

7. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.

8. *Anikonov Yu. E.* Formulas in Inverse and Ill-Posed Problems. Utrecht: VSP, 1997.

9. *Аниконов Ю. Е., Пятков С. Г.* О некоторых представлениях решений обратных задач для уравнений второго порядка // Неклассические уравнения математической физики: Межвуз. сб. науч. тр. Новосибирск, 1993. С. 108–111.

10. *Аниконов Ю. Е., Аюпова Н. Б.* Формулы для решений и коэффициентов дифференциальных уравнений 2-го порядка и обратные задачи. Препринт № 165, ИМ СО РАН. Новосибирск, 2005.

11. *Аниконов Ю. Е.* Конструктивные методы исследования обратных задач для эволюционных уравнений // Сиб. журн. индустр. мат. 2008. Т. 11, № 2. С. 3–20.

12. *Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В.* Аналитические представления решений ряда обратных задач математической физики. Препринт № 218, ИМ СО РАН. Новосибирск, 2009.

13. *Congweu Liu, Lizhong Peng*, Generalized Helgason-Fourier Transforms Associated to Variants of the Laplace-Beltrami Operators on the Unit Ball in $\mathbb{R}^n$ // Indiana University Math. Journal. 2009. Vol. 58. No. 3. P. 1457–1491.

14. *Аниконов Ю. Е., Кривцов Ю. В., Нещадим М. В.* Нелинейные задачи теории управления. Препринт № 227, ИМ СО РАН. Новосибирск, 2009.

Материал поступил в редколлегию 11.06.2010

Адреса авторов

АНИКОНОВ Юрий Евгеньевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: anikon@math.nsc.ru

НЕЩАДИМ Михаил Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: neshch@math.nsc.ru