

Ю. Е. Аниконов, Ю. С. Волков, С. Б. Горшкалев,
Е. Ю. Деревцов, С. В. Мальцева

О КРИТЕРИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ В ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ СЕЙСМИКИ*

В рамках обратной кинематической задачи сейсмологии предложены подходы к количественной оценке структуры множества линий уровня скорости, в частности степени ее горизонтальной однородности. Кратко приведены постановки обратной кинематической задачи сейсмологии. Описаны некоторые конструктивные методы исследования многомерных обратных кинематических задач, заключающиеся в построении функционалов, значения которых зависят лишь от начальной и конечной точек лучей, вдоль которых измерены времена пробега. Приведен общий принцип построения ряда таких функционалов, рассмотрены некоторые частные случаи. Предложен локальный и интегральный критерии горизонтальной однородности среды, проведено их численное исследование на тестовом материале.

Ключевые слова: обратная задача сейсмологии, кинематические данные, линии уровня скорости, функционал времен пробега, аппроксимация, B-сплайны, численное моделирование.

Введение

В конце XIX века, когда были сконструированы первые сейсмические датчики, сейсмические волны стали использоваться с целью локализации очагов землетрясения. Несколько позже исследователями была сформулирована проблема определения скорости распространения сейсмических волн внутри Земли по наблюдаемой картине движения фронтов сейсмических волн, возникающих на поверхности как следствие землетрясений или искусственных источников. В дальнейшем эта задача была поставлена математически, и, по-видимому, данная проблема изучения внутреннего строения Земли по временам прихода сейсмических волн явилась первой рассмотренной обратной задачей для дифференциальных уравнений. Эта задача, *обратная кинематическая задача сейсмологии*, сыграла важную роль как в теории обратных задач математической физики [1; 2], так и в практической геофизике [3].

Впервые обратная кинематическая задача сейсмологии в математической постановке была исследована в начале XX века Г. Герглотцем и Е. Вихертом в предположении сферической симметрии Земли. Было указано множество времен пробега, необходимое для построения решения, установлены условия, выполнение которых дает единственное решение задачи. Решение обратной кинематической задачи для сферически-симметричной модели Земли сыграло большую роль в развитии представлений о внутреннем строении Земли. На основе анализа сейсмических данных впервые было построено распределение скорости продольных и поперечных волн вдоль радиуса Земли и выделены основные

* Работа осуществлена при частичной финансовой поддержке ОМН РАН (проект 1.3.8), СО РАН (проекты 2009-14, 2009-81).

элементы структуры земного шара, такие как кора, оболочка и ядро. Обратим внимание на то, что поставленная задача была решена при существенных ограничениях на рассматриваемую среду. В определенной мере эти ограничения можно трактовать и как наличие *априорной информации*, которая заключается в предположении о сферической симметрии Земли.

Накопленные геофизические данные убедительно свидетельствуют о том, что физические параметры Земли являются функциями трех переменных. Наиболее значительно они меняются с глубиной, причем в целом скорость распространения сигнала возрастает. Это обстоятельство приводит к характерному поведению лучей, вдоль которых происходит распространение сигнала. Именно, луч, «выпущенный» с поверхности Земли, сначала проходит в глубину, затем, искривляясь, снова выходит на поверхность. Это явление в сейсмике носит название рефракции, а волны называются рефрагированными. С одной стороны, такое поведение позволяет применять аппарат евклидовой геометрии лишь локально (например, в модели слоистых сред); более того, в математической модели естественным образом возникает потребность в использовании аппарата римановой геометрии. С другой стороны, выпущенный с поверхности и принятый там же сигнал несет «зашифрованную» информацию о структуре и характеристиках вещества в глубине Земли, что позволяет, развивая методы «дешифровки», делать выводы о внутреннем строении Земли. Отметим, что непосредственное измерение физических параметров осуществимо только в очень узком приповерхностном слое (например, с помощью бурения), поэтому практически единственным способом изучения внутреннего строения Земли являются методы, основанные на решении тех или иных обратных задач.

Вопросы корректности постановок и единственности решений обратной кинематической задачи исследовались в работах [2; 4–11]. Существенным обстоятельством при таких исследованиях является то, что фиксируются ограничения на класс функций, которому принадлежит искомое решение. Зачастую эти ограничения весьма жесткие, и естественны они тогда, когда не противоречат собранной априорной, — геологической или геофизической — информации о локальном строении ограниченного участка объема, внутренняя структура которого подлежит исследованию. Вопросы корректности и единственности решений очень важны, но с точки зрения приложений больший интерес представляют конструктивные методы исследования многомерных обратных кинематических задач.

При сейсмических наблюдениях существуют объективные причины, препятствующие идеальному решению обратной задачи [12]. Точное решение возможно лишь при условии, что наблюдения производились на поверхности, окружающей изучаемый объем, или на бесконечной плоскости. Системы наблюдений в сейсморазведке носят не непрерывный, а дискретный характер и не являются регулярными по удалениям и азимутам. Волновая природа сейсмического поля ставит естественный предел детальности изучения геологической среды. Предел разрешающей способности метода определяется длиной волны упругих колебаний. Установлено, что в волновом поле сейсмогеологические объекты практически перестают проявляться индивидуально, когда их размеры

уменьшаются до значения примерно на порядок меньше длины волны. При регистрации волновых полей присутствуют не имеющие отношения к измеряемому полю помехи, такие как ветер, дождь и помехи, носящие техногенный характер. Все эти причины не являются непреодолимым препятствием для решения обратной задачи, но вносят искажения в измеряемые параметры волнового поля. Таким образом, применяемые методы обработки сейсмических данных должны быть устойчивы к ошибкам разного рода.

Настоящая работа посвящена постановке и исследованию проблемы поиска структуры множества линий уровня скорости по кинематическим данным (годографу). Один из возможных подходов к решению обратной кинематической задачи сейсмологии состоит в том, что прежде чем начать поиск скорости, принадлежащей некоторому классу, например классу не зависящих от «вертикальной» переменной функций, необходимо предпринять попытку установить (по годографу) принадлежность скорости данному классу. Как будет показано ниже, это можно сделать при довольно общих предположениях. Таким образом, процедура восстановления скорости по кинематическим данным следует за предварительным анализом этих данных, в результате которого мы определяем класс искомых скоростей, имеющих определенную структуру множества линий уровня. Иными словами, необходимо сначала найти класс скоростей, используя кинематические данные, а затем приступить к определению скорости. В работе наряду с общими теоретическими результатами проведено и численное исследование простейшего, на наш взгляд, класса скоростей, соответствующего горизонтально однородной среде.

В статье в различных вариантах приведены постановки обратной кинематической задачи сейсмологии, описаны «конструктивные» методы исследования многомерных обратных кинематических задач. В контексте данной работы под этим понимается построение функционалов, значения которых зависят лишь от начальной и конечной точек геодезических, вдоль которых производится интегрирование. Давно и хорошо известным функционалом такого рода является работа потенциальной силы в механике. Приведен не только общий принцип построения некоторого класса таких функционалов, но и рассмотрены некоторые частные случаи метрик, размерностей пространства и классов функционалов. Заметим, что приведенные результаты могут служить и основой для построения моделей сред, которые можно использовать в дальнейшем для всесторонней апробации предлагаемых алгоритмов, направленных на исследование качественных свойств среды. Кроме того, в работе описан и численно исследован на тестовом материале критерий горизонтальной однородности среды с включением необходимых дополнительных сведений.

1. Обратная кинематическая задача сейсмологии

Сформулируем обратную кинематическую задачу сейсмологии в лучевом приближении, которое и будет рассматриваться в настоящей работе. Пусть D — ограниченная область евклидова пространства \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, с гладкой границей ∂D , в которой происходит передача сигналов (распространение волн) со скоростью $v(x) = 1/\lambda(x)$, $x = (x^1, \dots, x^n)$. Функция $\lambda(x)$ предполагается дифференцируемой достаточное число раз. Обозначим

через $\tau(x, x_0)$ время, за которое сигнал из точки x_0 приходит в точку x . Известно, что функция $\tau(x, x_0)$ при $x, x_0 \in D$ удовлетворяет уравнению эйконала

$$|\nabla_x \tau(x, x_0)| = \frac{1}{v(x)} \equiv \lambda(x),$$

где ∇_x — символ градиента, вычисленного по переменной x . Уравнение $\tau(x, x_0) = t$ определяет фронт волны от источника x_0 в момент времени t .

Обратная кинематическая задача сейсмологии ставится как задача определения скорости $v(x)$ при $x \in D$, если известна функция $\tau(y, z)$ для всех пар точек $y, z \in \partial D$,

$$\tau(y, z) = \int_{\gamma(y, z)} \lambda(x) |dx|, \quad (1)$$

где $\gamma(y, z)$ — кривая (геодезическая римановой метрики в D), вдоль которой происходит распространение сигнала.

Замечание 1. Подчеркнем важное обстоятельство, имеющее место в обратной кинематической задаче сейсмологии. Координаты точек y, z , которыми определяются времена пробега, известны. Сложность же задачи связана с тем, что неизвестна скорость $v(x)$. Следовательно, неизвестны ни подинтегральная функция λ , ни определяемая ею кривая, по которой производится интегрирование. Это обстоятельство переводит задачу в разряд нелинейных и тем самым очень сложных для исследования.

Естественно возникает следующая интерпретация задачи, истоки которой лежат в представлениях теоретической механики. Рассмотрим лагранжиан $L(x, \dot{x}) = \lambda^2(x) |\dot{x}|^2 / 2$ и систему уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Здесь t — некоторый параметр, \dot{x} означает дифференцирование по этому параметру. В механике в качестве параметра t часто выступает время. В нашем случае t задает ту или иную параметризацию кривых.

Для заданного лагранжиана $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \lambda^2(x) \dot{x}^i$ гамильтониан

$$H(x, p) = p_i \dot{x}^i - L(x, \dot{x}) = \frac{\lambda^2(x) |\dot{x}|^2}{2} = \frac{|p|^2}{2\lambda^2(x)}$$

совпадает с лагранжианом (по разноразмерному индексу i подразумевается суммирование от 1 до n). Каноническая система уравнений Гамильтона запишется в виде

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{\lambda^2(x)}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{|p|^2}{\lambda^2(x)} \frac{\partial \ln \lambda}{\partial x^i}. \quad (3)$$

Предположим, что не зависящая от времени функция $f(x, p)$ является первым интегралом системы (3). Тогда уравнение Лиувилля для данного гамильтониана и функции f таково:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{p_i}{\lambda^2} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{|p|^2}{\lambda^2} \frac{\partial \ln \lambda}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial p_i}. \quad (4)$$

Напомним, что рассматривается задача в рамках лучевого приближения. В этом случае путь распространения возмущения можно рассматривать как экстремаль вариационного функционала Ферма. Являясь решением системы уравнений Лагранжа (2), экстремали доставляют минимум функционалу и интерпретируются как геодезические римановой метрики

$$ds^2 = \lambda^2(x) |dx|^2, \quad (5)$$

заданной в области D , где $|dx|^2$ — элемент длины евклидовой метрики. Метрики вида (5) будем называть *конформно евклидовыми*.

Система уравнений Лагранжа (2) путем перехода к контравариантным компонентам [13], $\xi^j = p_j/\lambda^2$, а затем нормированием $\xi^i = \xi^i/|\xi|$ (длина вектора ξ понимается в смысле метрики (5)) преобразуется в хорошо известную в геометрии систему уравнений для геодезических:

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

где s — параметр геодезической, пропорциональный длине дуги, Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля. С использованием контравариантных компонент ξ^j уравнение Лиувилля (4) принимает следующий вид:

$$\xi^j \frac{\partial f}{\partial x^j} - \Gamma_{kl}^j \xi^k \xi^l \frac{\partial f}{\partial \xi^j} = 0.$$

Оператор $H \equiv \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} - \Gamma_{kl}^j \xi^k \xi^l \frac{\partial}{\partial \xi^j}$ называют оператором *геодезического потока* или *геодезической пульверизации*.

Система уравнений геодезических удобна для исследования вопросов, возникающих в дифференциальной геометрии. При рассмотрении обратной кинематической задачи сейсмологии удобнее выбирать отличный от длины дуги параметр геодезических. В результате получаем часто используемые системы уравнений геодезических конформно евклидовой метрики

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = |\dot{x}|^2 \frac{\partial \ln \lambda}{\partial x^i} - 2 \frac{\partial \ln \lambda}{\partial x^j} \dot{x}^j \dot{x}^i, \quad \lambda(x) |\dot{x}| = 1, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} - \frac{\partial \lambda}{\partial x^j} \dot{x}^j \dot{x}^i, \quad |\dot{x}| = 1, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda^2}{\partial x^i}, \quad |\dot{x}| = \lambda(x), \quad (8)$$

$i = 1, \dots, n$. В системах уравнений (6)–(8) использованы символы Кристоффеля, вычисленные для метрики (5).

Пусть $w(y, z) = \int_{\gamma(y, z)} \lambda(x) |dx|$, где $\gamma(y, z)$ — геодезическая метрики (5), соединяющая точки $y \in D$ и $z \in D$. Выбирая параметр t вдоль геодезической γ из условия $|\dot{x}| = \lambda(x)$, получим

$$w(y, z) = \int_{\gamma(y, z)} \lambda^2(x(t)) dt,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y^i} = -\frac{dx^i}{dt}\Big|_{x=y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z^i} = \frac{dx^i}{dt}\Big|_{x=z}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$|\nabla_y w(y, z)| = \lambda(y), \quad |\nabla_z w(y, z)| = \lambda(z).$$

Последние два уравнения — не что иное, как уравнения эйконала. Заметим, что если

$$\tilde{w}(p, q) = \int_{\tilde{\gamma}(p, q)} \lambda(x) |dx|,$$

а $\varphi : \xi \mapsto x$, $x = \varphi(\xi)$ — конформное отображение области D , то

$$w(y, z) = \tilde{w}(\varphi(y), \varphi(z)) = \int_{\tilde{\gamma}(y, z)} \lambda(\varphi(\xi)) |\varphi_\xi| |d\xi|.$$

2. Интегро-дифференциальные соотношения и первые интегралы

Один из способов построения решений обратной кинематической задачи [14; 15] основан на получении и использовании интегро-дифференциальных тождеств

$$(a, \nabla_y w(y, z)) + (a, \nabla_z w(y, z)) = \int_{\gamma(y, z)} (a, \nabla \lambda(x)) |dx|,$$

$$(a, \nabla_y w(y, z))^2 + (a, \nabla_z w(y, z))^2 = \int_{\gamma(y, z)} (a, \nabla \lambda^2(x)) a_i dx^i,$$

где w определено (1); a — постоянный вектор. Более общие соотношения строятся следующим образом.

Пусть $u = (u_{i_1 \dots i_m}(x))$ — симметричное тензорное поле валентности m , $m \geq 1$ такое, что

$$du = \sigma(\delta \otimes v), \quad (9)$$

где d — оператор внутреннего дифференцирования, $d = \sigma \nabla$; ∇ — оператор ковариантного дифференцирования, переводящий m -тензорное поле в $(m+1)$ -тензорное поле, $\nabla = (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$; σ — оператор симметрирования; $\delta = (\delta_{ij})$ — символ Кронекера; \otimes — знак тензорного умножения. При этом $v(x)$ является некоторым симметричным тензорным полем валентности $m-1$ (заметим, что $v(x)$ выражается через производные от $u(x)$). Например, при $m=1$

$$(du)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) = v \delta_{ij}, \quad v(x) = \frac{1}{n} \operatorname{div} u(x).$$

Для любого поля, удовлетворяющего (9), и любой функции $\lambda(x)$ имеет место тождество

$$\begin{aligned} L^u w(y, z) &= u_{i_1 \dots i_m}(z) w_{z^{i_1}} \dots w_{z^{i_m}} + (-1)^{m-1} u_{i_1 \dots i_m}(y) w_{y^{i_1}} \dots w_{y^{i_m}} = \\ &= \int_{\gamma(y, z)} \left(\lambda^2(x) v_{i_1 \dots i_{m-1}}(x) + m \lambda(x) u_{i_1 \dots i_m}(x) \lambda_{x^{i_m}} \right) \dot{x}^{i_1} \dots \dot{x}^{i_{m-1}} dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Напомним, что по повторяющимся нижним и верхним индексам подразумевается суммирование от 1 до n . Из (10) и тождества

$$\frac{d}{dt} (u_{i_1 \dots i_m}(x) \dot{x}^{i_1} \dots \dot{x}^{i_m}) = (\tilde{L}\lambda)_{i_1 \dots i_{m-1}}(x) \dot{x}^{i_1} \dots \dot{x}^{i_{m-1}},$$

где

$$(\tilde{L}\lambda)_{i_1 \dots i_{m-1}} = \lambda^2 v_{i_1 \dots i_{m-1}} + m \lambda u_{i_1 \dots i_m} \lambda_{x^{i_m}},$$

следует теорема 1.

Теорема 1. Пусть $\lambda(x)$ — гладкая функция, и $u(x)$ — гладкое тензорное поле, удовлетворяющее условию (9). Тогда равносильны следующие утверждения.

1. Уравнения лучей допускают первый интеграл $u_{i_1 \dots i_m}(x) \dot{x}^{i_1} \dots \dot{x}^{i_m}$, т. е.

$$\frac{d}{dt} (u_{i_1 \dots i_m}(x) \dot{x}^{i_1} \dots \dot{x}^{i_m}) = 0.$$

2. Функция $\lambda(x)$ удовлетворяет системе уравнений

$$(\tilde{L}\lambda)_{i_1 \dots i_{m-1}} = 0, \quad i_1, \dots, i_{m-1} = 1, \dots, n, \quad x \in D.$$

3. Функция $w(y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$L^u w(y, z) = 0, \quad y \in D, \quad z \in D.$$

В обратных задачах соотношения $Lw(y, z) = 0$, где L — некоторый дифференциальный оператор, могут быть проверены, как правило, лишь на границе ∂D рассматриваемой области D , т. е. когда $y \in \partial D$, $z \in \partial D$. Поэтому принципиальным является следующий вопрос. Пусть для некоторого тензорного поля $u^0(x)$, определенного на границе ∂D области D , имеет место равенство

$$L^{u^0} w(y, z) = 0, \quad y \in \partial D, \quad z \in \partial D.$$

Существует и единственно ли продолжение $L^u w(y, z) = 0$, $y \in D$, $z \in D$ дифференциального соотношения с границы ∂D в область D с выполнением условия (9)? Как показано в [16], ответ на поставленный вопрос при довольно слабых ограничениях положителен.

В силу этого результата и теоремы 1 из соотношений $Lw(y, z) = 0$, $y \in \partial D$, $z \in \partial D$ следуют дифференциальные соотношения $\tilde{L}\lambda(x) = 0$, $x \in D$, которые, в свою очередь, характеризуют структуру риманова пространства, что важно для приложений. Ниже приведены более конкретные результаты этого направления исследований.

3. Линейный первый интеграл

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} = 0, \quad i \neq j, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x^i} = \frac{\partial u_j}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

В случае $n = 2$ это система Коши-Римана, а для $n > 2$ ее общее решение дается формулой

$$u(x) = a_0 x + Ax - b|x|^2 + 2x(b, x) + c,$$

где $a_0 = \text{const}$; b, c — постоянные векторы; A — постоянная кососимметрическая матрица. Заметим, что траектория векторного поля $u(x)$, удовлетворяющего системе (11), порождает группу конформных преобразований пространства \mathbb{R}^n .

Тождество (10) в данном случае имеет вид

$$(u(y), \nabla_y w(y, z)) + (u(z), \nabla_z w(y, z)) = \int_{\gamma(y, z)} \left((u, \nabla \lambda) + \frac{\lambda}{n} \text{div } u \right) |dx|.$$

Справедливо и более общее тождество

$$L_\beta w(y, z) = \int_{\gamma(y, z)} \tilde{L}_\beta \lambda(x) |dx|, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} L_\beta w(y, z) &= (u(y), \nabla_y w(y, z)) + (u(z), \nabla_z w(y, z)) + \beta w(y, z), \\ \tilde{L}_\beta \lambda(x) &= (u(x), \nabla \lambda(x)) + \frac{\lambda(x)}{n} \text{div } u(x) + \beta \lambda(x), \end{aligned}$$

и β — постоянная.

Пусть B — шар единичного радиуса в \mathbb{R}^n и метрика $ds^2 = \lambda^2(x) |dx|^2$ такова, что в B существует единственная геодезическая, соединяющая точки y и z . Как показано в [14], в этом случае из соотношения (12) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\tilde{L}_\beta \lambda}{\lambda} \right\|_{C(B)} &\geq \left| \frac{L_\beta w(y, z)}{w(y, z)} \right|, \quad y, z \in \partial B, \\ \int_B \lambda^{n-2} |\tilde{L}_\beta \lambda|^2 dx &\leq \frac{\Gamma(n/2)}{(n-1)(2\pi)^{n/2}} \int_{\partial B} \int_{\partial B} M w(y, z) dS_y dS_z, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция; dS_y и dS_z — элементы площади сферы ∂B в точках $y, z \in \partial B$, определитель

$$M w(y, z) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^1} L_\beta w & \dots & \frac{\partial}{\partial x^n} L_\beta w \\ 0 & 0 & \frac{z^1}{|z|} & \dots & \frac{z^n}{|z|} \\ \frac{\partial}{\partial y^1} L_\beta w & \frac{y^1}{|y|} & & & \\ \vdots & \vdots & & \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} L_\beta w & \\ \frac{\partial}{\partial y^n} L_\beta w & \frac{y^n}{|y|} & & & \end{vmatrix}.$$

Из (12), в частности, следует, что если $L_\beta w(y, z) = 0$ только при $|y| = 1, |z| = 1$, то $\tilde{L}_\beta \lambda(x) = 0, x \in B$, и $L_\beta w(y, z) = 0, y \in B, z \in B$, что весьма важно для приложений. Таким образом, в данном случае имеет место продолжение дифференциального соотношения $L_\beta w(y, z) = 0$ с границы $\partial B \times \partial B$ в область $B \times B$. В силу этого представляет интерес вопрос о более конкретном виде функции $\lambda(x)$, коль скоро выполнено соотношение

$$L_\beta w(y, z) = 0, \quad |y| = 1, \quad |z| = 1.$$

В случае $\beta = 0$ при $n = 3$ и виде векторного поля

$$u(x) = a_0 x + [a, x] - b|x|^2 + 2x(b, x) + c$$

общие решения уравнения

$$\tilde{L}\lambda = (u, \nabla\lambda) + \frac{\lambda}{n} \operatorname{div} u = 0,$$

для конкретных значений параметров в $u(x)$, приведены в [17].

Ограничимся случаем $\beta = 0$ и рассмотрим уравнение

$$\tilde{L}\lambda = (u, \nabla\lambda) + \frac{\lambda}{n} \operatorname{div} u = 0.$$

Пусть $n = 3$ и векторное поле $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = a_0x + [a, x] - b|x|^2 + 2x(b, x) + c.$$

Общие решения уравнений $\tilde{L}\lambda = 0$ для конкретных $u(x)$ [17] приведены ниже.

$u(x)$	$v(x) = 1/\lambda(x)$
$u = k = (0, 0, 1)$	$v = F(x^1, x^2)$
$u = [k, x]$	$v = F((x^1)^2 + (x^2)^2, x^3)$
$u = x$	$v = x F(x/ x)$
$u = a_0x + [k, x]$	$v = x^3 F\left(\frac{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}{x^3}, \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} e^{-a_0 \arctg \frac{x^2}{x^1}}\right)$
$u = [k, x] + \alpha k$	$v = F\left(\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, x^3 - \alpha \arctg \frac{x^2}{x^1}\right)$
$u = -k x ^2 + 2x(k, x)$	$v = x ^2 F\left(\frac{x^1}{ x ^2}, \frac{x^2}{ x ^2}\right)$
$u = a_0x - k x ^2 + 2x(k, x)$	$v = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} F\left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{a_0x^3 + x ^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}\right)$
$u = -k x ^2 + 2x(k, x) + \alpha k$	$v = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} F\left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{ x ^2 + \alpha}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}\right)$
$u = 2[a, x] - k x ^2 + 2x(k, x), \alpha^3 = 0$	$v = \sqrt{(x^1 + a^2)^2 + (x^2 - a^1)^2} \times F\left(\frac{x^2 - a^1}{x^1 + a^2}, \frac{ x ^2 - a^2x^1 + a^1x^2}{\sqrt{(x^1 + a^2)^2 + (x^2 - a^1)^2}}\right)$
$u = \alpha[k, x] - k x ^2 + 2x(k, x)$	$v = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} \times F\left(\frac{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}{ x }, \alpha \frac{x^3}{ x ^2} + \arctg \frac{x^2}{x^1}\right).$

4. Тождества, связанные с формами 1-й степени на плоскости

В области D переменных (x, y) рассмотрим риманову метрику класса C^2 :

$$ds^2 = E(x, y)dx^2 + 2F(x, y)dxdy + G(x, y)dy^2. \quad (13)$$

Введем стандартные обозначения: $H = \sqrt{EG - F^2}$ для определителя метрики (13) и $K(x, y)$ для гауссовой кривизны метрики. Кроме того, пусть

$$\alpha = -\frac{\sqrt{E}}{H} \left(\frac{\partial E}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{F}{\sqrt{E}} \right), \quad \beta = \frac{1}{E} \left(F\alpha + \sqrt{E} \frac{\partial}{\partial x} \frac{H}{\sqrt{E}} \right),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H dy}{E dx + F dy}.$$

Пусть γ — геодезическая метрики (13). Хорошо известно, что

$$-d\varphi = \alpha dx + \beta dy \quad \text{вдоль } \gamma,$$

$$d(\alpha dx + \beta dy) = -K(x, y)H(x, y) dx dy.$$

Введем функцию

$$\mathcal{P}(a, b) = \int_{\gamma(a, b)} d\varphi \quad (14)$$

поворота геодезической $\gamma(a, b)$, соединяющей точки a и b границы ∂D области D . Имеет место тождество

$$-\mathcal{P}(a, b) = \int_{\gamma(a, b)} \alpha dx + \beta dy.$$

Из этого равенства и при выполнении условий единственности решения соответствующей задачи интегральной геометрии [4] следует приведенная ниже теорема.

Теорема 2. Гауссова кривизна $K(x, y)$ метрики (13) равна нулю, если и только если поворот $\mathcal{P}(a, b)$ представляется в виде

$$\mathcal{P}(a, b) = f(b) - f(a),$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция.

Пусть $u(x, y)$, $v(x, y)$ — произвольные гармонически сопряженные в области D функции, q — постоянная. Вдоль любой геодезической $\gamma \in D$, задаваемой уравнениями

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \lambda^2,$$

имеет место тождество

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(u(x, y)(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + 2v(x, y)\dot{x}\dot{y} + q \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) &= \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(u\lambda^2) + v \frac{\partial}{\partial y} \lambda^2 + q \frac{\partial}{\partial y} (\ln \lambda) \right) \dot{x} + \\ &+ \left(-\frac{\partial}{\partial y}(u\lambda^2) + v \frac{\partial}{\partial x} \lambda^2 - q \frac{\partial}{\partial x} (\ln \lambda) \right) \dot{y}. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть

$$\mathcal{R}(a, b) = \left(u(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + 2v\dot{x}\dot{y} + q \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \Big|_{(x, y)=a}^{(x, y)=b}, \quad (16)$$

где a и b — точки границы области D и пусть

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(u\lambda^2) + v \frac{\partial}{\partial y} \lambda^2 + q \frac{\partial}{\partial y} \ln \lambda \right), \\ \beta &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(u\lambda^2) - v \frac{\partial}{\partial x} \lambda^2 + q \frac{\partial}{\partial x} \ln \lambda \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Интегрирование (15) по геодезической $\gamma(a, b)$ приводит к основному тождеству

$$\mathcal{R}(a, b) = \int_{\gamma(a, b)} \alpha dx + \beta dy.$$

Отсюда, как и выше, и при выполнении тех же условий, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Функция $\mathcal{R}(a, b) = f(b) - f(a)$, если и только если

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad (x, y) \in D.$$

Равенство $\partial \alpha / \partial y = \partial \beta / \partial x$, как видно из (17), влечет уравнение 2-го порядка относительно функции $\lambda(x, y)$, определяющей конформно евклидову метрику

$$ds^2 = \lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2).$$

Замечание 2. Определенные формулами (14), (16) функции $\mathcal{P}(a, b)$, $\mathcal{R}(a, b)$ могут быть вычислены в зависимости от производных расстояний $w(y, z)$ соответствующих римановых метрик при $y \in \partial D$, $z \in \partial D$, и имеет место продолжение таких соотношений в область $D \times D$.

5. Критерий горизонтальной однородности среды

Рассмотрим обратную кинематическую задачу сейсмологии, поставленную в полуплоскости $z > 0$ евклидова пространства \mathbb{R}^2 переменных (x, z) . Граница области — прямая $z = 0$, по ней располагаются источники и приемники сигнала. Передача сигналов происходит в полуплоскости $z > 0$ (в глубине среды) со скоростью $v(x, z) = \frac{1}{\lambda(x, z)}$. В точке границы $(x_0, 0)$ происходят возмущения, а в точках границы $(x, 0)$ фиксируются моменты времени $\tau(x_0, x)$, в которые сигнал доходит до этих точек. Точка $(x_0, 0)$ является параметром задачи. Напомним, что согласно принципу Ферма возмущение, произведенное в точке $(x_0, 0)$, доходит до точки $(x, 0)$ по такой кривой, на которой реализуется минимум функционала

$$T(L) = \int_{L(x_0, x)} \lambda(x, z) ds, \quad (18)$$

где $L(x_0, x)$ — произвольная гладкая кривая, соединяющая точки $(x_0, 0)$ и $(x, 0)$, а ds — элемент ее длины. Функционал (18) определяет время пробега сигнала по кривой $L(x_0, x)$. Кривая $L(x_0, x)$, на которой реализуется минимум функционала (18), называется лучом, соединяющим точки $(x_0, 0)$ и $(x, 0)$, будем обозначать ее через $\gamma(x_0, x)$. Экстремали функционала (18) или лучи интерпретируются как геодезические римановой метрики (5), заданной в рассматриваемой области $z > 0$. Таким образом,

$$\tau(x_0, x) = T(\gamma) = \int_{\gamma(x_0, x)} \lambda(x, z) ds = \min_{L(x_0, x)} \int_{L(x_0, x)} \lambda(x, z) ds.$$

Для римановой метрики (5) в предположении, что $\lambda(x, z) = \lambda(z)$ зависит только от переменной z («глубины»), символы Кристоффеля выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dz}, \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dz}, \end{aligned}$$

а система уравнений, определяющая геодезические такой метрики, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{2}{\lambda} \frac{d\lambda}{dz} \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dz} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dz} \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим горизонтально однородную среду, в которой скорость распространения сигнала линейно возрастает с глубиной, т. е. $v = az + b$, $a > 0$, $b > 0$. В этой среде задается метрика $ds^2 = \frac{1}{(az + b)^2} (dx^2 + dz^2)$. При такой метрике система (19) преобразуется в систему

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{2a}{az + b} \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{a}{az + b} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{a}{az + b} \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Как известно [18], геодезическая этой метрики, соединяющая точки $(x_0, 0)$ и $(x, 0)$, является дугой окружности с центром в точке (x_1, z_1) , где

$$x_1 = \frac{x + x_0}{2}, \quad z_1 = -\frac{b}{a},$$

и радиусом $R = \sqrt{(x - x_1)^2 + z_1^2} = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + z_1^2}$. Отметим, что центр любой такой окружности лежит на прямой $z = -\frac{b}{a}$.

Несложные вычисления позволяют найти время $\tau(x_0, x)$ в явном виде,

$$\tau(x_0, x) = \frac{1}{a} \left| \ln \frac{R + x_0 - x_1}{R + x - x_1} \right|.$$

Теоретические результаты, изложенные выше, говорят о том, что

$$\lambda^2(x, z) = \lambda_0^2(z) + \mu^2(x)$$

тогда и только тогда, когда для любых пар точек $(u, 0)$ и $(v, 0)$ для функционала

$$F(\tau, u, v) \equiv \left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 \quad (20)$$

верно равенство $F(\tau, u, v) = \mu^2(u) - \mu^2(v)$. Следовательно, критерий горизонтальной однородности среды гласит, что функция $\lambda = \lambda(x, z)$ является функцией, зависящей только от глубины z тогда и только тогда, когда $F \equiv 0$.

6. Численное исследование критерия горизонтальной однородности среды

Проведенные численные эксперименты для горизонтально однородной среды были прежде всего направлены на исследование устойчивости дифференциального критерия (20) к внесенным ошибкам, а также влияния на него различных способов разностной аппроксимации производных. Моделируемая система наблюдений, состоящая из n равноотстоящих приемников, размещена по оси Ox на отрезке $[0, L]$, принадлежащем прямой $z = 0$. Источник сигнала является одновременно и приемником. Исходя из некоторого

источника с номером i , сигнал распространяется в среде по дуге окружности и доходит до j -го приемника за время τ_{ij} , при этом $\tau_{ii} = 0$. Времена пробега для каждой пары источник-приемник, таким образом, можно представить в виде матрицы $n \times n$, где в строке с номером i записаны времена пробега сигнала между i -м источником и всеми приемниками.

1) Исходными данными для задачи являются времена пробега сигнала между каждой парой источник-приемник (двумерный массив τ_{ij}), длина отрезка L и количество приемников n . При проведении расчетов полагаем $n = 100$, $L = 1$ и параметры линейности среды $a = 1$, $b = 4$.

2) Синтезированные кинематические данные используются для вычисления функционала F ; частные производные приближаются разностными отношениями либо сплайнами (двумерный массив F_{ij}).

3) Если в данные τ_{ij} шум не вносится, то при разностной аппроксимации производных получаем $F_{ij} = 0$ для всех i, j .

4) Уже для уровня шума 0,002 % большая часть значений F_{ij} не обращается в 0, поэтому в случае задания данных с шумом дифференциальный критерий горизонтальной однородности среды заменяем проверкой неравенства

$$\sum_{j=1}^n \frac{F_{ij}^2}{n^2} < \varepsilon, \quad (21)$$

где ε — «чувствительность критерия».

Тест 1. Исследуется влияние на функционал F шума уровня $\delta = \beta \xi \cdot \tau_{max}/2$, где ξ — произвольное число из отрезка $[-1, 1]$; β — уровень шума; $\tau_{max} = \max \tau_{ij}$. При внесении шума в данные и последующем численном дифференцировании наблюдаются быстрый рост ошибки с увеличением уровня шума (рис. 1).

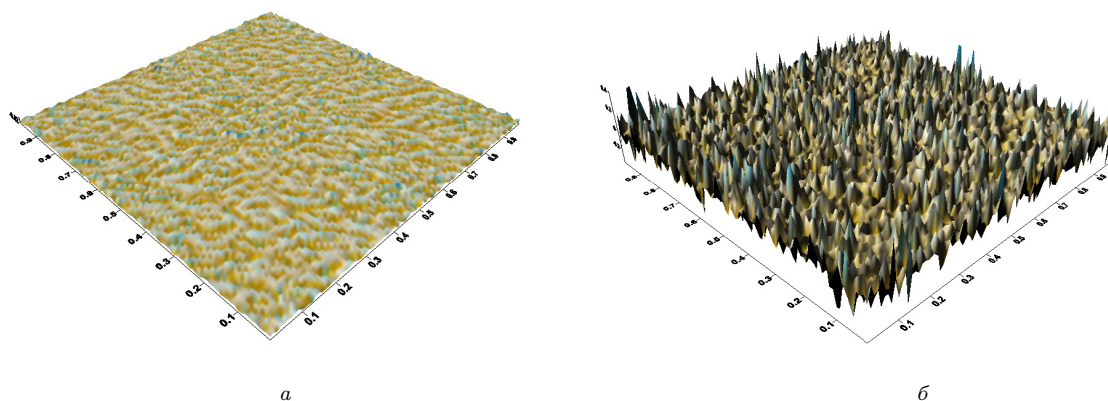


Рис. 1. График функционала F при $\beta = 0,4 \%$ (а), $\beta = 4 \%$ (б)

Приведем предельные значения ε чувствительности критерия в зависимости от уровня шума β :

β	0,4 %	2 %	4 %
ε	$3 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$

Отметим, что использование центрально-разностной аппроксимации производных немного улучшало картину в сравнении с правыми или левыми разностями, однако дальнейшее расширение шаблона, например вычисление производной по пяти точкам, уже не давало ощутимого улучшения.

Существенное влияние даже небольшого шума в данных на величину функционала F вызывает необходимость сглаживания данных. Для этого будем использовать простейшую формулу локальной аппроксимации кубическими сплайнами [19], обладающую сглаживающим эффектом. Функцию времени $\tau(u, v)$ с заданными значениями τ_{ij} в области $[0, L] \times [0, L]$ в узлах равномерной сетки с шагом $h = \frac{L}{n-1}$ приближаем бикубическим сплайном вида

$$S(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{ij} \cdot B(u/h - i) \cdot B(v/h - j), \quad (22)$$

где $B(t)$ — кубический B -сплайн, определяемый равенством

$$B(t) = \begin{cases} \frac{4}{3} + 2t + t^2 + \frac{t^3}{6}, & -2 \leq t \leq -1, \\ \frac{2}{3} - t^2 - \frac{t^3}{2}, & -1 \leq t \leq 0, \\ \frac{2}{3} - t^2 + \frac{t^3}{2}, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{4}{3} - 2t + t^2 - \frac{t^3}{6}, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Тест 2. Для проверки критерия горизонтальной однородности вместо численного дифференцирования данных τ_{ij} будем использовать дифференцирование функции (22), аппроксимирующей функцию времени $\tau(u, v)$. Отметим, что в этом случае даже на данных без шума получаем $F_{ij} \neq 0$, так как используется не интерполяция, а аппроксимация.

На рис. 2 приведены графики функционала F для данных с уровнем шума $\beta = 5\%$ при использовании численного дифференцирования и сплайн-аппроксимации (22).

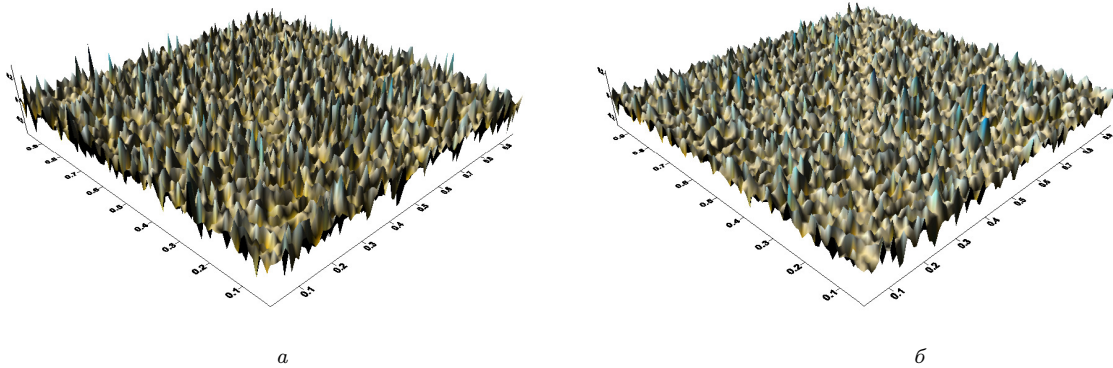


Рис. 2. Графики функционала F при численном дифференцировании (а) и при сплайн-аппроксимации (б)

Приведем предельные значения ε чувствительности критерия в зависимости от уровня шума β при использовании аппроксимации кубическими сплайнами:

β	0,4 %	2 %	4 %
ε	$6 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-6}$

Тест 3. Теперь систему из n источников-приемников разместим на отрезке $[0, L]$ случайным образом. Для приближения функции времени $\tau(u, v)$ будем использовать D^m -сплайн, позволяющий аппроксимировать хаотически расположенные данные (см., например, [8]). В качестве проверки критерия горизонтальной однородности среды будем проверять выполнение неравенства (21). Однако вычислять значения F_{ij} функционала будем все-таки на равномерной сетке, а не в точках задания данных. В данном эксперименте $n = 50$. Предельные значения чувствительности критерия в зависимости от уровня шума при интерполяции и сглаживании D^m -сплайнами следующие:

β	0 %	0,4 %	2 %	4 %
ε (интерполяция)	$4,11 \cdot 10^{-3}$	$1,37 \cdot 10^{-2}$	2,97	46,0
ε (сглаживание)	$3,46 \cdot 10^{-3}$	$3,48 \cdot 10^{-3}$	$3,54 \cdot 10^{-3}$	$3,60 \cdot 10^{-3}$

Интересно отметить, что в данном примере сглаживание улучшает результат даже при отсутствии шума в данных.

В работе проведено численное исследование критерия локальной горизонтальной однородности среды по кинематическим данным. Рассмотрено влияние характеристик среды на времена пробега сигнала между приемниками, находящимися на поверхности среды, и на функционал F , равенство нулю которого является критерием локальной горизонтальной однородности среды. Исследован порог чувствительности критерия к разным уровням шума. Рассмотрена аппроксимация кубическими сплайнами и D^m -сплайнами, понижающая как относительную ошибку кинематических данных, так и абсолютную ошибку функционала F .

Список литературы

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
2. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1980.
3. Сейсмическая томография / Под ред. Г. Нолета. М.: Мир, 1990.
4. Аниконов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978.
5. Аниконов Ю. Е. О некоторых задачах вариационного исчисления и интегральной геометрии. Новосибирск, 1968. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ)
6. Бернштейн И. Н., Гервер М. А. Условия разрешимости метрик по годографам // Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1980. С. 50–73.
7. Бухгейм А. Л. Уравнение Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983.

8. Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л. Построение математической модели универсальной характеристики радиально-осевой гидротурбины // Сиб. журн. индустр. мат. 1998. Т. 1, № 1. С. 77–88.

9. Гервер М. Л., Маркушевич В. М. Исследование неоднозначности при определении по годографу скорости распространения сейсмических волн // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 6. С. 1377–1380.

10. Голубятников В. П., Пестов Л. Н. О траекториях динамической системы, определенной однопараметрической группой конформных преобразований R^3 // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 1. С. 63–67.

11. Мухометов Р. Г. Об одной задаче восстановления римановой метрики // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 3. С. 119–135.

12. Гурвич И. И., Боганик Г. Н. Сейсмическая разведка. М.: Недра, 1980.

13. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М.: Изд-во Иностран. лит., 1957.

14. Аниконов Ю. Е. Формулы и неравенства в обратной кинематической задаче сейсмики // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, № 3. С. 521–523.

15. Аниконов Ю. Е. Обратная кинематическая задача сейсмики и некоторые вопросы звездной динамики // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252, № 1. С. 14–17.

16. Аниконов Ю. Е., Пестов Л. Н. Формулы в линейных и нелинейных задачах томографии. Новосибирск, 1990.

17. Пестов Л. Н. Первые интегралы геодезических конформной метрики и обратная кинематическая задача сейсмики // Вопросы корректности обратных задач математической физики. Новосибирск, 1982. С. 109–119.

18. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 4, ч. 1.

19. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

Материал поступил в редколлегию 13.12.2010

Адреса авторов

АНИКОНОВ Юрий Евгеньевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: anikon@math.nsc.ru

ВОЛКОВ Юрий Степанович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: volkov@math.nsc.ru

ГОРШКАЛЕВ Сергей Борисович
Институт нефтегазовой геологии
и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 3, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: GorshkalevSB@ipgg.nsc.ru

ДЕРЕВЦОВ Евгений Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: dert@math.nsc.ru

МАЛЬЦЕВА Светлана Васильевна
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: svetlana.v.maltseva@gmail.com