УДК 517.956.3 + 532.135

Н. В. Бамбаева, А. М. Блохин

К ВОПРОСУ О t-ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ СРЕД*

Рассматриваются уравнения, описывающие течения несжимаемой вязкоупругой (полимерной) жидкости. Обсуждается вопрос о t-гиперболичности этой системы уравнений. Строится стационарное решение, аналогичное решению Пуазейля для системы уравнений Навье – Стокса.

Ключевые слова: полимерная среда, t-гиперболичность, стационарное течение.

Введение

В работах [1–3] дается вывод математической модели, предназначенной для описания течений полимерных сред. Целью настоящей работы является дальнейшее изучение предложенных уравнений с точки зрения теории дифференциальных уравнений. В частности изучается вопрос о t-гиперболичности системы уравнений. Заметим, что то или иное решение этого вопроса является важным с точки зрения правильной постановки граничных условий в случае рассмотрения смешанных задач для предложенных уравнений.

Кроме того, в работе изучается стационарное течение полимерной среды в плоском бесконечном канале.

Предварительные сведения

В работе [1] была предложена математическая модель для описания течений несжимаемой вязкоупругой (полимерной) жидкости. В плоском случае нестационарные течения полимерных сред описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$D = \operatorname{div} \mathbf{u} = u_x + \upsilon_y = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{du}{dt} + p_x = (\sigma_{11})_x + (\sigma_{12})_y, \tag{2}$$

$$\rho \frac{d\upsilon}{dt} + p_y = (\sigma_{12})_x + (\sigma_{22})_y, \tag{3}$$

$$\frac{da_{11}}{dt} - 2A_1 u_x - 2a_{12} u_y + \frac{1 + \bar{k} I}{\tau_0} a_{11} = -\frac{3\beta}{\tau_0}(a_{11}^2 + a_{12}^2), \tag{4}$$

* Финансовая поддержка исследованиям оказана в рамках выполнения проекта РФФИ (код проекта 10-01-00320-а); междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН (код проекта 2009-91) и в рамках реализации Аналитической ведомственной целевой программы Федерального агентства по образованию и Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1/4591; 2009–2010 гг.).

$$\frac{da_{12}}{dt} - 2A_1\upsilon_x - A_2u_y + \frac{1+\overline{k}I}{\tau_0}a_{12} = -\frac{3\beta}{\tau_0}Ia_{12}, \tag{5}$$

$$\frac{da_{22}}{dt} - 2A_2\upsilon_y - 2a_{12}\upsilon_x + \frac{1+\overline{k}I}{\tau_0}a_{22} = -\frac{3\beta}{\tau_0}(a_{12}^2 + a_{22}^2). \tag{6}$$

Здесь

t — время;

u, υ — компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$ в декартовой системе координат x, y;

ρ (= const) — плотность среды;

p — гидростатическое давление;

$\sigma_{ij} = 3\frac{\eta_0}{\tau_0}a_{ij},\ i,j = 1,2;$

a_{ij} — симметричный тензор анизотропии второго ранга;

$I = (a_{11} + a_{22})$ — первый инвариант тензора анизотропии;

$\overline{k} = k - \beta$;

k, β — феноменологические параметры модели ($0 < \beta < 1$);

η_0, τ_0 — так называемые начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации (см. [1; 2]);

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \bigtriangledown)$ — субстанциональная производная;

$A_1 = a_{11} + \frac{1}{3}$, $A_2 = a_{22} + \frac{1}{3}$.

Введем новые независимые и зависимые переменные:

$$\overline{x} = \frac{x}{l}, \quad \overline{y} = \frac{y}{l}, \quad \overline{t} = \frac{u_{\text{н}}t}{l},$$
$$\overline{u} = \frac{u}{u_{\text{н}}}, \quad \overline{\upsilon} = \frac{\upsilon}{u_{\text{н}}}, \quad \overline{p} = \frac{p}{\rho u_{\text{н}}^2}, \quad \overline{a}_{ij} = \frac{3l}{\tau_0 u_{\text{н}}}a_{ij}, \quad i,j = 1,2,$$

где l — характерная длина (в качестве l возьмем ширину плоского канала, рис. 1), $u_{\text{н}}$ — характерная скорость.

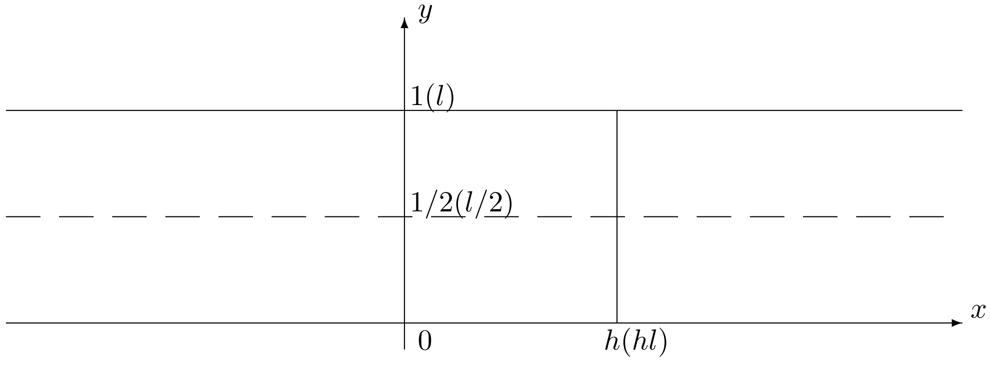

Рис. 1. Плоский канал

В обезразмеренном виде система (1)–(6) перепишется так (черту над переменными опускаем):

$$D = \operatorname{div}\mathbf{u} = u_x + \upsilon_y = 0, \tag{1$'$}$$

$$\frac{du}{dt} + p_x = \frac{1}{Re}\Big\{(a_{11})_x + (a_{12})_y\Big\}, \tag{2$'$}$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} + p_y = \frac{1}{Re}\Big\{(a_{12})_x + (a_{22})_y\Big\}, \tag{3'}$$

$$\frac{da_{11}}{dt} - 2A_1 u_x - 2a_{12}u_y + K_I a_{11} = -\beta(a_{11}^2 + a_{12}^2), \tag{4'}$$

$$\frac{da_{12}}{dt} - 2A_1\upsilon_x - A_2 u_y + \widetilde{K}_I a_{12} = 0, \tag{5'}$$

$$\frac{da_{22}}{dt} - 2A_2\upsilon_y - 2a_{12}\upsilon_x + K_I a_{22} = -\beta(a_{12}^2 + a_{22}^2). \tag{6'}$$

Здесь

$$A_1 = a_{11} + \frac{1}{W}, \quad A_2 = a_{22} + \frac{1}{W},$$
$$K_I = \frac{1}{W} + \frac{\overline{k}}{3}I, \quad \widetilde{K}_I = \frac{1}{W} + \frac{\widehat{k}}{3}I, \quad \widehat{k} = k + 2\beta,$$
$$Re = \frac{\rho u_{\text{н}} l}{\eta_0} \quad \text{— число Рейнольдса},$$
$$W = \frac{\tau_0 u_{\text{н}}}{l} \quad \text{— число Вейсенберга (см. [3])}.$$

Замечание 1. Вместо системы $(1')$–$(6')$ можно рассматривать систему $(2')$–$(6')$ с дополнительным соотношением следующего вида:

$$\operatorname{div}\mathbf{Q} = \operatorname{div}(\bigtriangledown p) = \triangle_{x,y}p = \frac{1}{Re}\Big\{(a_{11})_{xx} + 2(a_{12})_{xy} + (a_{22})_{yy}\Big\} - \\ - 2\Big\{(u_x)^2 + u_y\upsilon_x\Big\} = f, \tag{7}$$

где

$$\triangle_{x,y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \quad \text{— оператор Лапласа}, \quad \mathbf{Q} = \bigtriangledown p.$$

Соотношение (7) получается следующим образом. Подействуем оператором div на уравнения $(2')$, $(3')$. Тогда с учетом уравнения $(1')$ мы получим соотношение (7), которое надо понимать как дифференциальное уравнение для определения давления p.

Понятно, что системы $(2')$–$(6')$, (7) и $(1')$–$(6')$ эквивалентны на гладких решениях исходной системы $(1')$–$(6')$. В самом деле, подействуем на уравнения $(2')$, $(3')$ оператором div. Полученное соотношение с учетом (7) приводится к виду

$$\frac{dD}{dt} + (\upsilon_y - u_x)D = 0,$$

т. е.

$$D = u_x + \upsilon_y = 0,$$

если

$$D\,\Big|_{t=0} = 0. \tag{8}$$

Соотношение (8) есть условие на начальные данные для системы $(2')$–$(6')$, (7).

Замечание 2. Как и в случае уравнений Навье – Стокса, для вязкой несжимаемой жидкости могут быть представлены различные формы записи системы $(1')$–$(6')$ (например, в терминах функции тока и вихря и т. д.).

Систему (2′)–(6′) удобно переписать в векторном виде

$$\mathbf{U}_t + B\mathbf{U}_x + C\mathbf{U}_y + \mathbf{F} = 0, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ \upsilon \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} u & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 \\ -2A_1 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & 0 & u & 0 \\ 0 & -2a_{12} & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \upsilon & 0 & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 \\ 0 & \upsilon & 0 & 0 & -\frac{1}{Re} \\ -2a_{12} & 0 & \upsilon & 0 & 0 \\ -A_2 & 0 & 0 & \upsilon & 0 \\ 0 & -2A_2 & 0 & 0 & \upsilon \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ K_I a_{11} + \beta(a_{11}^2 + a_{12}^2) \\ \widetilde{K}_I a_{12} \\ K_I a_{22} + \beta(a_{12}^2 + a_{22}^2) \end{pmatrix}.$$

1. Условия t-гиперболичности системы (9)

Рассмотрим вопрос о t-гиперболичности системы (9) в предположении, что давление p — известная функция (по поводу определения t-гиперболичности см., например, [4]). Характеристическое уравнение для системы (9)

$$\det(\tau I_5 + \xi B + \eta\, C) = 0, \tag{10}$$

где I_5 — единичная матрица порядка 5; ξ, η — вещественные числа ($\xi^2 + \eta^2 \neq 0$), после громоздких выкладок может быть приведено к следующему виду:

$$\triangle\Big\{\vartheta^2 - \frac{3A_2\eta^2 - A_1\xi^2}{Re}\vartheta - \frac{2(A_1\xi^2 - A_2\eta^2)}{Re^2}A_2\eta^2\Big\} = 0. \tag{11}$$

Здесь $\triangle = \tau + u\xi + \upsilon\eta$, $\vartheta = \triangle^2 - \dfrac{2\xi(A_1\xi + a_{12}\eta)}{Re}$.

Из (11) следует:

а) $\triangle = 0$;

б) $\triangle^2 = \dfrac{2}{Re}\big(A_1\xi^2 + a_{12}\xi\eta + A_2\eta^2\big)$;

в) $\triangle^2 = \dfrac{1}{Re}\big(A_1\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + A_2\eta^2\big)$.

Таким образом, если матрица

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} A_1 & a_{12} \\ a_{12} & A_2 \end{pmatrix} > 0,$$

т. е.

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_1A_2 - a_{12}^2 > 0, \tag{12}$$

то характеристическое уравнение (10) при любых вещественных ξ, η ($\xi^2 + \eta^2 \neq 0$) имеет пять вещественных и различных корней τ:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= -u\xi - \upsilon\eta, \\ \tau &= -u\xi - \upsilon\eta \pm \sqrt{\frac{2}{Re}\,(A_1\xi^2 + a_{12}\xi\eta + A_2\eta^2)}, \\ \tau &= -u\xi - \upsilon\eta \pm \sqrt{\frac{1}{Re}\,(A_1\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + A_2\eta^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Условия (12) t-гиперболичности системы (9) проверяются на ее конкретном решении. Заметим также, что знание корней τ (см. формулы (13)) характеристического уравнения (10) позволяет правильно поставить краевые условия для системы (9) в том случае, когда ее решение при каждом t ищется в ограниченной области $\Omega \subset \mathrm{R}^2$.

В следующем параграфе мы построим стационарное решение системы (1′)–(6′), аналогичное *решению Пуазейля* для системы уравнений Навье – Стокса (см. по этому поводу [5]). Условия (12) t-гиперболичности системы (9) будут проверены на этом решении.

2. Стационарное течение полимерной среды в плоском бесконечном канале

Рассмотрим частное решение системы (1′)–(6′):

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{U}(t,x,y) = \widehat{\mathbf{U}}(y), \\ &p(t,x,y) = \frac{1}{Re}\widehat{a}_{22}(y) + \widehat{p}_0 - \widehat{A}x, \end{aligned}\right\}$$

соответствующее стационарному течению вязкоупругой среды в плоском бесконечном канале (см. рис. 1) под действием постоянного перепада давления вдоль оси канала $y = \frac{1}{2}$. Здесь

$$\widehat{\mathbf{U}}(y) = \begin{pmatrix} \widehat{u}(y) \\ 0 \\ \widehat{a}_{11}(y) \\ \widehat{a}_{12}(y) \\ \widehat{a}_{22}(y) \end{pmatrix},$$

причем функции $\widehat{u}(y), \widehat{a}_{11}(y), \widehat{a}_{22}(y)$ симметричны относительно оси канала $y = \dfrac{1}{2}$; $\widehat{p}_0$ — значение давления на оси канала при $x = 0$; $\widehat{A} = \dfrac{\widehat{\triangle p}}{\rho u_{\text{н}}^2 h}$, где $-\dfrac{\widehat{\triangle p}}{\rho u_{\text{н}}^2}$ — безразмерный перепад давления на отрезке h, причем величина $\widehat{\triangle p} > 0$ (см. рис. 1).

Замечание 3. Из соображений симметрии следует, что $\widehat{a}_{11}(\frac{1}{2}) = \widehat{a}_{12}(\frac{1}{2}) = \widehat{a}_{22}(\frac{1}{2}) = 0$.

Для определения функций $\widehat{u}(y)$, $\widehat{a}_{11}(y)$, $\widehat{a}_{12}(y)$, $\widehat{a}_{22}(y)$ из системы (1′)–(6′) получаем следующие соотношения:

$$\frac{d}{dy}\,\widehat{a}_{12}(y) = \widehat{a}'_{12}(y) = -Re\widehat{A} = -\widehat{D},$$

т. е.

$$\widehat{a}_{12}(y) = \frac{\widehat{D}}{2}(1 - 2y), \quad 0 \le y \le 1;$$

$$\widehat{u}'(y) = \frac{\frac{\widehat{k}}{3}\widehat{I} - \widehat{a}_{22}(y)}{\widehat{A}_2}\,\widehat{a}_{12}(y) + \widehat{a}_{12}(y) = \frac{\widetilde{K}_{\widehat{I}}}{\widehat{A}_2}\,\widehat{a}_{12}(y), \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}, \tag{14}$$

$$K_{\widehat{I}}\,\widehat{a}_{22}(y) + \beta\left(\widehat{a}_{12}^2(y) + \widehat{a}_{22}^2(y)\right) = 0, \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}, \tag{15}$$

$$K_{\widehat{I}}\,\widehat{a}_{11}(y) + \beta\left(\widehat{a}_{11}^2(y) + \widehat{a}_{12}^2(y)\right) - 2\widehat{a}_{12}^2(y)\frac{\widetilde{K}_{\widehat{I}}}{\widehat{A}_2} = 0, \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}. \tag{16}$$

Здесь

$$\widehat{I} = \widehat{a}_{11}(y) + \widehat{a}_{22}(y), \qquad K_{\widehat{I}} = W^{-1} + \frac{\overline{k}}{3}\widehat{I},$$

$$\widetilde{K}_{\widehat{I}} = W^{-1} + \frac{\widehat{k}}{3}\widehat{I}, \qquad \widehat{A}_2 = W^{-1} + \widehat{a}_{22}(y).$$

С учетом условия прилипания $\widehat{u}(0) = 0$ из (14) получаем:

$$\widehat{u}(y) = \frac{\widehat{D}}{2}\,y(1-y) + \int\limits_0^y \frac{\frac{\widehat{k}}{3}\widehat{I} - \widehat{a}_{22}}{\widehat{A}_2}\,(\zeta)\,\widehat{a}_{12}(\zeta)\,d\zeta, \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}\,. \tag{17}$$

Замечание 4. Из (17) следует, что профиль функции $\widehat{u}(y)$ отличается от профиля Пуазейля для вязкой жидкости (см., например: [5]). Максимальное значение скорости $\widehat{u}_{\max}$ находим по формуле (17) при $y = \frac{1}{2}$.

Анализ соотношений (15), (16) будем проводить для двух случаев: $k = \beta$ и $k \neq \beta$.

1) Пусть $k = \beta$, т. е. $\overline{k} = 0$. Тогда условие (15) перепишется так:

$$\widehat{a}_{22}^2(y) + \widetilde{W}^{-1}\widehat{a}_{22}(y) + \widehat{a}_{12}^2(y) = 0, \quad \widetilde{W} = W\beta,$$

т. е.

$$\widehat{a}_{22}(y) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\widetilde{W}^2\widehat{a}_{12}^2(y)}}{2\widetilde{W}} \tag{18}$$

$$\left(\widehat{a}_{22}\Big(\frac{1}{2}\Big) = 0, \quad \widehat{a}_{22}(y) < 0 \quad \text{при} \quad 0 \le y < \frac{1}{2}\right).$$

Сделаем в (18) замену:

$$\sin\alpha = 2\widehat{a}_{12}(y)\widetilde{W}, \quad \alpha = \alpha(y), \quad \alpha \in [0, \alpha^*], \quad 0 \le y \le \frac{1}{2},$$

где

$$\sin\alpha^* = \widehat{D}\widetilde{W} \le 1 \quad (y = 0).$$

Тогда

$$\widehat{a}_{22}(y) = \widehat{a}_{22}(\alpha) = -\frac{1}{\widetilde{W}}\sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{18$'$}$$

Замечание 5. Мы потребуем также, чтобы

$$\widehat{A}_2 = W^{-1} + \widehat{a}_{22}(y) = \frac{1}{\widetilde{W}}\left(\beta - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b(\alpha)}{\widetilde{W}} > 0$$

(см. условия t-гиперболичности (12)).

Значит, должно выполняться неравенство: $\sin^2\frac{\alpha^*}{2} < \beta$, т. е.

$$\sqrt{1-(\widehat{D}\widetilde{W})^2} > 1-2\beta, \quad \widehat{D}\widetilde{W} \le 1. \tag{19}$$

Рассмотрим более внимательно неравенство (19). При $\beta > \frac{1}{2}$ неравенство (19) выполнено, если $\widehat{D}\widetilde{W} \le 1$. При $\beta = \frac{1}{2}$ неравенство (19) выполнено, если $\widehat{D}\widetilde{W} < 1$. Пусть $\beta < \frac{1}{2}$. Тогда неравенство (19) перепишется так:

$$\widehat{D}W < 2\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}$$

или

$$\widehat{D}\widetilde{W} < 2\sqrt{\beta(1-\beta)}. \tag{19$'$}$$

Условие (16) перепишем так:

$$\widehat{a}_{11}^2(y) + \left(\widetilde{W}^{-1} - \frac{2\widehat{a}_{12}^2(y)}{\widehat{A}_2}\right)\widehat{a}_{11}(y) - \widehat{a}_{12}^2(y)\left(1 + 2\frac{1-\beta}{\widetilde{W}\widehat{A}_2}\right) = 0. \tag{20}$$

С учетом (18$'$) из (20) получаем:

$$\widehat{a}_{11}(y) = \widehat{a}_{11}(\alpha) = \frac{-\left(1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{2b(\alpha)}\right) + \sqrt{\left(1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{2b(\alpha)}\right)^2 - \dfrac{\beta + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{b(\alpha)}\sin^2\alpha}}{2\widetilde{W}} \tag{21}$$

$$\left(\widehat{a}_{11}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \widehat{a}_{11}(y) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le y < \frac{1}{2}\right).$$

Наконец, при $\overline{k} = 0$ формула (17) перепишется так:

$$\widehat{u}(y) = \frac{\widehat{D}}{2}y(1-y) + \frac{1}{2\widetilde{W}}\int\limits_0^y \frac{\beta\widetilde{W}\widehat{a}_{11} + (1-\beta)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{b(\alpha)}(\zeta)\sin\alpha(\zeta)\,d\zeta. \tag{22}$$

Замечание 6. Интеграл в формуле (22) можно преобразовать еще так:

$$\frac{1}{2\widetilde{W}}\int\limits_0^y \frac{\beta\widetilde{W}\widehat{a}_{11} + (1-\beta)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{b(\alpha)}(\zeta)\sin\alpha(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{4\widehat{D}\widetilde{W}^2}\int\limits_\alpha^{\alpha^*} \frac{\beta\widetilde{W}\widehat{a}_{11}(\eta) + (1-\beta)\sin^2\frac{\eta}{2}}{b(\eta)}\sin\eta\cos\eta\,d\eta.$$

Последнее условие t-гиперболичности (12) на полученном решении перепишется так:

$$\left\{4\beta b(\alpha) - \left[2b(\alpha) - \sin^2\alpha\right] + \sqrt{\left[2b(\alpha) + \sin^2\alpha\right]^2 - 4\left(\beta^2 - \sin^4\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\alpha}\right\} - \sin^2\alpha > 0$$

или

$$\left\{b(\alpha)(2\beta-1) + \sqrt{\left[b(\alpha) + \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right]^2 - \left(\beta^2 - \sin^4\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\alpha}\right\} > 0. \tag{23}$$

Поскольку

$$\left[b(\alpha)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right]^2-\left(\beta^2-\sin^4\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\alpha=$$
$$=b^2(\alpha)+b(\alpha)\sin^2\alpha+\frac{1}{4}\sin^4\alpha-\left(\beta^2-\sin^4\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\alpha=$$
$$=\left[b(\alpha)-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right]^2+b(\alpha)\left(1-\beta+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\alpha>0,$$

то неравенство (23) выполнено при $\beta\geq\frac{1}{2}$.

При $\beta<\frac{1}{2}$ неравенство (23) перепишется так:

$$\beta(1-\beta)\left[\sin^2\alpha+4b^2(\alpha)\right]>0.$$

Итак, условия t-гиперболичности (12) на построенном решении при $\overline{k}=0$ выполнены.

2) $k\neq\beta$, т. е. $\overline{k}\neq 0$. Для нахождения функций $\widehat{a}_{11}(y)$, $\widehat{a}_{22}(y)$ предлагается организовать следующий итерационный процесс. Соотношение (15) перепишем так:

$$\widehat{A}_0\widehat{a}_{22}^2+A_{\overline{\varepsilon}}\,\widehat{a}_{22}+\widehat{a}_{12}^2=0, \tag{24}$$

где $\widehat{A}_0=1+\frac{\overline{\varepsilon}}{3}$, $\overline{\varepsilon}=\frac{\overline{k}}{\beta}$, $A_{\overline{\varepsilon}}=\left(\widetilde{W}^{-1}+\frac{\overline{\varepsilon}}{3}\,\widehat{a}_{11}^{(n)}\right)$, $\widehat{a}_{22}=\widehat{a}_{22}^{(n+1)}$, $\widehat{a}_{22}^{(n+1)}$, $\widehat{a}_{11}^{(n)}$ — соответствующие итерации функций $\widehat{a}_{22}$, $\widehat{a}_{11}$, $(n=0,1,\dots)$, причем $\widehat{a}_{22}^{(0)}$, $\widehat{a}_{11}^{(0)}$ вычисляются по формулам $(18')$, (21).

Из (24) получаем:

$$\widehat{a}_{22}^{(n+1)}(y)=\frac{-A_{\overline{\varepsilon}}+\sqrt{A_{\overline{\varepsilon}}^2-4\widehat{A}_0\widehat{a}_{12}^2(y)}}{2\widehat{A}_0}.$$

Соотношение (16) примет следующий вид:

$$\widehat{A}_0\widehat{a}_{11}^2+B_{\widehat{\varepsilon}}\,\widehat{a}_{11}+\widehat{B}_0=0.$$

Здесь $B_{\widehat{\varepsilon}}=\widetilde{W}^{-1}+\frac{\overline{\varepsilon}}{3}\,\widehat{a}_{22}^{(n+1)}-2\frac{\widehat{\varepsilon}}{3}\,\widehat{a}_{12}^2\frac{1}{\widehat{A}_2^{(n+1)}}$, $\widehat{A}_2^{(n+1)}=W^{-1}+\widehat{a}_{22}^{(n+1)}$, $\widehat{\varepsilon}=\frac{\widehat{k}}{\beta}$,
$\widehat{B}_0=\widehat{a}_{12}^2\left(1-2\frac{\widetilde{W}^{-1}+\frac{\widehat{\varepsilon}}{3}\,\widehat{a}_{22}^{(n+1)}}{\widehat{A}_2^{(n+1)}}\right)$.

Следовательно,

$$\widehat{a}_{11}^{(n+1)}(y)=\frac{-B_{\widehat{\varepsilon}}+\sqrt{B_{\widehat{\varepsilon}}^2-4\widehat{A}_0\widehat{B}_0}}{2\widehat{A}_0}.$$

Описанный выше итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено следующее неравенство:

$$\max\left\{\max_{0\leq y\leq\frac{1}{2}}\left|\widehat{a}_{11}^{(n+1)}(y)-\widehat{a}_{11}^{(n)}(y)\right|,\ \max_{0\leq y\leq\frac{1}{2}}\left|\widehat{a}_{22}^{(n+1)}(y)-\widehat{a}_{22}^{(n)}(y)\right|\right\}\leq\delta,$$

где $\delta>0$ — некоторое заданное число.

Для нахождения функций $\widehat{a}_{11}(y)$, $\widehat{a}_{12}(y)$, $\widehat{a}_{22}(y)$, $\widehat{u}(y)$ была составлена программа. Некоторые результаты численных расчетов приведены в приложении.

Заключение

В работе устанавливается t-гиперболичность системы уравнений, описывающей течения полимерных сред. Кроме того, строится стационарное решение этой системы, соответствующее течению полимерной среды в плоском бесконечном канале.

Приложение

В приложении мы приведем некоторые результаты численных расчетов (в основном они будут касаться нахождения функции $\widehat{u}(y)$). На рис. 2 изображены профили функции $\widehat{u}(y)$ при следующих значениях параметров $\overline{k}$, β, $\widehat{D}$, W:

$$\overline{k} = 0, \quad \widehat{D} = 2, \quad W = 1, \quad \beta = 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4.$$

(при выборе параметров $\widehat{D}$, W, β мы пользовались неравенством (19′).

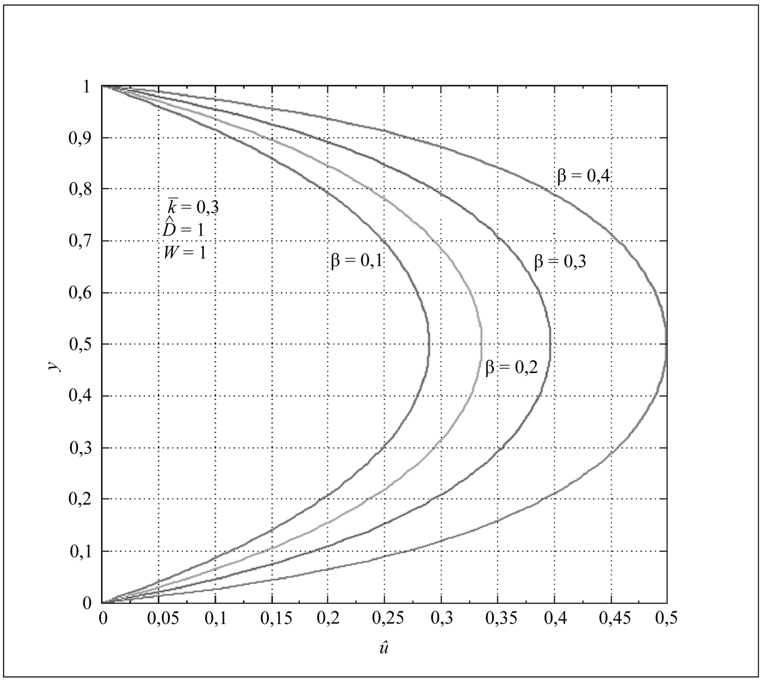

Рис. 2. Влияние параметра β на профиль скорости $\widehat{u}(y)$

Для оценки влияния параметра τ_0 (τ_0 — время релаксации) на вид профиля скорости на рис. 3 приведены зависимости $\widehat{u}(y)$ при следующих значениях параметров $\overline{k}$, β, $\widehat{D}$, W:

$$\overline{k} = 0, \quad \beta = 0{,}3, \quad \widehat{D} = 1, \quad W = 0{,}1,\ 1,\ 1{,}5,\ 2,\ 2{,}5.$$

Наконец, на рис. 4 построены функции $\widehat{u}(y)$ с целью иллюстрации влияния параметра η_0 (η_0 — сдвиговая вязкость) на вид профиля скорости при следующих значениях параметров $\overline{k}$, β, $\widehat{D}$, W:

$$\overline{k} = 0, \quad \beta = 0{,}3, \quad W = 1, \quad \widehat{D} = 1{,}5,\ 2{,}5,\ 3.$$

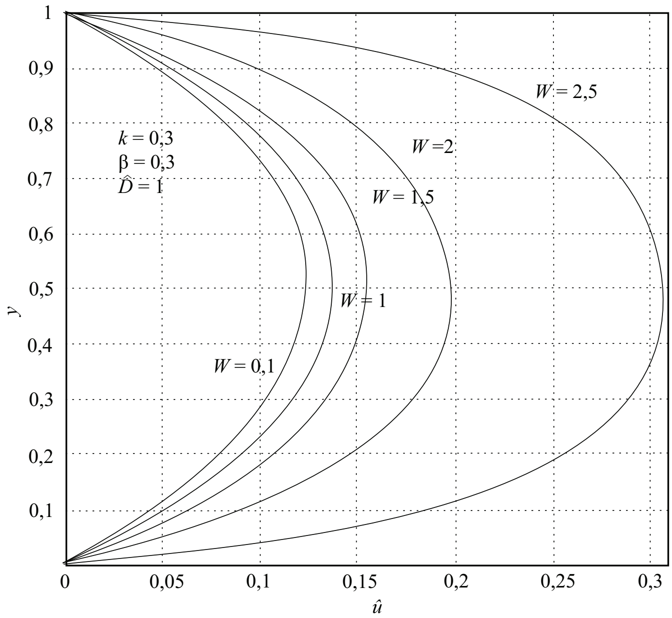

Рис. 3. Влияние параметра τ_0 (τ_0 — время релаксации) на профиль скорости $\widehat{u}(y)$

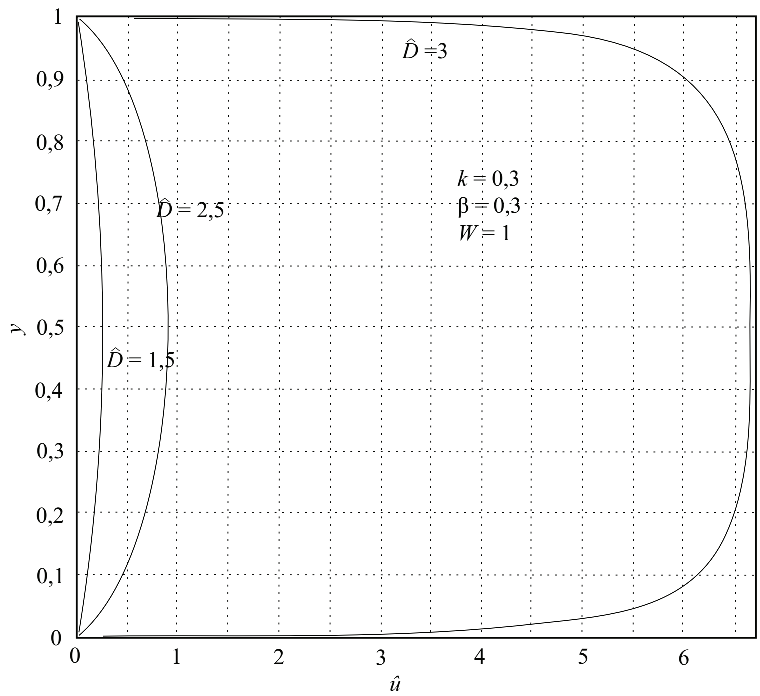

Рис. 4. Влияние параметра η_0 (η_0 — сдвиговая вязкость) на профиль скорости $\widehat{u}(y)$

На последнем рисунке (рис. 5) приведена зависимость $\widehat{u}(y)$ для случая $\overline{k} \neq 0$:

$$k = 0{,}9, \quad \beta = 0{,}3, \quad \widehat{D} = 2, \quad W = 1, \quad \delta = 10^{-5}$$

(на этом же рисунке приведена функция $\widehat{u}(y)$ для случая $\overline{k} = 0$, $\beta = 0{,}3$, $\widehat{D} = 2$, $W = 1$).

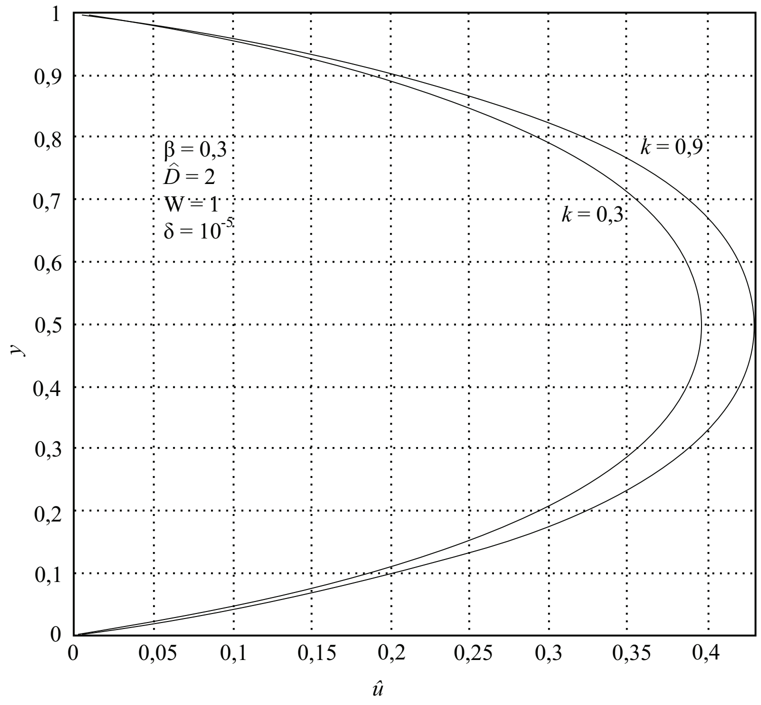

Рис. 5. Влияние параметра k на профиль скорости $\widehat{u}(y)$

Список литературы

1. *Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Макарова М. А., Пышнограй Г. В.* Обобщение закона Пуазейля для плоскопараллельного течения вязкоупругих сред // Механика композиционных материалов и конструкций (изд. ИПРИМ РАН). 2007. Т 13, № 4. С. 581–590.

2. *Пышнограй Г. В., Покровский В. Н., Яновский Ю. Г., Карнет Ю. Н., Образцов И. Ф.* Определяющее уравнение нелинейных вязкоупругих (полимерных) сред в нулевом приближении по параметрам молекулярной теории и следствия для сдвига и растяжения // ДАН. 1994. Т. 339, № 5. С. 612–615.

3. *Алтухов Ю. А., Пышнограй Г. В.* Входные течения в канале 4:1 текучих линейных полимеров // Механика композиционных материалов и конструкций (изд. ИПРИМ РАН). 2001. Т 7, № 1. С. 16–23.

4. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

5. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.

Материал поступил в редколлегию 07.05.2010

Адреса авторов

БАМБАЕВА Наталья Владимировна
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: bam.net@ngs.ru

БЛОХИН Александр Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: bolkhin@math.nsc.ru