УДК 510.10 + 510.57

С. С. Оспичев

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НУМЕРАЦИЙ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ ИЕРАРХИИ ЕРШОВА*

В статье показано, что не существует Δ_a^{-1}-вычислимой нумерации семейства всех Δ_a^{-1}-множеств, где a — конструктивный ординал. Также было доказано, что существует минимальная ω-вычислимая нумерация семейства всех множеств из $\bigcup\limits_{k\in\omega} \Sigma_k^{-1}$.

Ключевые слова: вычислимая нумерация, фридбергова нумерация, иерархия Ершова.

Введение

Данная работа посвящена изучению свойств вычислимых нумераций в иерархии Ершова [1]. Понятие $\sum_n^{-1}$ было введено Ю. Л. Ершовым в 1968 г. Вычислимость $\sum_n^{-1}$-множеств значительно отличается от вычислимости вычислимо перечислимых множеств. В вычислимо перечислимых множествах элемент перечисляется в множество по определенной процедуре и больше это множество не покидает. В иерархии Ершова же элемент множества может перечисляться в множество и покидать его несколько раз.

Одним из основных вопросов теории вычислимых нумераций является изучение строения главных и минимальных нумераций, порождающих экстремальные элементы в полурешетках Роджерса. Впервые исследования минимальных нумераций были проведены Р. Ф. Фридбергом, который показал наличие у семейства всех вычислимо перечислимых множеств однозначной вычислимой нумерации, которая является и минимальной. Позже, в [2], было показано существование $\sum_n^{-1}$-вычислимой фридберговой нумерации для семейства всех $\sum_n^{-1}$-вычислимых множеств.

Целью данной работы является построение минимальной ω-вычислимой нумерации семейства всех множеств из $\bigcup\limits_{k\in\omega} \Sigma_k^{-1}$(определение клиниевской системы обозначений $\mathcal{O}$ и других понятий, используемых в работе, можно найти, например, в [3]), а также доказательство того факта, что не существует Δ_a^{-1}-вычислимой нумерации семейства всех Δ_a^{-1}-множеств.

Перейдем к непосредственному описанию иерархии Ершова.

§ 1. Основные определения

Приведем определение иерархии Ершова (следуя [3]).

* Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-12140_офи_м и грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-3606.2010.1, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (02.740.11.0429)

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 125–132

Пусть S — унивалентная система обозначений для конструктивных ординалов, и α — ординал, получивший обозначение a при S.

Определение 1. Множество $A \subseteq \omega$ принадлежит уровню Σ^{-1}_{α} иерархии Ершова, если существует такая частично вычислимая функция Ψ, что для любого x

$$x \in A \to \exists\lambda(\Psi(\lambda, x)\downarrow) \ \text{и} \ A(x) = \Psi((\mu\lambda_{<\alpha})_S(\Psi((\lambda)_S, x)\downarrow, x)),$$
$$x \notin A \to \ \text{либо} \ \forall\lambda\,(\Psi(\lambda, x)\uparrow), \ \text{либо} \ \exists\lambda\,(\Psi(\lambda, x)\downarrow) \ \text{и} \ A(x) = \Psi((\mu\lambda_{<\alpha})_S(\Psi((\lambda)_S, x)\downarrow, x)).$$

Теперь приведем эквивалентные определения, используемые для определения иерархии Ершова на конечных уровнях, а также для уровня Δ^{-1}_{α}.

Определение 2. Множество A назовем n-вычислимо перечислимым ($A \in \Sigma^{-1}_{n}$), если существует равномерно вычислимая последовательность множеств $\{A_s\}_{s\in\omega}$, что для всех x

$$A(x) = \lim_s A_s(x) \quad \text{и} \quad \big|\{s \in \omega \mid A_s(x) \neq A_{s+1}(x)\}\big| \leqslant n.$$

Определение 3. Пусть S — унивалентная система обозначений для конструктивных ординалов, $A \subseteq \omega$, и α — ординал, получивший обозначение a при S. $A \in \Delta^{-1}_{\alpha}$, если для любого x

$$A(x) = \Psi((\mu\lambda_{<\alpha})_S\,(\Psi((\lambda)_S, x)\downarrow, x))$$

для некоторой частично вычислимой функции Ψ.

Определим также понятие Σ^{-1}_{α}-вычислимой нумерации (согласно [4]).

Определение 4. Нумерацию η будем называть $\Sigma^{-1}_{\alpha}(\Delta^{-1}_{\alpha})$-вычислимой, если множество $\{\langle x, y\rangle \mid y \in \eta x\}$ является $\Sigma^{-1}_{\alpha}(\Delta^{-1}_{\alpha})$-множеством.

§ 2. Семейства Δ^{-1}_{a}-множеств

Заметим, что из определения Δ^{-1}_{a}-множеств следует, что $A(x)$ — всюду определенная функция.

Теорема 1. *Не существует Δ^{-1}_{a}-вычислимой нумерации семейства всех Δ^{-1}_{a}-множеств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует Δ^{-1}_{a}-вычислимая нумерация $\{\nu_n\}_{n\in\omega}$ семейства всех Δ^{-1}_{a}-множеств. Тогда для любого натурального n функция $\nu_n(x)$ — всюду определенная. Рассмотрим функцию $\nu_n(n)$ и покажем, что она является характеристической функцией для некоторого Δ^{-1}_{a}-множества.

Так как $\{\nu_n\}_{n\in\omega}$ Δ^{-1}_{a}-вычислима, то множество $\{\,\langle n, m\rangle \mid m \in \nu_n\,\}$ является Δ^{-1}_{a}-множеством, а значит, и $H = \{n | n \in \nu_n\}$ – Δ^{-1}_{a}-множество, причем функция $\nu_n(n)$ является его характеристической функцией.

Пусть m такое, что $\nu_m = \overline{H}$. Тогда, если $m \in H$, то $\nu_m(m) = 1$ из того, что $\nu_n(n)$ — характеристическая для H, и $\nu_m(m) = 0$ из определения нумерации ν. Если же $m \notin H$, то $\nu_m(m) = 0$ из того, что $\nu_n(n)$ — характеристическая для H, и $\nu_m(m) = 1$ из определения нумерации ν. Получили противоречие, а значит, нумерации семейства всех Δ^{-1}_{a}-множеств быть не может.

§ 3. Нумерации семейств множеств конечных уровней иерархии Ершова

Определение 5. Σ_n^{-1}-множество A назовем Σ_n^{-1}-точным, если для любого $k < n$ A не является Σ_k^{-1}-множеством.

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если A — Σ_{n+1}^{-1}-точное множество, то множества $A \cup \{a\}$ и $A \setminus \{a\}$, где $a \in \omega$, также являются Σ_{n+1}^{-1}-точными множествами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $A \cup \{a\}$. Допустим, что оно не является Σ_{n+1}^{-1}-точным.

Рассмотрим 2 случая.

$a \in A$. Тогда $A \cup \{a\} = A$, и значит, является Σ_{n+1}^{-1}-точным. Противоречие.

$a \notin A$. По предположению множество $A \cup \{a\}$ не является Σ_{n+1}^{-1}-точным, а значит, множество $A \cup \{a\} \leqslant_m \Xi_n^{-1}$. Другими словами, существует такая вычислимая функция f, что

$$x \in A \cup \{a\} \to f(x) \in \Xi_n^{-1},$$
$$x \notin A \cup \{a\} \to f(x) \notin \Xi_n^{-1}.$$

Пусть $b \in \omega$ такое, что $b \notin \Xi_n^{-1}$.

Такое b можно найти, например так.

Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ — функции, которые сводят Ξ_1^{-1} к Ξ_2^{-1}, Ξ_2^{-1} к Ξ_3^{-1}, …, Ξ_{n-1}^{-1} к Ξ_n^{-1} соответственно. $\Xi_1^{-1} = \{2x \mid x \in \omega\}$. Значит, $1 \notin \Xi_1^{-1}$. И значит,

$$h_{n-1}(h_n(\ldots h_2(h_1(1))\ldots)) \notin \Xi_n^{-1}.$$

Возьмем $b = h_{n-1}(h_n(\ldots h_2(h_1(1))\ldots))$.

Определим вычислимую функцию g:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ b, & x = a. \end{cases}$$

Функция g m-сводит A к Ξ_n^{-1}. А этого быть не может, так как A — Σ_{n+1}^{-1}-точное множество. Противоречие. Значит, множество $A \cup \{a\}$ — также Σ_{n+1}^{-1}-точное. Теперь рассмотрим второе множество $A \setminus \{a\}$. Допустим, что оно не является Σ_n^{-1}-точным.

Рассмотрим 2 случая.

$a \notin A$. Тогда $A \setminus \{a\} = A$, и значит, является Σ_{n+1}^{-1}-точным. Противоречие.

$a \in A$. По предположению множество $A \setminus \{a\}$ не является Σ_{n+1}^{-1}-точным, а значит, множество $A \setminus \{a\} \leqslant_m \Xi_n^{-1}$ (Xi_n^{-1} — универсальное множество для класса Σ_n^{-1}-множеств). Иными словами, существует такая вычислимая функция f, что

$$x \in A \setminus \{a\} \to f(x) \in \Xi_n^{-1},$$
$$x \notin A \setminus \{a\} \to f(x) \notin \Xi_n^{-1}.$$

Пусть $b \in \omega$ такое, что $b \in \Xi_n^{-1}$. Такое b можно найти, например так.

Пусть $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ — функции, которые сводят Ξ_1^{-1} к Ξ_2^{-1}, Ξ_2^{-1} к Ξ_3^{-1}, …, Ξ_{n-1}^{-1} к Ξ_n^{-1} соответственно. $\Xi_1^{-1} = \{2x \mid x \in \omega\}$. Значит, $2 \in \Xi_1^{-1}$. И значит,

$$h_{n-1}(h_n(\dots h_2(h_1(2))\dots)) \in \Xi_n^{-1}.$$

Возьмем $b = h_{n-1}(h_n(\dots h_2(h_1(2))\dots))$. Определим вычислимую функцию g:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ b, & x = a. \end{cases}$$

Функция g m-сводит A к Ξ_n^{-1}. А этого быть не может, так как A — Σ_{n+1}^{-1}-точное множество. Противоречие. Значит, множество $A \setminus \{a\}$ — также Σ_{n+1}^{-1}-точное.

Лемма доказана. □

Легко заметить, что множества $\Xi_n^{-1} \cup [0, x]$ и $\Xi_n^{-1} \setminus [0, x]$ — Σ_n^{-1}-точные.

В работе [2] была сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого n существует n-вычислимая фридбергова нумерация семейства всех n-вычислимо перечислимых множеств.*

Этот результат можно усилить, показав равномерность по уровню иерархии построения фридберговых нумераций. Однако такое усиление ведет также и к усложнению самих нумераций. Полученный результат сформулирован так.

Теорема 3. *Для любого $k > 1$ существуют $2k$-вычислимая фридбергова нумерация семейства всех k-вычислимо перечислимых множеств и вычислимая функция, которая m-сводит фридбергову нумерацию семейства всех $(k-1)$-вычислимо перечислимых множеств к фридберговой нумерации семейства всех k-вычислимо перечислимых множеств. И фридбергова нумерация, и сводящая функция строятся равномерно по k.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (теоремы) проводим индукцией по k.

Пусть $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$ — вычислимая нумерация семейства S всех k-вычислимо перечислимых множеств (не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha_0 = \omega$, если k — четное, и $\alpha_0 = \varnothing$ иначе), а $\{\pi_n\}_{n\in\omega}$ — $(2k-2)$-вычислимая фридбергова нумерация семейства всех $(k-1)$-вычислимо перечислимых множеств. Тогда определим нумерацию $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$:

$$\alpha_n = \begin{cases} \gamma_x, & n = 2x; \\ \pi_x, & n = 2x+1. \end{cases}$$

Нумерация $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ также является k-вычислимой нумерацией семейства S всех k-вычислимо перечислимых множеств, однако всем нечетным n соответствуют только $(k-1)$-вычислимо перечислимые множества, причем без повторений. Будем строить $2k$-вычислимую нумерацию $\{\beta_n\}_{n\in\omega}$ семейства S, а также $\varnothing$-частично вычислимую функцию f (аппроксимируемую частично вычислимыми функциями f_s: $f(n)\downarrow = m$, если $f_s(n) = m$ для бесконечно многих s и $f(n)$ не определена иначе). Также будем строить вычислимую функцию g, которая и будет сводящей.

Требования к конструкции:

(1) $f(n)$ неопределена для всех нечетных n.

(2) Если $\alpha_n = \alpha_{n'}$ для некоторого $n' < n$, тогда $f(n)$ неопределена.

(3) Если n — четное, и $\alpha_n \neq \alpha_{n'}$ для всех $n' < n$, тогда либо $f(n)$ определена и $\alpha_n = \beta_{f(n)}$; либо α_n вида $\Xi_k \cup [0, x]$ (если k — нечетное) или $\Xi_k \setminus [0, x]$ (если k — четное) и существует такое $m \in \omega \setminus \mathrm{range}(f)$.

Если же n — нечетное, тогда $\alpha_n = \beta_{g(n)}$.

(4) Любое множество β_m, где $m \notin \mathrm{range}(f) \cup \mathrm{range}(g)$ должно быть вида $\Xi_k \cup [0, x]$ (если k — нечетное) или $\Xi_k \setminus [0, x]$ (если k — четное).

(5) Для любого множества вида $\Xi_k \cup [0, x]$ (если k — нечетное) или $\Xi_k \setminus [0, x]$ (если k — четное) существует единственное m, такое что β_m с ним совпадает.

Конструкция.

На уровне $s = 0$, определяем $\beta_0 = \omega$, если k — нечетное ($\beta_0 = \varnothing$, если k — четное) и $f(0) = f_0(0) = 0$, и пока $f_0(n)$ неопределена для всех $n > 0$. Также определяем $g(0) = 1$, $\beta_{1,0} = \alpha_{1,0}$, $H_0 = g(0)$.

На уровне $s + 1$, выполним следующие шаги.

Шаг 1. Если $f_s(n)$ определена, и для некоторого $n' < n$

$$\alpha_{n',s} \restriction (f_s(n) + 1) = \alpha_{n,s} \restriction (f_s(n) + 1).$$

Тогда $f_{s+1}(n)$ неопределена.

Шаг 2. Если $f_s(n)$ определена и $n > 0$, и для некоторого $s' < s$ и некоторого $m \in \mathrm{range}(f_{s'}) \setminus \mathrm{range}(f_s)$

$$\beta_{m,s} \restriction (f_s(n) + 1) = \alpha_{f_s(n),s} \restriction (f_s(n) + 1).$$

Тогда $f_{s+1}(n)$ неопределена.

Шаг 3. Если $f_s(n)$ определена, $n > 0$, и для некоторого $s' < s + 1$

$$\beta_{g(s),s} \restriction (f_s(n) + 1) = \alpha_{f_s(n),s} \restriction (f_s(n) + 1).$$

Тогда $f_{s+1}(n)$ неопределена.

Шаг 4. Если $f_s(n)$ определена, но $f_{s+1}(n)$ неопределена (т. е. $f(n)$ стала неопределенной в ходе шага 1 или 2), тогда для каждого такого n (по возрастанию), множества

$$\beta_{f_s(n)} = \beta_{f_s(n),s+1} = \Xi_{k,s} \cup [0, x], \quad \text{если } k \text{ — нечетное;}$$
$$\beta_{f_s(n)} = \beta_{f_s(n),s+1} = \Xi_{k,s} \setminus [0, x], \quad \text{если } k \text{ — четное}$$

для некоторого натурального x, большего, чем любое число, встречавшееся в конструкции.

Шаг 5. Если $f_s(n)$ неопределена для $n \leqslant s$, n — четное, тогда для каждого такого n (по возрастанию) пусть $f_{s+1}(n)$ будет наименьшим m не из $\bigcup\limits_{s' \leqslant s} \mathrm{range}(f_{s'}) \cup H_s$ и не равным $f_{s+1}(n')$ ни для какого $n' < n$.

Шаг 6. Пусть $g(s + 1)$ — наименьшее такое m не из $\bigcup\limits_{s' \leqslant s+1} \mathrm{range}(f_{s'}) \cup H_s$. $H_{s+1} = H_s \cup \{g(s + 1)\}$.

Шаг 7. Если $f_{s+1}(n)$ определена, то пусть $\beta_{f_{s+1}(n),s+1} = \alpha_{n,s+1}$. Для всех $s' \leqslant s + 1$ $\beta_{g(s'),s+1} = \alpha_{2s'+1,s+1}$.

Проверка.

(1) В ходе шага 5 f_s определяется только для четных n.
(2) Если $f_s(n)$ определена и для некоторого $n' < n$ $\alpha_{n'} = \alpha_n$, то $f(n)$ не определена.
(3) Если n — четное и для всех $n' < n$ $\alpha_{n'} \neq \alpha_n$, тогда $f(n)$ становится неопределенной в ходе первого шага не более, чем конечное число раз. Если $f(n)$ становится неопределенной для одного и того же m бесконечно много раз, тогда $\alpha_{n'} = \beta_m$, как и требовалось. С другой стороны, так как $\alpha_{n,s} = \Xi_{k,s} \cup [0,x](\Xi_k \setminus [0,x])$ на разных уровнях для все больших и больших(все меньших и меньших) x, то поэтому $\alpha_n = \omega(\varnothing)$, а значит, $n = 0$ или $n = 2k+1$, и шаг 2 никогда не применяется к n.
(4) Сразу следует из шага 4.
(5) Зафиксируем x. Шаги 2, 3 и 4 показывают, что может быть не более одного m, такого что $\beta_m = \Xi_k \cup [0,x](\Xi_k \setminus [0,x])$. Зафиксируем минимальное такое $\alpha_n = \Xi_k \cup [0,x](\Xi_k \setminus [0,x])$. Тогда либо $f(n)$ определена и $\beta_{f(n)} = \Xi_k \cup [0,x](\Xi_k \setminus [0,x])$, либо можно показать также как в случае (2), что существует такое m, что $\beta_m = \Xi_k \cup [0,x](\Xi_k \setminus [0,x])$.

Заметим также, что пока β_n не является нумерацией без повторений, так как $\omega(\varnothing)$ встречается дважды: β_0 и β_{2k+1} для некоторого k. Сдвинем нумерацию на единицу, т. е. $\beta_n = \beta_{n+1}$.

Покажем, что нумерация β — $2k$-вычислимая. Заметим, что для всех $n \in \operatorname{range}(g)$ β_n строится не более чем за $2k-2$ ошибок, так как $\alpha_{2k+1} = \pi_k$ — $(2k-2)$-вычислимая нумерация.

Для всех $n \in \operatorname{range}(f)$ β_n строится не более чем за k ошибок (см. конструкцию фридберговой нумерации).

Для всех $n \notin \operatorname{range}(f) \cup \operatorname{range}(g)$ нумерация β_n будет строиться не более чем за $k+k = 2k$ ошибок. Такое количество получается из-за шагов 2 и 3. До того, как к этому n мы применили шаг 2 или 3, для некоторого s, $n \in \operatorname{range}(f_s)$, а значит, β_n строится не более чем за k ошибок, как и в предыдущем пункте. Однако после применения шага 2 или 3 мы начинаем строить β_n как новое $\sum_k^{-1}$-множество за не более чем k ошибок. А значит, в самом плохом случае мы можем получить $2k$ ошибок.

Теорема доказана. □

Так как указанная выше конструкция работает равномерно по номеру k, то определим $\{\beta_n^k\}_{n\in\omega}$ — построенная в предыдущей теореме $2k$-вычислимая нумерация семейства всех $\sum_k^{-1}$-множеств. А также для любой такой нумерации $\{\beta_n^k\}_{n\in\omega}$ определим (также из предыдущей теоремы) вычислимую функцию g^k, являющуюся m-сводящей нумерацию $\{\beta_n^k\}_{n\in\omega}$ к нумерации $\{\beta_n^{k+1}\}_{n\in\omega}$. Также определим вычислимую функцию g_a^b, задаваемую так:

$$g_a^b(x) = g^a(g^{a+1}(\ldots g^{b-2}(g^{b-1}(x))\ldots).$$

Функция g_a^b сводит нумерацию $\{\beta_n^a\}_{n\in\omega}$ к нумерации $\{\beta_n^b\}_{n\in\omega}$.

Определение 6. Зададим нумерацию $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$:

$$\gamma_n = \beta_{n_2}^{n_1},$$

где $n = \langle n_1, n_2 \rangle$.

Лемма 2. *Нумерация γ_n будет ω-вычислимой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы показать ω-вычислимость нумерации γ_n, покажем, что множество $G = \{\langle n, l, m\rangle \mid m \in \gamma_{\langle n,l\rangle}\}$ будет ω-вычислимым. Пусть $B^k = \{\langle m, n\rangle \mid m \in \beta_n^k\}$. Так как B^k — $2k$-вычислимое множество, то существует равномерно вычислимая последовательность множеств $\{B_s^k\}_{s\in\omega}$ такая, что

$$B^k(x) = \lim_s B_s^k(x) \quad \text{и} \quad \left|\{s \in \omega \mid B_s^k(x) \neq B_{s+1}^k(x)\}\right| \leqslant 2k.$$

Рассмотрим множество A:

$$A = \bigoplus_{n\in\omega} \{\langle l, m\rangle \mid m \in \gamma_{\langle n,l\rangle}\},$$
$$A = \bigoplus_{n\in\omega} \{\langle l, m\rangle \mid m \in \beta_l^n\},$$
$$A = \bigoplus_{n\in\omega} B^n.$$

Рассмотрим равномерно вычислимую последовательность множеств $\{A_s\}_{s\in\omega}$, где

$$A_s = \bigoplus_{n\in\omega} B_s^n.$$

Ясно, что для любого x, $A(x) = \lim_s A_s(x)$. Покажем, что A — ω-вычислимое. Для этого нужно указать такую вычислимую функцию g, что

$$\left|\{s \in \omega \mid A_s(x) \neq A_{s+1}(x)\}\right| \leqslant g(x).$$

Определим функцию g так:

$$g(x) = 2x_1, \quad \text{где} \quad x = \langle x_1, x_2\rangle.$$

$x = \langle x_1, x_2\rangle \in A_s \Leftrightarrow x_2 \in B_s^{x_1}$, а значит, $|\{s \in \omega \mid A_s(x) \neq A_{s+1}(x)\}| = |\{s \in \omega \mid B_s^{x_1}(x_2) \neq B_{s+1}^{x_1}(x_2)\}| \leqslant 2x_1$.

Показали, что множество A — ω-вычислимое. Очевидно, что G m-сводится к A, значит, нумерация γ_n будет ω-вычислимой.

Лемма 3. *Для любой ω-вычислимой нумерации η, из того, что $\eta \leqslant_m \gamma$, следует, что $\gamma \leqslant_m \eta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f — вычислимая функция, которая m-сводит η к γ. Определим новую функцию $h(x)$:

$$h(x) = \mu z \left(g_{z_1}^{f_1(x)}(z_2) = f_2(x)\right),$$

где $z = \langle z_1, z_2\rangle$, $f = \langle f_1, f_2\rangle$ (далее индексы 1 и 2 будут означать левую и правую компоненты числа).

Полученная функция h также сводит η к γ, но теперь $h_1(x)$ выдает наименьший уровень иерархии, в котором появляется множество η_x.

Известно, что фридбергова нумерация является минимальной, и сводящую функцию в случае фридберговой нумерации можно определить так: $g(x) = \mu y(x = f(y))$. Легко заметить, что в нашем случае определенная таким образом функция $g(x)$ получается не всюду определенной, так как такая конструкция не учитывает «повторов» одних и тех же множеств на различных уровнях.

Определим функцию g так:

$$gx = \mu y \left(g^{x_1}_{h_1(y)}(h_2(y)) = x_2 \right).$$

Очевидно, что g — частично вычислимая. Покажем, что она всюду определена. Возникают две возможные проблемы.

(1) Не может ли возникнуть таких y и x, что $x_1 < h_1(y)$?
Поскольку $h_1(y)$ — минимальный уровень, на котором «появляется» множество η_y, число x_1 не может быть меньше $h_1(y)$.

(2) Всегда ли определено выражение $g^b_a(x) = y$, $a < b$?
$g^b_a(x) = y, a < b$ всегда определяется, так как $\forall b, y$ всегда найдутся такие a и x, что равенство выполнится. Крайним вариантом всегда можно считать $g^b_b(y) = y, a < b$.

Значит, $g(x)$ — вычислимая, и $g(x)$ сводит γ к η. Лемма доказана. □

Из этих лемм вытекает основной результат работы

Теорема 4. *Существует минимальная ω-вычислимая нумерация семейства всех множеств из* $\bigcup\limits_{k\in\omega} \Sigma^{-1}_k$.

Список литературы

1. *Ершов Ю. Л.* Об одной иерархии множеств III // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 1. С. 34–51.

2. *Goncharov S. S., Lempp S., Solomon D. R.* Friedberg Numberings of Families of n-Computably Enumerable Sets // Algebra and Logic. Plenum Publ. Corp. 2002. Vol. 41. No. 2. P. 81–86.

3. *Арсланов М. М.* Иерархия Ершова. Казань, 2007.

4. *Гончаров С. С., Сорби А.* Обобщенные вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 621–641.

Материал поступил в редколлегию 22.01.2010

Адрес автора

ОСПИЧЕВ Сергей Сергеевич

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: ospichev@gmail.com