УДК 510.67

Б. Ш. Кулпешов

СЧЕТНО-КАТЕГОРИЧНЫЕ ВПОЛНЕ *O*-МИНИМАЛЬНЫЕ ТЕОРИИ

В настоящей работе представлено описание счетно-категоричных вполне o-минимальных теорий, введеных автором ранее как надкласса o-минимальных теорий, но «вполне» наследующего многие их свойства.

Ключевые слова: слабая o-минимальность, $\aleph_0$-категоричность, бинарность.

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в этой статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения $<$, интерпретируемый как линейный порядок в этих структурах. Для произвольных подмножеств A, B структуры M мы пишем $A < B$, если $a < b$ всякий раз, когда $a \in A$ и $b \in B$. Для произвольного полного типа p мы обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M. Для произвольного кортежа $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ длиной n мы обозначаем через $\bar{b}_i$ кортеж $\langle b_1, b_2, \ldots, b_i \rangle$ для каждого $1 \leq i \leq n-1$. Если $B \subseteq M$ и E — отношение эквивалентности на B, то мы обозначаем через B/E множество представителей E-классов, лежащих в B. Если f — функция на M, то мы обозначаем через $\mathrm{Dom}(f)$ область определения функции f, а через $\mathrm{Ran}(f)$ — ее область значений. Пусть $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, $n \in \omega$. Мы говорим, что кортеж $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in M^n$ является *возрастающим*, если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Мы говорим, что $p(M)$ является *(упорядоченно) n-неразличимым над A*, если для любых возрастающих n-кортежей $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, $\bar{a}' = \langle a_1', a_2', \ldots, a_n' \rangle \in [p(M)]^n$ $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{a}'/A)$; мы также говорим, что $p(M)$ является *(упорядоченно) неразличимым над A*, если $p(M)$ является n-неразличимым над A для каждого $n \in \omega$. Полная теория T является *бинарной*, если любая формула эквивалентна булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных. Подмножество A структуры M является *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$, мы имеем $c \in A$.

Данная работа касается понятий *вполне o-минимальности*, введенного автором в [1], и *слабой o-минимальности*, первоначального исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [2]. *Слабо o-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним, что такая структура M называется *o-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M. Таким образом, слабая o-минимальность является обобщением o-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 45–57

o-минимальных (не o-минимальных) структур.

В следующих определениях M — слабо o-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические.

Определение 1 (Б. С. Байжанов, [3]). Мы говорим, что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Лемма 1 ([3. Следствие 34 (iii)]). *Отношение не слабой ортогональности является отношением эквивалентности на* $S_1(A)$.

Будем говорить, что тип p не является *вполне ортогональным* типу q ($p \not\perp^q q$), если существует A-определимая биекция $f\colon p(M) \to q(M)$. Будем говорить, что слабо o-минимальная теория является *вполне o-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают. Заметим, что если M — o-минимальная структура, то в случае не слабой ортогональности типов p и q существует A-определимая биекция $f\colon p(M) \to q(M)$, т. е. вполне o-минимальные являются «вполне» o-минимальными относительно свойства не слабой ортогональности типов. Позже будет показано, что вполне o-минимальные теории также «вполне» наследуют свойство o-минимальных теорий быть бинарными в счетно-категоричном случае (теорема 2).

Факт 1. Отношение не вполне ортогональности является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Пример 1 [2]. Пусть $M = \langle M, <, P^1, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура. Здесь P есть унарный предикат, и f — унарная функция с $\mathrm{Dom}(f) = \neg P, \mathrm{Ran}(f) = P$. Универсум структуры M есть непересекающееся объединение P и $\neg P$, где $x < y$ всякий раз, когда $x \in P$ и $y \in \neg P$. Для того чтобы определить f, отождествим P с Q (где Q есть порядок рациональных чисел) и $\neg P$ с $Q \times Q$ (которое упорядочено лексикографически), и для любых $m, n \in Q$ пусть $f(\langle m, n \rangle) = n$.

Легко проверить, что $Th(M)$ — $\aleph_0$-категоричная слабо o-минимальная теория. Пусть $p(x) := \{\neg P\}$, $q(x) := \{P\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\emptyset)$. Функция f отображает $p(M)$ на $q(M)$, откуда $p \not\perp^w q$. Однако f не является биекцией между $p(M)$ на $q(M)$, и может быть доказано, что не существует других $\emptyset$-определимых биекций между этими множествами. Поэтому $p \perp^q q$, т. е. $Th(M)$ не является вполне o-минимальной. Возьмем произвольный $a \in p(M)$, и пусть $b = f(a)$. Очевидно, что $b \in dcl(\{a\})$ и $a \notin dcl(\{b\})$, т. е. принцип замены для алгебраического замыкания не имеет места в M.

Лемма 2. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная вполне o-минимальная теория. Тогда в любой модели теории T имеет место принцип замены для алгебраического замыкания.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M \models T$. Возьмем произвольные $a, b, \bar{c} \in M$ такие, что $a \in dcl(b, \bar{c}) \setminus dcl(\bar{c})$. Поймем, что $b \in dcl(a, \bar{c})$. Пусть $p = tp(b/\bar{c})$, $q = tp(a/\bar{c})$. Так как $a \in dcl(b, \bar{c})$, то существует формула $\phi(x, y, \bar{c})$ такая, что $M \models \phi(a, b, \bar{c}) \wedge \exists! x \phi(x, b, \bar{c})$. Если предположить, что $p = q$, то, рассматривая формулу $\theta(y) := \exists! x \phi(x, y, \bar{c})$, получим, что $dcl(b, \bar{c})$ бесконечно, что противоречит $\aleph_0$-категоричности T. Следовательно, $p \neq q$. Если $b \in dcl(\bar{c})$, то $a \in dcl(\bar{c})$, противоречие. Следовательно, типы p и q — неалгебраические, причем $p \not\perp^w q$. Тогда в силу вполне o-минимальности T существует $\bar{c}$-определимая биекция $f\colon p(M) \to q(M)$. Утверждаем, что $f(b) = a$, откуда будем иметь, что $b \in dcl(a, \bar{c})$. Допустим противное: $f(b) \neq a$, т. е. существует $a' \in q(M)$ такой, что $a' \neq a$ и $f(b) = a'$. Тогда получаем, что $a \in dcl(a', \bar{c})$, причем $tp(a/\bar{c}) = tp(a'/\bar{c})$, что опять противоречит $\aleph_0$-категоричности T. □

Определение 2 [4]. Пусть $\phi(x)$ — произвольная M-определимая формула с одной свободной переменной. *Ранг выпуклости формулы* $\phi(x)$ ($RC(\phi(x))$) определяется следующим образом.

1) $RC(\phi(x)) \geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно.

2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ и $b_i, i \in \omega$, удовлетворяющие следующему:

- для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$, мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$;
- для каждого $i \in \omega$ $RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ — выпуклое подмножество множества $\phi(M)$.

3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим, что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (т. е. если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех α) мы полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

Пусть $A \subseteq M$ и $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. *Рангом выпуклости* 1*-типа* p ($RC(p)$) будем называть инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$.

В примере 1 рассмотрим следующую формулу:

$$E(x, y) := \neg P(x) \wedge \neg P(y) \wedge \exists z\, [P(z) \wedge f(x) = f(y)].$$

Нетрудно понять, что E является отношением эквивалентности, разбивающим $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, и не существует других определимых отношений эквивалентности с таким свойством, т. е. $RC(p) = 2$. Также можно понять, что не существует определимых отношений эквивалентности, разбивающих $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, т. е. $RC(q) = 1$.

Вспомним некоторые понятия, первоначально введенные в [2].

Пусть $Y \subset M^{n+1}$ — $\emptyset$-определимо, пусть $\pi : M^{n+1} \to M^n$ — проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и пусть $Z := \pi(Y)$. Для каждого $\bar{a} \in Z$ пусть $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим, что для каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M. Пусть $\sim$ — $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности на M^n, определяемое следующим образом:

$$\bar{a} \sim \bar{b} \text{ для всех } \bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z, \text{ и } \bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}, \text{ если } \bar{a}, \bar{b} \in Z.$$

Пусть $\overline{Z} := Z/\sim$, и для каждого кортежа $\bar{a} \in Z$ мы обозначаем через $[\bar{a}]$ $\sim$-класс кортежа $\bar{a}$. Существует естественный $\emptyset$-определимый линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\bar{a} \in Z$ и $c \in M$. Тогда $[\bar{a}] < c$ тогда и только тогда, когда $w < c$ для всех $w \in Y_{\bar{a}}$. Если $\bar{a} \not\sim \bar{b}$, то существует некоторый $x \in M$ такой, что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, и поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$.

Мы называем такое множество $\overline{Z}$ *сортом* (в данном случае $\emptyset$-определимым сортом) в $\overline{M}$, где $\overline{M}$ — Дедекиндово пополнение структуры M, и обозреваем $\overline{Z}$ как естественно вложенную в $\overline{M}$. Аналогично мы можем получить сорт в $\overline{M}$, рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Пусть $A, D \subseteq M$, D бесконечно, $Z \subseteq \overline{M}$ — A-определимый сорт и $f : D \to Z$ — A-определимая функция. Мы говорим, что f — *локально возрастающая* (*локально убывающая, локально константа*) на D, если для любого $a \in D$ существует бесконечный интервал $J \subseteq D$, содержащий $\{a\}$, так что f является строго возрастающей (строго убывающей) константой на J; мы также говорим, что f — *локально монотонная* на D, если она является локально возрастающей или локально убывающей на D. Пусть E — A-определимое отношение эквивалентности на D. Мы говорим, что f — *строго возрастающая (убывающая) на D/E*, если для любых $a, b \in D$ с условием $\neg E(a, b)$ мы имеем $f(a) < f(b)$ $(f(a) > f(b))$.

Лемма 3. *Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Тогда любая A-определимая функция, область определения которой содержит $p(M)$, является локально монотонной или локально константой на $p(M)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3.3 [2] для любой A-определимой функции f существуют $m \in \omega$ и разбиение $\mathrm{Dom}(f)$ на A-определимые множества $X, I_1, \ldots, I_m$ так, что X конечно, каждое I_i выпукло и бесконечно, и на каждом I_i функция f является локально монотонной или локально константой. В силу 1-неразличимости $p(M)$ над A функция f не меняет поведения на $p(M)$, откуда f должна быть локально монотонной или локально константой на $p(M)$. □

Предложение 1 ([5. Предложение 2.7]). *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, A — конечно, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, f — A-определимая функция, так что $p(M) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ и f не является константой на $p(M)$. Тогда существует A-определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что f является строго монотонной на $p(M)/E$.*

Лемма 4. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $p_1, p_2 \in$ $\in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические. Предположим что $p_1 \not\perp^w p_2$. Тогда существует единственная $\emptyset$-определимая биекция $f : p_1(M) \to p_2(M)$ так, что f является локально монотонной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $p_1 \not\perp^w p_2$, то в силу вполне o-минимальности T существует $\emptyset$-определимая биекция $f : p_1(M) \to p_2(M)$. В силу леммы 3 либо f локально монотонная, либо f локально константа. Если f — локально константа, то f не является биекцией. Следовательно, f должна быть локально монотонной. Поймем теперь, что f единственна. Допустим противное: существуют по крайней мере две различные функции f и g, отображающие $p(M)$ на $q(M)$. Так как $f \neq g$, то существует $\alpha \in p(M)$ с условием $f(\alpha) \neq g(\alpha)$. Тогда $dcl(\{\alpha\})$ бесконечно, что противоречит $\aleph_0$-категоричности T.

□

Лемма 5. *Пусть T — произвольная $\aleph_0$-категоричная теория, $M \models T$, $A \subset M$, A конечно, $m, n < \omega$, $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle$, $\bar{a}' = \langle a_1', a_2', \ldots, a_m' \rangle \in M^m$, $\bar{b} = \langle b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n \rangle$,*

$\bar{b}' = \langle b_1', b_2', \ldots, b_n' \rangle \in M^n$ *такие, что* $tp(\bar{b}/A) = tp(\bar{b}'/A)$, $tp(\langle a_i, b_j\rangle/A) = tp(\langle a_i', b_j'\rangle/A)$ *для всех* $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ *и* $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}\rangle/A) = tp(\langle \bar{a}', \bar{b}_{n-1}'\rangle/A)$. *Тогда если* $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle/A) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}'\rangle/A)$, *то существует* $b_n'' \in M$ *такой, что* $tp(\langle \bar{b}_{n-1}, b_n\rangle/A) = tp(\langle \bar{b}_{n-1},\ b_n''\rangle/A)$, $tp(\langle a_i, b_n\rangle/A) = tp(\langle a_i, b_n''\rangle/A)$ *для всех* $1 \le i \le m$ *и* $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b_n\rangle/A) \neq tp(\langle \bar{a},\ \bar{b}_{n-1},\ b_n''\rangle/A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle/A) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}'\rangle/A)$, то существует A-определимая формула $R(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что $M \models R(\bar{a}, \bar{b}) \wedge \neg R(\bar{a}', \bar{b}')$. Пусть $B(\bar{y})$ — A-определимая формула, изолирующая $tp(\bar{b}/A)$, и пусть $A_i(x, y)$ — A-определимая формула, изолирующая $tp(\langle a_i, b_n\rangle/A)$ для каждого $i \le m$. Допустим противное: предположим, что $M \models \theta(\bar{a}, \bar{b}_{n-1})$, где

$$\theta(\bar{a}, \bar{b}_{n-1}) := \forall y \left[B(\bar{b}_{n-1}, y) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} A_i(a_i, y) \to R(\bar{a}, \bar{b}_{n-1}, y) \right].$$

В силу условий леммы $M \models \theta(\bar{a}', \bar{b}_{n-1}')$, что противоречит нашему предположению.

□

Лемма 6. *Пусть* T — $\aleph_0$*-категоричная вполне о-минимальная теория,* $M \models T$, $A \subseteq M$, A — *конечно. Тогда для любого* $\bar{b} = \langle b_1, b_2, b_3, b_4\rangle \in M^4$ *с условиями* $tp(\langle b_1, b_2\rangle/A) = tp(\langle b_1, b_3\rangle/A) = tp(\langle b_1, b_4\rangle/A)$, $tp(\langle b_2, b_3\rangle/A) = tp(\langle b_2, b_4\rangle/A)$ *следует, что* $tp(\langle b_1, b_2, b_3\rangle/A) = tp(\langle b_1, b_2, b_4\rangle/A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: предположим, что существуют b_1, b_2, b_3, $b_4 \in M$, удовлетворяющие условиям леммы, но $tp(\langle b_1, b_2, b_3\rangle/A) \neq tp(\langle b_1, b_2, b_4\rangle/A)$. Следовательно, $tp(\langle b_1, b_3\rangle/A \cup \{b_2\}) \neq tp(\langle b_1, b_4\rangle/A \cup \{b_2\})$. Пусть $p_1 := tp(b_1/A \cup \{b_2\})$, $p_2 := tp(b_3/A \cup \{b_2\})$. Если хотя бы один из этих типов является алгебраическим, то заключение леммы следует очевидным образом, что противоречит нашему предположению. Следовательно, типы p_1 и p_2 неалгебраические, причем $p_1 \not\perp^w p_2$. Тогда в силу вполне о-минимальности T существует $(A \cup \{b_2\})$-определимая биекция $f_{b_2} : p_1(M) \to p_2(M)$. Пусть $\theta_1(x, y)$, $\theta_2(x, y)$ — A-определимые формулы, изолирующие $tp(\langle b_1, b_2\rangle/A)$, $tp(\langle b_2, b_3\rangle/A)$ соответственно. Тогда $M \models \phi(b_1, b_2)$, где

$$\phi(b_1, b_2) := \exists!\, y \left[\theta_1(b_1, y) \wedge \theta_2(b_2, y) \wedge f_{b_2}(b_1) = y \right].$$

Пусть $b_2^1 \in M$ такой, что $f_{b_2}(b_1) = b_2^1$. Тогда $b_2^1 \in dcl(A \cup \{b_1, b_2\})$ и $tp(\langle b_1, b_2\rangle/A) = tp(\langle b_1, b_2^1\rangle/A)$. Следовательно, $M \models \phi(b_1, b_2^1)$, т.е. существует $b_2^2 \in M$ такой, что $f_{b_2^1}(b_1) = b_2^2$. Тогда $b_2^2 \in dcl(A \cup \{b_1, b_2^1\})$, откуда $b_2^2 \in dcl(A \cup \{b_1, b_2\})$. Продолжая таким образом, мы для каждого $n \in \omega$ найдем $b_2^{n+1} \in M$ такой, что $b_2^{n+1} = f_{b_2^n}(b_1)$, откуда $b_2^{n+1} \in dcl(A \cup \{b_1, b_2^n\})$, и, следовательно, $b_2^{n+1} \in dcl(A \cup \{b_1, b_2\})$. Тогда получаем, что $dcl(A \cup \{b_1, b_2\})$ бесконечно, что противоречит $\aleph_0$-категоричности T. □

Лемма 7. *Пусть* T — $\aleph_0$*-категоричная вполне о-минимальная теория,* $M \models T$, $A \subseteq M$, A *конечно,* $p_1, p_2 \in S_1(A)$ *неалгебраические,* $p_1 \perp^w p_2$. *Тогда для любых* $a, a' \in p_1(M)$, $b_1 < b_2, b_1' < b_2' \in p_2(M)$ *таких, что* $tp(\langle b_1, b_2\rangle/A) = tp(\langle b_1', b_2'\rangle/A)$, *мы имеем* $tp(\langle a,\ b_1,\ b_2\rangle/A) = tp(\langle a', b_1', b_2'\rangle/A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: существуют $a, a' \in p_1(M)$, $b_1 < b_2$, $b_1' < b_2' \in \in p_2(M)$ такие, что $tp(\langle b_1, b_2\rangle/A) = tp(\langle b_1', b_2'\rangle/A)$, но $tp(\langle a, b_1, b_2\rangle/A) \neq tp(\langle a', b_1', b_2'\rangle/A)$. В силу слабой ортогональности p_1 и p_2 $tp(\langle a, b_1\rangle/A) = tp(\langle a', b_1'\rangle/A) = tp(\langle a, b_2\rangle/A) = = tp(\langle a', b_2'\rangle/A)$. Тогда в силу леммы 5 существует $b_2'' \in p_2(M)$ такой, что $tp(\langle a, b_2\rangle/A) = = tp(\langle a, b_2''\rangle/A)$, $tp(\langle b_1, b_2\rangle/A) = tp(\langle b_1, b_2''\rangle/A)$ и $tp(\langle a, b_1, b_2\rangle/A) \neq tp(\langle a, b_1, b_2''\rangle/A)$, откуда четверка элементов $\langle a, b_1, b_2, b_2''\rangle$ противоречит лемме 6. □

Следующий пример показывает, что условие вполне o-минимальности в лемме 7 является существенным.

Пример 2 [5]. Пусть $M = \langle Q \cup W, <, E^3, P^1\rangle$ — линейно упорядоченная структура, где Q — множество рациональных чисел; W — лексикографически упорядоченное множество всех Q-последовательностей из $\{0, 1\}$ с конечным числом ненулевых координат, исключая Q-последовательность, состоящую только из 0; $P(M) = Q$, $\neg P(M) = W$ и $P(M) < \neg P(M)$. Для любого $a \in P(M)$ $E(a, y_1, y_2)$ является отношением эквивалентности на $\neg P(M)$, определяемым следующим образом: для любых $a \in P(M)$, $b_1, b_2 \in \neg P(M)$ $E(a, b_1, b_2) \Leftrightarrow b_1(q) = b_2(q)$ для всех $q \leq a$, т. е. q-е координаты элементов b_1 и b_2 совпадают для всех $q \leq a$.

Может быть доказано, что M однородна, и, следовательно, M допускает элиминацию кванторов и является $\aleph_0$-категоричной. Для любых $a \in P(M)$ и $b_1, b_2 \in \neg P(M)$ $E(a, b_1, M)$ и $E(M, b_1, b_2)$ являются выпуклыми, т. е. M является слабо o-минимальной. Рассмотрим произвольные $a \in P(M)$, $b_1 < b_2 < b_2' \in \neg P(M)$ такие, что $E(a, b_1, b_2)$ и $\neg E(a, b_1, b_2')$. Пусть $p_1' := tp(a/\{b_1\})$, $p_2' := tp(b_2/\{b_1\})$. Тогда $p_1' \not\perp^w p_2'$, однако не существует $\{b_1\}$-определимой биекции $f : p_1'(M) \to p_2'(M)$, т. е. $Th(M)$ не является вполне o-минимальной. Пусть $p_1 := \{P(x)\}$, $p_2 := \{\neg P(x)\}$. Нетрудно понять, что $p_1 \perp^w p_2$. Рассмотрим произвольные $a, a' \in p_1(M)$, $b_1 < b_2$, $b_1' < b_2' \in p_2(M)$ с условиями $a < a'$, $E(a, b_1, b_2)$ и $\neg E(a', b_1', b_2')$. Тогда $tp(\langle a, b_1, b_2\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a', b_1', b_2'\rangle/\emptyset)$, хотя $tp(\langle b_1, b_2\rangle/\emptyset) = = tp(\langle b_1', b_2'\rangle/\emptyset)$, т. е. лемма 7 не выполняется.

Лемма 8. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная вполне o-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, A конечно, и пусть $a, b \in M$ такие, что $p_1 := tp(a/A)$, $p_2' := tp(b/A \cup \{a\})$ — неалгебраические. Предположим, что существует $A \cup \{a\}$-определимая функция f с условием $p_2'(M) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, так что f не является константой на $p_2'(M)$. Тогда существует A-определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p_2'(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что f является строго монотонной на $p_2'(M)/E$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f строго монотонная на $p_2'(M)$, то $E(x, y) \equiv x = y$, и нечего доказывать. Предположим теперь, что f не является строго монотонной на $p_2'(M)$. Тогда в силу предложения 1 существует $A \cup \{a\}$-определимое отношение эквивалентности $E_a'(x, y)$, разбивающее $p_2'(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что f является строго монотонной на $p_2'(M)/E_a'$. Допустим противное: предположим, что E_a' не A-определимо. Тогда аналогично доказательству леммы 3.6 [5] можно найти $b, b', b'' \in p_2'(M)$ такие, что $b < b' < b''$, $tp(\langle b, b'\rangle/A) = tp(\langle b, b''\rangle/A)$ и $M \models E_a'(b, b') \wedge \neg E_a'(b, b'')$, т. е. $tp(\langle a, b, b'\rangle/A) \neq tp(\langle a, b, b''\rangle/A)$, откуда четверка элементов $\langle a, b, b', b''\rangle$ противоречит лемме 6. □

Пусть $A \subseteq B \subseteq M$, B конечно, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(A)$ — неалгебраические. Мы говорим, что семейство 1-типов $\{p_1, \ldots, p_s\}$ является *слабо ортогональным над* B, если каждый s-кортеж $\langle a_1, \ldots, a_s \rangle \in p_1(M) \times \ldots \times p_s(M)$ удовлетворяет одному и тому же типу над B. Мы говорим, что семейство 1-типов $\{p_1, \ldots, p_s\}$ является *ортогональным над* B, если для любой последовательности $(n_1, \ldots, n_s) \in \omega^s$, для любых возрастающих кортежей $\bar{a}_1, \bar{a}'_1 \in [p_1(M)]^{n_1}$, …, $\bar{a}_s, \bar{a}'_s \in [p_s(M)]^{n_s}$ таких, что $tp(\bar{a}_1/B) = tp(\bar{a}'_1/B)$, …, $tp(\bar{a}_s/B) = tp(\bar{a}'_s/B)$, мы имеем $tp(\langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s \rangle/B) = tp(\langle \bar{a}'_1, \ldots, \bar{a}'_s \rangle/B)$.

Если $A \subseteq M$, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ и $p_1 \perp^w p_2$, тогда очевидно, что $\{p_1, p_2\}$ слабо ортогонально над A.

Лемма 9. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная вполне о-минимальная теория, p_1, p_2, …, $p_m \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные 1-типы. Тогда $\{p_1$, p_2, …, $p_m\}$ слабо ортогонально над $\emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать индукцией по $m \geq 2$. Шаг $m = 2$ тривиальный. Предположим, что лемма установлена для множеств из $m - 1$ 1-типов. Докажем лемму для множеств из m 1-типов. Рассмотрим произвольный кортеж $\langle a_1, a_2$, …, $a_{m-3}\rangle \in p_1(M) \times p_2(M) \times \ldots \times p_{m-3}(M)$, и пусть $M' = \langle M, a_1, a_2, \ldots, a_{m-3}\rangle$. Нетрудно понять, что M' все еще остается $\aleph_0$-категоричной вполне o-минимальной структурой. Рассмотрим типы p_{m-2}, p_{m-1} и p_m. В силу индукционного предположения они имеют единственные расширения p'_{m-2}, p'_{m-1} и p'_m до типов над $\{a_1, a_2, \ldots, a_{m-3}\}$ соответственно. Более того, $p_{m-2}(M) = p'_{m-2}(M)$, $p_{m-1}(M) = p'_{m-1}(M)$ и $p_m(M) = p'_m(M)$. Индукционное предположение также гарантирует, что они попарно слабо ортогональны. Для удобства обозначений переименуем p'_{m-2}, p'_{m-1} и p'_m через p_1, p_2 и p_3 соответственно и покажем, что $\{p_1, p_2, p_3\}$ слабо ортогонально над $\emptyset$, т. е. $\{p_{m-2}, p_{m-1}, p_m\}$ слабо ортогонально над $\{a_1, a_2, \ldots, a_{m-3}\}$. Тогда в силу произвольности кортежа $\{a_1, a_2, \ldots, a_{m-3}\}$ мы получим, что $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ слабо ортогонально над $\emptyset$.

Допустим противное: предположим, что существуют

$$\langle a, b, c\rangle, \langle a', b', c'\rangle \in p_1(M) \times p_2(M) \times p_3(M)$$

такие, что $tp(\langle a, b, c\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a', b', c'\rangle/\emptyset)$. Поскольку p_1, p_2 и p_3 попарно слабо ортогональны, то

$$tp(\langle a, b\rangle/\emptyset) = tp(\langle a', b'\rangle/\emptyset), \quad tp(\langle a, c\rangle/\emptyset) = tp(\langle a', c'\rangle/\emptyset) \quad \text{и} \quad tp(\langle b, c\rangle/\emptyset) = tp(\langle b', c'\rangle/\emptyset).$$

В силу леммы 5 существует $c'' \in p_3(M)$ такой, что

$$tp(\langle a, c\rangle/\emptyset) = tp(\langle a, c''\rangle/\emptyset), \quad tp(\langle b, c\rangle/\emptyset) = tp(\langle b, c''\rangle/\emptyset) \;\text{ и }\; tp(\langle a, b, c\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a, b, c''\rangle/\emptyset).$$

Пусть $q_2^a := tp(b/\{a\})$, $q_3^a := tp(c/\{a\})$. В силу попарно слабой ортогональности типов p_1, p_2 и p_3 типы q_2^a, q_3^a — неалгебраические, $q_2^a(M) = p_2(M)$, $q_3^a(M) = p_3(M)$. Очевидно, что $q_2^a \not\perp^w q_3^a$, и, следовательно в силу вполне o-минимальности T существует $\{a\}$-определимая биекция $f_a : p_2(M) \to p_3(M)$. Аналогично рассматривая типы $q_1^b := tp(a/\{b\})$, $q_3^b := tp(c/\{b\})$, мы видим, что типы q_1^b, q_3^b — неалгебраические, $q_1^b(M) = p_1(M)$, $q_3^b(M) = p_3(M)$, $q_1^b \not\perp^w q_3^b$. Опять, в силу вполне o-минимальности T существует

$\{b\}$-определимая биекция $g_b : p_1(M) \to p_3(M)$, причем $g_b(a) = f_a(b)$. В силу леммы 8 существуют $\emptyset$-определимые отношения эквивалентности $E'(x, y)$ и $E''(x, y)$, разбивающие $p_2(M)$ и $p_1(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что f_a и g_b являются строго монотонными на $p_2(M)/E'$ и $p_1(M)/E''$ соответственно. Не умаляя общности, предположим, что g_b является строго возрастающей на $p_1(M)/E''$, и рассмотрим произвольный элемент $a_1 \in p_1(M)$, так что $a < a_1$ и $\neg E''(a, a_1)$. Тогда $g_b(a) < g_b(a_1)$. Пусть $c_0 := g_b(a)$, $c_1 := g_b(a_1)$. Очевидно, что $c_0 \in dcl(a, b)$, $c_1 \in dcl(a_1, b)$. Так как f_a — биекция, то существует $b_1 \in p_2(M)$ такой, что $f_a(b_1) = c_1$, т. е. $g_{b_1}(a) = c_1$. Пусть $c_2 := g_{b_1}(a_1)$. Так как $b_1 \in dcl(a, c_1) \subseteq dcl(a, a_1, b)$, то $c_2 \in dcl(a_1, b_1) \subseteq dcl(a, a_1, b)$. Продолжая таким образом, мы получим, что $dcl(a, a_1, b)$ бесконечно, что противоречит $\aleph_0$-категоричности T.

$\square$

Теорема 1. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная вполне о-минимальная теория, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные 1-типы. Тогда $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ ортогонально над $\emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем индукцией по $s \geq 2$.

Шаг 2. Докажем индукцией по (n_1, n_2), что для любых возрастающих $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\rangle$, $\bar{a}' = \langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n_1}\rangle \in [p_1(M)]^{n_1}$, $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\rangle$, $\bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \ldots, b'_{n_2}\rangle \in [p_2(M)]^{n_2}$ таких, что $tp(\bar{a}/\emptyset) = tp(\bar{a}'/\emptyset)$, $tp(\bar{b}/\emptyset) = tp(\bar{b}'/\emptyset)$, мы имеем $tp(\langle\bar{a}, \bar{b}\rangle/\emptyset) = tp(\langle\bar{a}', \bar{b}'\rangle/\emptyset)$. Случай $(1, 1)$ является тривиальным. Предположим, что шаг 2 установлен для любого $(k_1, k_2) <_{lex} (n_1, n_2)$, и докажем его для (n_1, n_2). Допустим противное: предположим, что $tp(\langle\bar{a}, \bar{b}\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle\bar{a}', \bar{b}'\rangle/\emptyset)$. В силу слабой ортогональности p_1 и p_2 $tp(\langle a_i, b_j\rangle/\emptyset) = tp(\langle a'_i, b'_j\rangle/\emptyset)$ для всех $1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$. Тогда по лемме 5 существует $b''_{n_2} \in p_2(M)$ такой, что

$$tp(\langle\bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/\emptyset) = tp(\langle\bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/\emptyset), \quad tp(\langle a_i, b_{n_2}\rangle/\emptyset) = tp(\langle a'_i, b''_{n_2}\rangle/\emptyset)$$

для всех $1 \leq i \leq n_1$ и $tp(\langle\bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle\bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/\emptyset)$. Пусть $A := \{\bar{a}_{n_1-1}, \bar{b}_{n_2-2}\}$. В силу индукционного предположения $tp(\langle b_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/A) = tp(\langle b_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/A)$.

Случай 1. $tp(b_{n_2-1}/A) = tp(b_{n_2}/A)$. Пусть $p'_1(x) := tp(a_{n_1}/A)$, $p'_2(y) := tp(b_{n_2-1}/A)$. Также в силу индукционного предположения $p'_1 \perp^w p'_2$, и, следовательно, по лемме 7 мы имеем $tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/A) = tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/A)$, что противоречит нашему предположению.

Случай 2. $tp(b_{n_2-1}/A) \neq tp(b_{n_2}/A)$. Пусть p'_1 и p'_2 будут, как в случае 1, и пусть $p'_3(z) := tp(b_{n_2}/A)$. В силу индукционного предположения $p'_1 \perp^w p'_2$, $p'_1 \perp^w p'_3$, и, следовательно, $p'_2 \perp^w p'_3$. Тогда по лемме 9 $tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/A) = tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/A)$, что также противоречит нашему предположению.

Шаг s. Предположим, что теорема установлена для множеств из k 1-типов для любого $k \leq s - 1$, и докажем ее для множеств из s 1-типов. По лемме 9 случай $n_1 = 1$, $n_2 = 1, \ldots, n_s = 1$ имеет место. Предположим, что шаг s установлен для всех $(k_1, k_2, \ldots, k_s) <_{lex} (n_1, n_2, \ldots, n_s)$, и докажем его для $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$. Возьмем произвольные возрастающие кортежи $\bar{a}_{n_1} \in [p_1(M)]^{n_1}$, $\bar{a}_{n_2} \in [p_2(M)]^{n_2}$, $\ldots$, $\bar{a}_{n_{s-2}} \in [p_{s-2}(M)]^{n_{s-2}}$. Индукционное предположение гарантирует, что p_{s-1} и p_s имеют единственные расширения до типов p'_{s-1} и p'_s соответственно над $\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \ldots, \bar{a}_{n_{s-2}}\}$, т. е. $p_{s-1}(M) = p'_{s-1}(M)$,

$p_s(M) = p'_s(M)$. Пусть $M' = \langle M, \bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \ldots, \bar{a}_{n_{s-2}}\rangle$. Индукционное предположение также гарантирует, что p'_{s-1} и p'_s являются слабо ортогональными в M'. В силу шага 2 $\{p'_{s-1}, p'_s\}$ ортогонально над $\emptyset$ в M', и, следовательно, $\{p_{s-1}, p_s\}$ ортогонально над $\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \ldots, \bar{a}_{n_{s-2}}\}$ в M. В силу произвольности $\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \ldots, \bar{a}_{n_{s-2}}\}$ мы имеем, что $\{p_1, \ldots, p_s\}$ ортогонально над $\emptyset$. □

Лемма 10. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, A конечно, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические, $p_1 \not\perp^w p_2$. Тогда для любых $a \in p_1(M)$, $b \in p_2(M)$ и $c_1, c_2 \in M$ таких, что $tp(\langle a, c_1\rangle/A) = tp(\langle a, c_2\rangle/A)$, $tp(\langle b, c_1\rangle/A) = tp(\langle b, c_2\rangle/A)$, мы имеем $tp(\langle a, b, c_1\rangle/A) = tp(\langle a, b, c_2\rangle/A)$.*

Доказательство леммы 10 повторяет доказательство леммы 5.2 [5] с использованием леммы 8 вместо леммы 3.6 [5].

Лемма 11. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, A — конечно, $p_1, p_2, p_3 \in S_1(A)$ — неалгебраические. Тогда для любых $a, a' \in p_1(M)$, $b, b' \in p_2(M)$, $c, c' \in p_3(M)$ таких, что $tp(\langle a, b\rangle/A) = tp(\langle a', b'\rangle/A)$, $tp(\langle a, c\rangle/A) = tp(\langle a', c'\rangle/A)$, $tp(\langle b, c\rangle/A) = tp(\langle b', c'\rangle/A)$, мы имеем $tp(\langle a, b, c\rangle/A) = tp(\langle a', b', c'\rangle/A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если p_1, p_2 и p_3 являются попарно слабо ортогональными, то заключение леммы следует из леммы 9. Не умаляя общности, предположим, что $p_1 \not\perp^w p_2$. Допустим противное: существуют $a, a' \in p_1(M)$, $b, b' \in p_2(M)$, $c, c' \in p_3(M)$ такие, что $tp(\langle a, b\rangle/A) = tp(\langle a', b'\rangle/A)$, $tp(\langle a, c\rangle/A) = tp(\langle a', c'\rangle/A)$, $tp(\langle b, c\rangle/A) = tp(\langle b', c'\rangle/A)$ и $tp(\langle a, b, c\rangle/A) \neq tp(\langle a', b', c'\rangle/A)$. Тогда в силу леммы 5 существует $c'' \in p_3(M)$ такой, что $tp(\langle a, c\rangle/A) = tp(\langle a, c''\rangle/A)$, $tp(\langle b, c\rangle/A) = tp(\langle b, c''\rangle/A)$ и $tp(\langle a, b, c\rangle/A) \neq tp(\langle a, b, c''\rangle/A)$, что противоречит лемме 10. □

Предложение 2. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, A конечно, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Тогда для любого $s < \omega$ и любых возрастающих кортежей $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_s\rangle$, $\bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \ldots, b'_s\rangle \in [p(M)]^s$ таких, что $tp(\langle b_i, b_j\rangle/A) = tp(\langle b'_i, b'_j\rangle/A)$ для всех $1 \le i < j \le s$, мы имеем $tp(\bar{b}/A) = tp(\bar{b}'/A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем индукцией по $s \ge 2$. Шаг $s = 2$ является тривиальным. Предположим, что предложение установлено для всех $k \le s - 1$, и докажем его для s. Допустим противное: предположим, что существуют возрастающие $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_s\rangle$, $\bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \ldots, b'_s\rangle \in [p(M)]^s$ такие, что $tp(\langle b_i, b_j\rangle/A) = tp(\langle b'_i, b'_j\rangle/A)$ для всех $1 \le i < j \le s$, но $tp(\bar{b}/A) \neq tp(\bar{b}'/A)$. По лемме 5 существует $b''_s \in p(M)$ такой, что $tp(\langle b_i, b_s\rangle/A) = tp(\langle b_i, b''_s\rangle/A)$ для всех $1 \le i \le s-1$ и $tp(\langle \bar{b}_{s-1}, b_s\rangle/A) \neq tp(\langle \bar{b}_{s-1}, b''_s\rangle/A)$. Следовательно, существует A-определимая формула $R(\bar{x})$ такая, что $M \models R(\bar{b}_{s-1}, b_s) \wedge \neg R(\bar{b}_{s-1}, b''_s)$. Пусть $B := A \cup \{\bar{b}_{s-3}\}$. Для простоты обозначений будем писать $R(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ как B-определимую формулу $R(x, y, z)$, так что $M \models R(b_{s-2}, b_{s-1}, b_s) \wedge \neg R(b_{s-2}, b_{s-1}, b''_s)$. В силу индукционного предположения

$$tp(\langle b_{s-2}, b_s\rangle/B) = tp(\langle b_{s-2}, b''_s\rangle/B), \quad tp(\langle b_{s-1}, b_s\rangle/B) = tp(\langle b_{s-1}, b''_s\rangle/B).$$

Если $tp(\langle b_{s-2}, b_{s-1}\rangle/B) = tp(\langle b_{s-2}, b_s\rangle/B)$, то в силу леммы 6 $tp(\langle b_{s-2}, b_{s-1}, b_s\rangle/B) = tp(\langle b_{s-2}, b_{s-1}, b''_s\rangle/B)$, что противоречит нашему допущению. Следовательно, $tp(\langle b_{s-2}, b_{s-1}\rangle/B) \neq tp(\langle b_{s-2}, b_s\rangle/B)$. Пусть $G(x, y)$ — B-определимая формула, изолирующая

$tp(\langle b_{s-2},\, b_{s-1}\rangle/B)$. Тогда $G(b_{s-2},y)$ изолирует $tp(b_{s-1}/B\cup\{b_{s-2}\})$, $G(x,b_{s-1})$ изолирует $tp(b_{s-2}/B\cup\{b_{s-1}\})$, и пусть $q_1(y):=\{G(b_{s-2},y)\}$, $q_2(x):=\{G(x,b_{s-1})\}$.

Рассмотрим $f_{b_{s-2}}(y):=\sup R(b_{s-2},y,M)$, $g_{b_{s-1}}(x):=\sup R(x,b_{s-1},M)$. Поймем, что как $f_{b_{s-2}}$, так и $g_{b_{s-1}}$, являются строго монотонными на $q_1(M)$ и $q_2(M)$ соответственно. В самом деле, если $f_{b_{s-2}}$ не является строго монотонной, то существует $(B\cup\{b_{s-2})\}$-определимое отношение эквивалентности $E'_{b_{s-2}}(x,y)$, разбивающее $q_1(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f_{b_{s-2}}$ является строго монотонной на $q_1(M)/E'_{b_{s-2}}$. Возьмем произвольные $b',b''\in q_1(M)$ такие, что

$$M\models E'_{b_{s-2}}(b_{s-1},b')\wedge\neg E'_{b_{s-2}}(b_{s-1},b'')\wedge b_{s-1}<b'<b''.$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned}&tp(\langle b_{s-2},b'\rangle/B)=tp(\langle b_{s-2},b''\rangle/B)=tp(\langle b_{s-2},b_{s-1}\rangle/B),\\&tp(\langle b_{s-1},b'\rangle/B)=tp(\langle b_{s-1},b''\rangle/B),\end{aligned}$$

но $tp(\langle b_{s-2},b_{s-1},b'\rangle/B)\neq tp(\langle b_{s-2},b_{s-1},b''\rangle/B)$, что противоречит лемме 6.

Случай A. Обе функции $f_{b_{s-2}}$ и $g_{b_{s-1}}$ являются строго возрастающими на $q_1(M)$ и $q_2(M)$ соответственно.

Рассмотрим $b'_{s-2}\in q_1(M)$ с условием $b'_{s-2}<b_{s-2}$. Тогда, рассматривая следующие формулы:

$$\begin{aligned}&\Phi_1(y):=G(b_{s-2},y)\wedge\forall z[R(b_{s-2},b_{s-1},z)\to R(b'_{s-2},y,z)]\\&\Phi_n(y):=G(b_{s-2},y)\wedge\forall y_1\forall z[\neg\Phi_{n-1}(y_1)\wedge G(b_{s-2},y_1)\wedge\\&\qquad\qquad\wedge R(b_{s-2},y_1,z)\to R(b'_{s-2},y,z)],\quad n\geq 2,\end{aligned}$$

мы получаем что $\Phi_1(M)\supset\Phi_2(M)\supset\ldots\supset\Phi_n(M)\supset\ldots$, что противоречит $\aleph_0$-категоричности T.

Случай B. $f_{b_{s-2}}$ является строго возрастающей на $q_1(M)$, $g_{b_{s-1}}$ является строго убывающей на $q_2(M)$.

Рассмотрим $b'_{s-2}\in q_1(M)$ с условием $b_{s-2}<b'_{s-2}$. Тогда, рассматривая те же самые формулы $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$, …, $\Phi_n(y)$, …, мы также получаем, что $\Phi_1(M)\supset\Phi_2(M)\supset\ldots\supset\Phi_n(M)\supset\ldots$, что противоречит $\aleph_0$-категоричности T. □

Теорема 2. *Любая $\aleph_0$-категоричная вполне о-минимальная теория является бинарной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу $\aleph_0$-категоричности T существует лишь конечное число 1-типов над $\emptyset$, и пусть $\{p_1,p_2,\ldots,p_s\}$ — полный список неалгебраических 1-типов над $\emptyset$. С учетом предложения 2 осталось установить следующее: докажем индукцией по $(s;n_1,n_2,\ldots,n_s)$, где $s\geq 2$, что для любых $n_1,n_2,\ldots,n_s<\omega$ и для любых возрастающих $\bar a_1$, $\bar a'_1\in[p_1(M)]^{n_1}$, $\bar a_2$, $\bar a'_2\in[p_2(M)]^{n_2}$, …, $\bar a_s$, $\bar a'_s\in[p_s(M)]^{n_s}$ таких, что $tp(\bar a_1/\emptyset)=tp(\bar a'_1/\emptyset)$, $tp(\bar a_2/\emptyset)=tp(\bar a'_2/\emptyset)$, …, $tp(\bar a_s/\emptyset)=tp(\bar a'_s/\emptyset)$, для всех i_1,i_2,j,k : $1\leq i_1<i_2\leq s$, $1\leq j\leq n_{i_1}$, $1\leq k\leq n_{i_2}$ $tp(\langle a_{i_1j},a_{i_2k}\rangle/\emptyset)=tp(\langle a'_{i_1j},a'_{i_2k}\rangle/\emptyset)$ мы имеем

$$tp(\langle\bar a_1,\bar a_2,\ldots,\bar a_s\rangle/\emptyset)=tp(\langle\bar a'_1,\bar a'_2,\ldots,\bar a'_s\rangle/\emptyset).\qquad(*)$$

Шаг $s = 2$. Если $p_1 \perp^w p_2$, то по теореме 1 $\{p_1, p_2\}$ ортогонально над $\emptyset$, т. е. $(*)$ выполняется. Предположим, что $p_1 \not\perp^w p_2$. Случай $(2; 1, 1)$ является тривиальным. Предположим, что шаг $s = 2$ установлен для всех (k_1, k_2) таких, что $(k_1, k_2) <_{lex} (n_1, n_2)$, и докажем его для (n_1, n_2). Допустим противное: предположим, что $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}'\rangle/\emptyset)$. Тогда по лемме 5 существует $b''_{n_2} \in p_2(M)$ такой, что $tp(\langle \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/\emptyset) = tp(\langle \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/\emptyset)$, $tp(\langle a_i, b_{n_2}\rangle/\emptyset) = tp(\langle a_i, b''_{n_2}\rangle/\emptyset)$ для всех $1 \leq i \leq n_1$ и $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/\emptyset)$.

Пусть $A := \{\bar{a}_{n_1-1}, \bar{b}_{n_2-2}\}$. В силу индукционного предположения $tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2}\rangle/A) = tp(\langle a_{n_1}, b''_{n_2}\rangle/A)$, $tp(\langle b_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/A) = tp(\langle b_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/A)$. Если $tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}\rangle/A) = tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2}\rangle/A)$, то по лемме 6 $tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/A) = tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/A)$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, $tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}\rangle/A) \neq tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2}\rangle/A)$. Пусть $p'_1 := tp(a_{n_1}/A)$, $p'_2 := tp(b_{n_2-1}/A)$. Если $tp(b_{n_2-1}/A) = tp(b_{n_2}/A)$, то очевидно, что $p'_1 \not\perp^w p'_2$, и мы имеем противоречие с леммой 10. Предположим теперь, что $tp(b_{n_2-1}/A) \neq tp(b_{n_2}/A)$ и пусть $p'_3 := tp(b_{n_2}/A)$. Тогда мы имеем противоречие с леммой 11.

Предположим, что теорема установлена для всех $(s; k_1, k_2, .., k_s) <_{lex} (s; n_1, n_2, .., n_s)$, и докажем ее для $(s; n_1, n_2, \ldots, n_s)$. Допустим противное: предположим, что $tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_s\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \ldots, \bar{a}'_s\rangle/\emptyset)$. В силу индукционного предположения $tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{s-1}\rangle/\emptyset) = tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \ldots, \bar{a}'_{s-1}\rangle/\emptyset)$. Тогда по лемме 5 существует $a''_{n_s} \in p_s(M)$ такой, что $tp(\langle \bar{a}_{n_s-1}, a_{n_s}\rangle/\emptyset) = tp(\langle a_{n_s-1}, a''_{n_s}\rangle/\emptyset)$, $tp(\langle a_{ij}, a_{n_s}\rangle/\emptyset) = tp(\langle a_{ij}, a''_{n_s}\rangle/\emptyset)$ для всех $1 \leq i \leq s-1$, $1 \leq j \leq n_i$ и

$$tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_s-1}, a_{n_s}\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_s-1}, a''_{n_s}\rangle/\emptyset).$$

Пусть $A := \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{s-3}, \bar{a}_{n_{s-2}-1}, \bar{a}_{n_{s-1}-1}, \bar{a}_{n_s-1}\}$. Тогда

$$tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a_{n_s}\rangle/A) \neq tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a''_{n_s}\rangle/A).$$

В силу индукционного предположения

$$tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_s}\rangle/A) = tp(\langle a_{n_{s-2}}, a''_{n_s}\rangle/A), \quad tp(\langle a_{n_{s-1}}, a_{n_s}\rangle/A) = tp(\langle a_{n_{s-1}}, a''_{n_s}\rangle/A).$$

Пусть $p'_{s-2} := tp(a_{n_{s-2}}/A)$, $p'_{s-1} := tp(a_{n_{s-1}}/A)$, $p'_s := tp(a_{n_s}/A)$. Ясно, что все эти типы являются неалгебраическими. Тогда по лемме 11 $tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a_{n_s}\rangle/A) = tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a''_{n_s}\rangle/A)$, что противоречит нашему предположению. $\square$

А. Пиллэй и Ч. Стейнхорн получили полное описание $\aleph_0$-категоричных *о*-минимальных теорий [6], из которого следует их бинарность. Как видим, теорема 2 показывает, что вполне *о*-минимальные теории «вполне» наследуют последнее свойство.

Следующая теорема полностью характеризует $\aleph_0$-категоричные вполне *о*-минимальные теории.

Теорема 3. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $|M| = \aleph_0$. Тогда*

(i) *существует конечное множество $C = \{c_0, \ldots, c_n\} \subseteq M$ ($M \cup \{-\infty, +\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов), состоящее из всех $\emptyset$-определимых элементов в M (с возможными исключениями для $-\infty$, $+\infty$), такое что $M \models c_i < c_j$ для всех*

$i < j \le n$ и для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$ либо $M \models \neg(\exists x)c_{j-1} < x < c_j$, либо $I_j = \{ x \in \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j \}$ является плотным линейным порядком без концевых точек, и существуют $k_j \in \omega$ и $p^j_1, \ldots, p^j_{k_j} \in S_1(\emptyset)$, так что $I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p^j_s(M)$;

(ii) *для каждого неалгебраического $p \in S_1(\emptyset)$ существует $n_p \in \omega$ такой, что $RC(p) = = n_p$, т. е. существуют $\emptyset$-определимые отношения эквивалентности $E^p_1(x,y), .., E^p_{n_p-1}(x,y)$ такие, что*

- *$E^p_{n_p-1}$ разбивает $p(M)$ на бесконечное число $E^p_{n_p-1}$-классов, каждый $E^p_{n_p-1}$-класс выпуклый и открытый, так что индуцированный порядок на классах является плотным линейным порядком без концевых точек;*
- *для каждого $i \in \{1, \ldots, n_p - 2\}$ E^p_i разбивает каждый E^p_{i+1}-класс на бесконечное число E^p_i-классов, каждый E^p_i-класс выпуклый и открытый, так что E^p_i-подклассы каждого E^p_{i+1}-класса плотно упорядочены без концевых точек;*

(iii) *существует отношение эквивалентности $\varepsilon \subseteq (\{s : 1 \le s \le k\})^2$, где $\{p_s \mid s \le \le k < \omega\}$ есть произвольное перечисление всех неалгебраических 1-типов над $\emptyset$, такое что для каждого $(i, j) \in \varepsilon$ существует единственная $\emptyset$-определимая локально монотонная биекция $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$ с условиями $RC(p_i) = RC(p_j)$, $f_{i,i} = id_{p_i(M)}$ и $f_{j,l} \circ f_{i,j} = f_{i,l}$ для всех (i, j), $(j, l) \in \varepsilon$, так что T допускает элиминацию кванторов до языка*

$$\{=, <\} \cup \{c_i : i \le n\} \cup \{U_s(x) : s \le k\} \cup \{E^{p_s}_l(x, y) : s \le k, l \le n_{p_s}\} \cup \{f_{i,j} : (i, j) \in \varepsilon\},$$

где $U_s(x)$ изолирует тип p_s для каждого $s \le k$. Более того, любому упорядочению с выделенными элементами, как в (i)–(ii), *и любым подходящим отношением эквивалентности ε, как в* (iii), *соответствует $\aleph_0$-категоричная вполне о-минимальная теория.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $C = \{c \in M : c$ является $\emptyset$-определимым в $M\}$. В силу $\aleph_0$-категоричности T C должно быть конечным. Пусть множество C $(\cup\{-\infty, +\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов) перечислено как $\{c_0, \ldots, c_n\}$.

Далее, предположим, что $I_j = \{x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j\} \neq \emptyset$. Тогда I_j должно быть плотным без концевых точек. Если I_j является 1-неразличимым над $\emptyset$, тогда существует $p^j \in S_1(\emptyset)$ такой, что $I_j = p^j(M)$, т. е. $k_j = 1$. Если I_j не является 1-неразличимым над $\emptyset$, тогда в силу $\aleph_0$-категоричности существуют $k_j \in \omega$ и $p^j_1, \ldots, p^j_{k_j} \in S_1(\emptyset)$, так что $I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p^j_s(M)$.

(ii) В силу теоремы 2 T — бинарная, и, следовательно, в силу теоремы 5.1 [5] T имеет конечный ранг выпуклости. Поэтому для каждого неалгебраического 1-типа $p \in S_1(\emptyset)$ существует некоторый $n_p < \omega$ такой, что $RC(p) = n_p$, т. е. существуют $\emptyset$-определимые отношения эквивалентности $E^p_1(x,y), \ldots, E^p_{n_p-1}(x,y)$ с требуемыми в формулировке свойствами. Более того, в силу бинарности T для любого $\alpha \in p(M)$ множества $E^p_1(M, \alpha)$ и $E^p_{j+1}(M, \alpha) \setminus E^p_j(M, \alpha)$ для каждого $1 \le j \le (n_p - 2)$ являются неразличимыми над $\emptyset$.

(iii) Пусть $\{p_s \mid s \le k < \omega\}$ — перечисление всех неалгебраических 1-типов над $\emptyset$ и пусть

$$\varepsilon = \{(i, j) : p_i \not\perp^w p_j, 1 \le i, j \le k\}.$$

Согласно факту 1 ε является отношением эквивалентности на $S_1(\emptyset)$. Если $p_i \not\perp^w p_j$, то в силу вполне o-минимальности существует $\emptyset$-определимая биекция $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$, а лемма 4 гарантирует единственность и локальную монотонность $f_{i,j}$. Биективность $f_{i,j}$ обеспечивает выполнение условия $RC(p_i) = RC(p_j)$ и композиционных утверждений.

Рассмотрим произвольный возрастающий m-кортеж $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ элементов из M. Не умаляя общности, можем считать, что $a_i \neq c_j$ для всех $1 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$. Если существует неалгебраический $p \in S_1(\emptyset)$ такой, что $a_i \in p(M)$ для всех $i \leq m$, то в силу Предложения 2 тип данного кортежа определяется бинарной формулой, являющейся булевой комбинацией формул вида $x = y, x < y$, $c_i < x$, $x < c_i$, $U_s(x)$ и $E_l(x, y)$, которые имеют место на его координатах. Предположим, что существуют $s \geq 2$ и неалгебраические $p_1, \ldots, p_s \in S_1(\emptyset)$ такие, что $a_1^1, \ldots, a_{n_1}^1 \in p_1(M)$; $\ldots$; $a_1^s, \ldots, a_{n_s}^s \in p_s(M)$ и $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle = \langle a_1^1, \ldots, a_{n_1}^1; \ldots; a_1^s, \ldots, a_{n_s}^s \rangle$. Если $p_1, \ldots, p_s$ попарно слабо ортогональны, то в силу теоремы 1 тип данного кортежа также определяется бинарной формулой, являющейся булевой комбинацией формул, как выше. Если же семейство $\{p_1, \ldots, p_s\}$ не является попарно слабо ортогональным, то в силу теоремы 2 тип данного кортежа определяется бинарной формулой, являющейся булевой комбинацией формул вида $x = y, x < y$, $c_i < x$, $x < c_i$, $U_s(x)$, $y = f_{i,j}(x)$, $y < f_{i,j}(x)$, $f_{i,j}(x) < y$ и $E_l(x, y)$, которые имеют место на его координатах, откуда следует утверждаемая элиминация кванторов. $\square$

Список литературы

1. *Кулпешов Б. Ш.* Ранг выпуклости и ортогональность в слабо o-минимальных теориях // Известия Национальной Академии Наук Республики Казахстан. Серия физико-математическая. 2003. Т. 227. С. 26–31.

2. *Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn Ch.*, Weakly o-Minimal Structures and Real Closed Fields // Transactions of The American Mathematical Society. 2000. Vol. 352. P. 5435–5483.

3. *Baizhanov B. S.* Expansion of a Model of a Weakly o-Minimal Theory by a Family of Unary Predicates // J. of Symbolic Logic. 2001. Vol. 66. P. 1382–1414.

4. *Kulpeshov B. Sh.* Weakly o-Minimal Structures and Some of Their Properties // J. of Symbolic Logic. 1998. Vol. 63. P. 1511–1528.

5. *Kulpeshov B. Sh.* Criterion for Binarity of $\aleph_0$-Categorical Weakly o-Minimal Theories // Annals of Pure and Applied Logic. 2007. Vol. 145. Is. 3. P. 354–367.

6. *Pillay A., Steinhorn Ch.* Definable Sets in Ordered Structures I // Transactions of the American Mathematical Society. 1986. Vol. 295. P. 565–592.

Материал поступил в редколлегию 16.10.2007

Адрес автора

КУЛПЕШОВ Бейбут Шайыкович

Институт проблем информатики и управления

ул. Пушкина 125, Алматы, 050010, Казахстан

e-mail: kbsh@ipic.kz, kulpesh@mail.ru