УДК 517.962.22

А. А. Ломов

О ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ ИНДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ*

Рассматриваются матричные линейные разностные уравнения, используемые в задачах управления подвижными объектами. Оценка параметров уравнения считается оптимальной, если расстояние между множеством решений уравнения и предъявленной траекторией объекта минимально. Получены количественные показатели локальной устойчивости оптимальных оценок.

Ключевые слова: линейные разностные уравнения, обратные задачи для коэффициентов, оценки параметров, устойчивость оценок.

Введение

Пусть дано линейное разностное уравнение с правой частью

$$\alpha_p y[k+p] + \ldots + \alpha_0 y[k] = \beta_p u[k+p] + \ldots + \beta_0 u[k], \quad k = \overline{1, N-p}. \tag{1}$$

Коэффициенты уравнения суть матрицы $\alpha_i = \alpha_i(\theta) \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\beta_i = \beta_i(\theta) \in \mathbb{R}^{r\times m}$, которые аффинно зависят от параметра $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n$, $n < 2r(r+m)(p+1)$. Параметр θ фиксирован и подлежит идентификации по наблюдению $x \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$ некоторого решения уравнения[1]

$$z = (y[1]; u[1]; \ldots; y[N]; u[N]) \in \mathbb{R}^{N(r+m)}.$$

Предполагается, что наблюдение x содержит возмущения и не может быть описано уравнением (1). Подобные задачи идентификации являются типичными в теории управления подвижными объектами.

Оптимальная оценка $\hat\theta$ параметра θ вычисляется из условия минимума функции потерь

$$\hat\theta = \arg\min_{\theta\in\Theta} \rho(\theta, x).$$

Выбор функции ρ зависит от предположений о характере возмущений в наблюдениях x. Точные утверждения об оптимальности той или иной функции потерь удается получить в рамках вероятностных предположений. Наиболее известны функции потерь по невязке

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00035) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 107).

[1] Здесь и далее $(A; B) \doteq \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, $(A, B) \doteq \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$, «$\doteq$» — знак равенства по определению.

уравнения и по невязке оптимального решения. Обозначим $\gamma_i \doteq (\alpha_i, -\beta_i)$ и запишем уравнение (1) в матричном виде[2]:

$$G_\theta z = 0, \qquad G_\theta = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Оптимальным с точки зрения невязки уравнения является значение параметра, которое минимизирует норму[3] $\|G_\theta x\|$:

$$\hat\theta_1 = \arg\min_{\theta\in\Theta} \|G_\theta x\|.$$

При заданном значении параметра θ оптимальным назовем решение $\hat z = \hat z(\theta)$, ближайшее к наблюдениям:

$$\|x - \hat z(\theta)\| = \min_{G_\theta z = 0} \|x - z\|.$$

Оптимальной оценкой $\hat\theta_2$ с точки зрения невязки оптимального решения будет значение параметра, которое минимизирует норму $\|x - \hat z(\theta)\|$:

$$\hat\theta_2 = \arg\min_{\theta\in\Theta} \|x - \hat z(\theta)\| = \arg\min_{\theta\in\Theta} \min_{G_\theta z = 0} \|x - z\|. \tag{3}$$

Локальная устойчивость оценок характеризуется неравенствами вида

$$\|\Delta\hat\theta(\Delta x)\| \leqslant f(\|\Delta x\|), \tag{4}$$

где $f(\cdot)$ — заданная функция, обычно линейная или квадратичная. Результаты по устойчивости оценок $\hat\theta_1$ приведены в монографии [1] (см. теорему 1.4.6). Эти оценки более просты, чем оценки $\hat\theta_2$, ввиду того, что они явно выражаются через наблюдения x (см. раздел 1.1 в монографии [1]). Что касается $\hat\theta_2$, то устойчивость этих оценок до недавнего времени была исследована только в случае $p = 0$ [1–3]. Трудности вызваны тем, что зависимость $\hat\theta_2(x)$ не имеет явного выражения и описывается как неявная функция из уравнения[4] $\rho'_\theta(\hat\theta_2, x) = 0$.

Более просто получается другая характеристика локальной устойчивости — через разложение функции $\hat\theta_2(x)$ в ряд Тейлора до линейного члена:

$$\hat\theta_2(x + \Delta x) = \hat\theta_2(x) + S^{\mathrm{T}}\Delta x + O(\|\Delta x\|^2).$$

Выражения для слагаемого $S^{\mathrm{T}}\Delta x$ в пределе $\rho \to 0$ были получены в [4–6]. Подобного рода характеристики устойчивости не приводят к оценке сверху для нормы отклонений $\|\Delta\theta\|$, поскольку оставляют открытым вопрос о величине остаточного члена.

С вероятностной точки зрения, при аддитивных случайных возмущениях в наблюдениях x состоятельными являются именно оценки $\hat\theta_2$ [3; 7; 8]. Они также выглядят

---

[2] Иногда будем опускать индекс «θ»: $G_\theta \doteq G$.

[3] Здесь и далее $\| \ \|$ обозначает евклидову норму.

[4] Штрихом обозначаем частную производную по переменной, указанной в нижнем индексе.

предпочтительными с точки зрения аппроксимации наблюдений x решениями уравнения (1). Этим обусловлен интерес к оценкам $\hat{\theta}_2$ в литературе. Алгоритмы вычисления $\hat{\theta}_2$ были предложены и изучались в [9–13]. Условия существования и единственности исследованы в [14–18]. Проблема устойчивости упоминалась, в частности, в связи с задачей выделения показательных функций из наблюдений затухающих рядов [19. Гл. IV, п. 23]. Сложный характер экстремумов (3) отмечался в [13; 20; 21].

В настоящей работе для оценок $\hat{\theta}_2$ при $p \geqslant 0$ получена характеристика устойчивости вида (4). Для этого вычислены необходимые производные и дана оценка сверху для величины остаточного члена в формуле Тейлора.

Далее примем $\rho(\theta, x) = \|x - \hat{z}(\theta)\|$, $\hat{\theta} \doteq \hat{\theta}_2$. Когда будет идти речь о зависимости $\hat{\theta}(x)$, будем иногда писать просто $\theta(x)$.

Функция $\hat{\theta}(x)$

Обозначим

$$\gamma_\theta \doteq \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)(p+1)}, \qquad \gamma \doteq \operatorname{vect}\gamma_\theta^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

где vect — выстраивание по столбцам[5], и «т» — символ транспонирования. Полагаем $\gamma = \gamma(\theta) = d + D\theta = (d, D)\,(1; \theta) \doteq \widetilde{D}\tilde{\theta}$, матрицу $\widetilde{D}$ считаем известной. Определим многочленную матрицу

$$\gamma_\theta(\varsigma) \doteq \gamma_0 + \gamma_1\varsigma + \ldots + \gamma_p\varsigma^p. \tag{6}$$

Обозначим $\operatorname{nul} G_\theta$ множество решений уравнения (2). Наложим условия на зависимость $\gamma(\theta)$:

(I) Для каждого значения параметра $\theta \in \Theta$ в матрице $\gamma_\theta(\varsigma)$: а) многочленные строки линейно независимы; б) сумма степеней строк $p_1+\ldots+p_r$ постоянна; в) $\gamma_\theta(\varsigma)$ имеет наименьшую сумму степеней строк среди всех левоэквивалентных $\gamma_\theta(\varsigma)$ матриц; г) числовая матрица γ_0 в определении (6) имеет линейно независимые строки.

(II) Параметры уравнения (1) *различимы* в том смысле, что для любых двух разных параметров $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ множества решений $\operatorname{nul} G_{\theta_1}$ и $\operatorname{nul} G_{\theta_2}$ не совпадают, т. е. отображение $\operatorname{nul} G_\theta \mapsto \theta$ однозначно.

Различимость параметров определяется только зависимостью $\gamma(\theta)$ и, в частности, структурой уравнения (1) (числами r, m, p). Например, если $\gamma(\theta) = \theta$, то параметры уравнения заведомо неразличимы[6]. Если различимость не имеет места, то ни при

[5] Например, $\operatorname{vect}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 6 \end{pmatrix}$.

[6] В этом случае два уравнения (1) с разными параметрами θ и $\alpha\theta$, где α — ненулевая константа, очевидно, имеют одни и те же решения, так как эти уравнения отличаются только умножением на константу α.

каких наблюдениях x невозможно получить единственного решения $\theta(x)$. Наоборот, выполнение условия (II) означает, что среди решений $z \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$ системы уравнений (1) существует такое z, что столбцы матрицы $V(z)D$ линейно независимы (матрица $V(z)$ определена ниже, в (11)), и тогда решение задачи идентификации $\theta(x)$ по невозмущенному наблюдению $x = z$ единственно. Алгоритмически проверяемые критерии различимости в виде ограничений на ранги специальных матриц, построенных из элементов γ_θ, приведены в [17; 18].

Условие (I.а) гарантирует линейную независимость строк G_θ [22. Предложение 4.1] и существование обратной матрицы $C \doteq (G_\theta G_\theta^{\mathrm{T}})^{-1}$. Ввиду выражений (13) и сделанных ниже оценок условием единственности $\theta(x)$ (т. е. однозначной разрешимости задачи идентификации по наблюдению x) является неособенность матрицы $R_0 \doteq D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}C\widehat{V}D$, $\widehat{V} = V(\hat{z})$, что равносильно линейной независимости столбцов матрицы $V(\hat{z})D$.

Условия (I.б)–(I.г) обеспечивают сохранение свойства продолжимости[7] всех решений (1) при изменениях θ.

Обозначим

$$J(\theta, x) \doteq \tfrac{1}{2}\rho^2(\theta, x) = \tfrac{1}{2}\|x - \hat{z}\|^2. \tag{7}$$

Для функции $\hat{\theta}(x)$ можно использовать любое из двух равносильных определений:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\Theta} \rho(\theta, x) = \arg\min_{\theta\in\Theta} J(\theta, x).$$

Ниже будет показано, что функция $J(\theta, x)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка по θ и x. Поэтому существует неявная функция $\hat{\theta}(x)$, определяемая уравнением $J'_\theta(\hat{\theta}, x) = 0$.

Лемма 1. *Для производных функции $\hat{\theta} \doteq \theta(x)$ верны выражения*[8]*:*

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_j} = \left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x_j}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j \partial x_k} = \left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} \begin{pmatrix} a_{1,j} & \ldots & a_{n,j} \end{pmatrix} \left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x_k} +& \\ + \left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J'''_{\theta\theta x_k} \left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x_j} + \left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J'''_{\theta x_j x_k},&\end{aligned} \tag{9}$$

$$a_{s,j} \doteq J'''_{\theta\theta\theta_s} \left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x_j} - J'''_{\theta x_j \theta_s}, \quad a_{s,j} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad s \in \overline{1, n}.$$

Для получения характеристики устойчивости (4) нужно вывести выражение для приращения $\Delta\theta \doteq \theta(x + \Delta x) - \theta(x)$, учитывая, что формула конечных приращений применима только к функциям со значениями в $\mathbb{R}^1$ [23. Т. 1, гл. 3, п. 5]. Представим $\Delta\theta$ в виде суммы приращений 1-го и 2-го порядка малости по величине $\epsilon \doteq \|\Delta x\|$: $\Delta\theta = \Delta_1\theta + \Delta_2\theta$, $\Delta_k\theta \sim O(\epsilon^k)$. Первое слагаемое имеет вид

$$\Delta_1\theta = S^{\mathrm{T}}\Delta x, \quad S^{\mathrm{T}} = \left\|S^{\mathrm{T}}_{ij}\right\| = \left\|\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}(x)\right\|_j^i = -\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x},$$

---

[7] Решение z называется продолжимым, если оно является частью некоторого решения z' того же уравнения (1) с большим значением $N' > N$. Если решение непродолжимо, оно не имеет физического смысла [22].

[8] Доказательство этого и следующих утверждений см. в приложении

где θ_i — i-й элемент θ, $i = \overline{1,n}$, и $\|A_{ij}\|_j^i$ обозначает матрицу, составленную из элементов A_{ij}, $\|B_i\|^i$ — вектор-столбец (может быть, клеточный) из элементов (клеток) B_i, $\|C_j\|_j$ — вектор-строка. Второе слагаемое $\Delta_2\theta$ есть вектор, элементы которого суть квадратичные формы, представляющие собой остаточные члены поэлементного разложения вектор-функции $\Delta\theta(\Delta x)$ в ряд Тейлора:

$$\Delta_2\theta = \begin{pmatrix} \Delta_2\theta_1 \\ \vdots \\ \Delta_2\theta_n \end{pmatrix}, \qquad \Delta_2\theta_i = \tfrac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}\Psi_i(x + h_i\Delta x)\Delta x, \qquad h_i \in (0,1), \tag{10}$$

$$\Psi_i(x) \doteq \left\| \frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right\|_k^j, \quad i = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим линейную часть приращения. Вычислим производные $J''_{\theta\theta}$ и $J''_{\theta x}$, имея в виду соотношения $J''_{\theta\theta} = D^{\mathrm{T}} J''_{\gamma\gamma} D$, $J''_{\theta x} = D^{\mathrm{T}} J''_{\gamma x}$. Нам понадобятся два разных выражения для функции $J(\theta, x)$. Первое следует из определения (7):

$$J(\theta, x) = \min_{G_\theta z = 0} \tfrac{1}{2}\|x - z\|^2 = \tfrac{1}{2}\|x - \hat{z}\|^2 = \tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} \left(GG^{\mathrm{T}}\right)^{-1} Gx.$$

Для получения второго выражения запишем уравнение (2) в следующей форме[9]:

$$G_\theta z = V(z)\gamma = V(z)\widetilde{D}\tilde{\theta} = 0, \qquad V(z) = \begin{pmatrix} I_r \otimes v(1, p+1) \\ I_r \otimes v(2, p+2) \\ \vdots \\ I_r \otimes v(N-p, N) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$v(k,l) \doteq \begin{pmatrix} z^{\mathrm{T}}[k] & \ldots & z^{\mathrm{T}}[l] \end{pmatrix}, \qquad z[k] \doteq (y[k]; u[k]).$$

Тогда функция $J(\theta, x)$ может быть представлена в виде

$$J(\theta, x) = \tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} \left(GG^{\mathrm{T}}\right)^{-1} Gx = \tfrac{1}{2}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \widetilde{D}^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} C V \widetilde{D}\tilde{\theta},$$
$$V = V(x), \qquad C = C_\theta \doteq (G_\theta G_\theta^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Это есть второе выражение для $J(\theta, x)$.

Обозначим $\Pi \doteq I - G^{\mathrm{T}} C G$ проектор в $\mathbb{R}^{N(r+m)}$ на $\operatorname{nul} G$. Пусть γ^{ij} — ij-й элемент матрицы γ_θ (5). Пронумеруем элементы индексом $q = i + (j-1)r$. Матрица

$$E_q \doteq \partial G / \partial \gamma^q \tag{12}$$

состоит из нулей и единиц, в каждой строке и каждом столбце не более одной единицы. Верны следующие утверждения (если особо не оговорено иное, символы $\|\cdot\|$ всюду обозначают евклидову норму).

Лемма 2. *Матрица 2-х производных* $J''_{\theta\theta} \doteq \left\| \frac{\partial^2 J}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \right\|_j^i$ *может быть представлена в следующем виде*[10]:

$$J''_{\theta\theta} = R_0 + R_1 + R_2, \qquad R_k \sim O(\rho^k),$$

[9] Здесь и далее I — единичная матрица, I_r — единичная матрица размером $r \times r$, $\otimes$ — символ кронекерова произведения.

[10] В отличие от [5. Лемма 3], величина константы c_0 в утверждении леммы уменьшена в N раз.

$$R_0 \doteq D^{\mathrm{T}} \widehat{V}^{\mathrm{T}} C \widehat{V} D, \qquad \widehat{V} \doteq V(\hat{z}), \qquad R_{1,2} = D^{\mathrm{T}} W_{1,2} D, \qquad W_{1,2} \doteq \left\| W_{1,2}^{qt} \right\|_t^q, \tag{13}$$
$$W_1^{qt} \doteq -x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C (E_q G^{\mathrm{T}} C E_t + E_t G^{\mathrm{T}} C E_q) \Pi x, \qquad W_2^{qt} \doteq -x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C E_q \Pi E_t^{\mathrm{T}} C G x,$$
$$\|R_1\| \leqslant \sqrt{2}\, c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot \rho, \qquad \|R_2\| \leqslant c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \rho^2,$$
$$c_0 \doteq r(p+1)(m+r) \operatorname{Sp} C \doteq c_{00} \operatorname{Sp} C.$$

Заметим, что выражения другого типа для производной $J''_{\theta\theta}$ через множители Лагранжа были получены ранее в [12].

Лемма 3. *Матрица производных* $J''_{\theta x} \doteq \left\| \frac{\partial^2 J}{\partial \theta_i \partial x_j} \right\|_j^i$ *может быть представлена в следующем виде:*

$$J''_{\theta x} = P_0 + P_1, \qquad P_k \sim O(\rho^k), \qquad P_0 \doteq D^{\mathrm{T}} \widehat{V}^{\mathrm{T}} C G,$$
$$P_1 \doteq D^{\mathrm{T}} F_1, \qquad F_1 \doteq \|F_1^q\|^q, \qquad F_1^q \doteq x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C E_q \Pi,$$
$$\|P_0\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \operatorname{Sp} C} \cdot \|x\|, \qquad \|P_1\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \operatorname{Sp} C} \cdot \rho.$$

Следствие. $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = S^{\mathrm{T}} = -R_0^{-1} P_0 + O(\rho) = -\left(D^{\mathrm{T}} \widehat{V}^{\mathrm{T}} C \widehat{V} D\right)^{-1} D^{\mathrm{T}} \widehat{V}^{\mathrm{T}} C G + O(\rho).$

Введем обозначения $S_0^{\mathrm{T}} \doteq -R_0^{-1} P_0$, $S_1^{\mathrm{T}} \doteq S^{\mathrm{T}} - S_0^{\mathrm{T}} \sim O(\rho)$. Заметим, что из равенства $C = (GG^{\mathrm{T}})^{-1}$ следуют соотношения $P_0 P_0^{\mathrm{T}} = R_0$, $S_0^{\mathrm{T}} S_0 = R_0^{-1}$. Приращение функции $\theta(x)$ представляется в виде суммы трех слагаемых

$$\Delta\theta = S_0^{\mathrm{T}} \Delta x + S_1^{\mathrm{T}} \Delta x + \Delta_2 \theta,$$
$$S_0^{\mathrm{T}} \Delta x \sim O(\epsilon), \quad S_1^{\mathrm{T}} \Delta x \sim O(\rho\epsilon), \quad \Delta_2\theta \sim O(\epsilon^2). \tag{14}$$

Рассмотрим приращение 1-го порядка по ϵ, т. е. $S^{\mathrm{T}} \Delta x$. Для эллипсоидов в $\mathbb{R}^n$ с центрами в нуле примем обозначение

$$E_{S^{\mathrm{T}} S} \doteq \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \ y^{\mathrm{T}} \left(S^{\mathrm{T}} S\right)^{-1} y \leqslant 1 \right\} = \left\{ y = S^{\mathrm{T}} e : \ \|e\| \leqslant 1 \right\}. \tag{15}$$

Последнее равенство следует из соотношения $y^{\mathrm{T}} \left(S^{\mathrm{T}} S\right)^{-1} y = e^{\mathrm{T}} S \left(S^{\mathrm{T}} S\right)^{-1} S^{\mathrm{T}} e \leqslant e^{\mathrm{T}} e \leqslant 1$. Пусть отклонения Δx лежат в шаре $\|\Delta x\| \leqslant \epsilon$. Тогда приращения $S^{\mathrm{T}} \Delta x$ образуют эллипсоид $E_{\epsilon^2 S^{\mathrm{T}} S}$. Из установленных выше утверждений вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Эллипсоид рассеяния 1-го порядка* $\Delta_1 \theta \in E_{\epsilon^2 S^{\mathrm{T}} S}$ *определяется матрицей*

$$S^{\mathrm{T}} S = R_0^{-1} + O(\rho) = \left(D^{\mathrm{T}} \widehat{V}^{\mathrm{T}} C \widehat{V} D\right)^{-1} + O(\rho) = \left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} + O(\rho).$$

Следствие 1. *Пусть* $\lambda_{\min}(R_0)$ — *наименьшее собственное число матрицы* R_0. *Для приращения 1-го порядка верна оценка*

$$\|\Delta_1 \theta\| \leqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda_{\min}(R_0)}} + O(\epsilon\rho).$$

Оценка приращения 2-го порядка

Получим оценку для остаточного члена в утверждении следствия 1 в виде $\|S_1^{\mathrm{T}} \Delta x + \Delta_2 \theta\| \leqslant (c_{21}\rho + c_{22}\epsilon)\, \epsilon$. Будем искать константы c_{21} и c_{22}. Обозначим

$$R^* \doteq \|D\|^2 \cdot c_{00} \operatorname{Sp} C \cdot \|x\|^2, \quad b_0 \doteq \frac{2\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0)}.$$

Заметим, что произведение $\frac{1}{2\sqrt{n}\,c_{00}} b_0 R^*$ играет роль оценки сверху для числа обусловленности матрицы R_0 в том смысле, что верно неравенство

$$\frac{\lambda_{\max}(R_0)}{\lambda_{\min}(R_0)} \leqslant \frac{b_0 R^*}{2\sqrt{n}\,c_{00}}. \tag{16}$$

Также b_0 используется в качестве оценки сверху для нормы обратной матрицы вторых производных $(J''_{\theta\theta})^{-1}$ (см. далее (46) и (47)).

Лемма 4. *Обозначим* $M \doteq (R_1 + R_2)R_0^{-1}$, *и пусть* $\|M\| < 1$. *Тогда*

$$S_1^{\mathrm{T}} = -R_0^{-1}\left[P_1 + Y(P_0 + P_1)\right], \qquad Y \doteq -(R_1 + R_2)R_0^{-1}\left[I + (R_1 + R_2)R_0^{-1}\right]^{-1},$$
$$\|S_1^{\mathrm{T}}\| \leqslant \frac{21\sqrt{n}\,b_0^2 (R^*)^{3/2}}{2\|x\|}\,\rho.$$

Рассмотрим норму $\|\Delta_2\theta\|$. Производные в выражениях для компонент $\Delta_2\theta_i$ (10) берутся в разных точках $x + h_i\Delta x$, $i = \overline{1,n}$. Ввиду этого оценивать величину $\|\Delta_2\theta\|$ следует через нормы компонент $\Delta_2\theta_i = \frac{1}{2}\sum_j\sum_k \frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_j\partial x_k}\Delta x_j\Delta x_k$. Пусть $B \doteq (J''_{\theta\theta})^{-1}$, $b_i \doteq [B]^i \doteq \|B_{ij}\|_j$ — i-я строка B. Подчеркнем, что все величины (кроме Δx) в выражениях для $\Delta_2\theta_i$ берутся в точках

$$x^\Delta \doteq x^\Delta(i) \in (x, x + h_i\Delta x), \quad \theta^\Delta \doteq \theta^\Delta(i) \doteq \theta(x^\Delta).$$

С учетом (9) имеем

$$\begin{aligned}\Delta_2\theta_i = \tfrac{1}{2}\Big[B\Big]^i\Big(\sum_j\begin{pmatrix} a_{1,j} & \dots & a_{n,j}\end{pmatrix}\Delta x_j\Big)\Big(-B\Big)\Big(\sum_k J''_{\theta x_k}\Delta x_k\Big) &+ \\ + \tfrac{1}{2}\Big[B\Big]^i\Big(\sum_k J'''_{\theta\theta x_k}\Delta x_k\Big)B\Big(\sum_j J''_{\theta x_j}\Delta x_j\Big) &- \\ - \tfrac{1}{2}\Big[B\Big]^i\Big(\sum_j\sum_k J'''_{\theta x_j x_k}\Delta x_j\Delta x_k\Big) \doteq \tfrac{1}{2}\Big[B\Big]^i B_1. &\end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда следует оценка $\|\Delta_2\theta_i\| \leqslant \frac{1}{2}\|b_i\|\cdot\|B_1\| \leqslant \frac{1}{2}\|B\|\cdot\|B_1\|$. Поэтому

$$\|\Delta_2\theta\| \leqslant \sqrt{n}\,\max_i\|\Delta_2\theta_i\| \leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{n}\,\|B\|\cdot\|B_1\|. \tag{18}$$

В правой части неравенства сомножитель $\sqrt{n}$ появляется из-за покомпонентной оценки и мог бы быть опущен, если бы все точки $x + h_i\Delta x$ взятия производных были одинаковы ($h_1 = \ldots = h_n$).

Оценим норму $\|B_1\|$. Из определения (17) следует неравенство

$$\begin{aligned}\|B_1\| \leqslant \underbrace{\|\sum_j\begin{pmatrix} a_{1,j} & \dots & a_{n,j}\end{pmatrix}\Delta x_j\|}_{B_2}\cdot\|B\|\cdot\underbrace{\|\sum_k J''_{\theta x_k}\Delta x_k\|}_{B_3} &+ \\ + \underbrace{\|\sum_k J'''_{\theta\theta x_k}\Delta x_k\|}_{B_4}\cdot\|B\|\cdot\underbrace{\|\sum_j J''_{\theta x_j}\Delta x_j\|}_{B_5} + \underbrace{\|\sum_j\sum_k J'''_{\theta x_j x_k}\Delta x_j\Delta x_k\|}_{B_6}&.\end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений

$$\|B_1\| \leqslant \|B\|\cdot\|B_{3,5}\|\cdot(\|B_2\| + \|B_4\|) + \|B_6\|. \tag{19}$$

Лемма 5. *Верны следующие оценки:*

$$\|B_2\| \leqslant \sqrt{n}\ \left\{\|B\|\cdot\|D\|^2\cdot(c_{00}\,\mathrm{Sp}\,C)\left(6\,\|x\|^2+16\,\|x\|\,\rho+6\rho^2\right)+4\right\}\times \\ \times\|D\|^2\cdot c_{00}\,\mathrm{Sp}\,C\cdot(\|x\|+\rho)\cdot\epsilon,$$

$$\|B_{3,5}\| \leqslant \|D\|\cdot\sqrt{c_{00}\,\mathrm{Sp}\,C}\cdot(\|x\|+\rho)\cdot\epsilon,$$

$$\|B_4\| \leqslant 4\,\|D\|^2\cdot c_{00}\,\mathrm{Sp}\,C\ (\|x\|+\rho)\cdot\epsilon, \quad \|B_6\| \leqslant 2\,\|D\|\cdot\sqrt{c_{00}\,\mathrm{Sp}\,C}\cdot\epsilon^2,$$

где ϵ *является константой, а величины* B_i, $\mathrm{Sp}\,C$, $\|x\|$, ρ *вычисляются в точках* x^Δ, θ^Δ.

Получим оценку сверху для нормы обратной матрицы $\|B\| \doteq \|\,(J''_{\theta\theta})^{-1}\,\|$.

Лемма 6. *Пусть* $\|.\|_2$ *— спектральная норма,* $\|A\|_2 \doteq \max\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$. *Верно неравенство*

$$\|B\| \doteq \|\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}\| \leqslant \sqrt{n}\,\|\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0)-c_0\cdot\|D\|^2\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\|x\|+\rho\right)\rho}.$$

В этой лемме, как и ранее, величины B, $\|x\|$ и ρ вычисляются в точках x^Δ, θ^Δ.

Наконец, нужно оценить значения величин $\mathrm{Sp}\,C$, $\|x\|$, ρ, взятые в точках x^Δ, θ^Δ, через значения в точках x, θ. Для этого используются следующие утверждения. Обозначим $\rho^\Delta \doteq \rho(\theta^\Delta, x^\Delta)$. По определению $\rho = \|x-\hat{x}\|$, тогда

$$\rho^\Delta = \|x^\Delta-\hat{x}^\Delta\| \leqslant \|x^\Delta-\hat{x}\| = \|x+\Delta x-\hat{x}\| \leqslant \rho+\epsilon. \tag{20}$$

Лемма 7. *Пусть* $\|\Delta\theta\| \leqslant \frac{\left(\sqrt{6}-2\right)}{(N-p)\left[(N-p)^{3/2}+1\right]\cdot\|C\|\cdot\|D\|\cdot\|\gamma\|}$. *Тогда* $0<\mathrm{Sp}(C+\Delta C) \leqslant 2\,\mathrm{Sp}\,C$.

Сформулируем главный результат, который следует из полученных выше неравенств. Утверждения здесь даются с использованием величин в точках x, θ.

Теорема 2. *Пусть* $c_{22} \doteq \frac{\sqrt{2n}\,b_0\sqrt{R^*}}{\|x\|}\left\{36\,b_0R^*\left(\sqrt{n}\ [31\,b_0R^*+1]+1\right)+1\right\}$ *и выполнены неравенства*

$$\rho+\epsilon \leqslant \frac{\|x\|}{12\,b_0R^*}, \tag{21}$$

$$\left(\sqrt{\frac{b_0}{2\sqrt{n}}}+\frac{21\sqrt{n}\,b_0\sqrt{R^*}}{24}\right)\epsilon+c_{22}\,\epsilon^2 \leqslant \frac{\left(\sqrt{6}-2\right)}{(N-p)\left[(N-p)^{3/2}+1\right]\cdot\mathrm{Sp}\,C\cdot\|D\|\cdot\|\gamma\|}, \tag{22}$$

которые рассматриваются как условия на ρ *и* ϵ. *Тогда*

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \sqrt{\frac{b_0}{2\sqrt{n}}}\,\epsilon+\frac{21\sqrt{n}\,b_0^2\,(R^*)^{3/2}}{2\|x\|}\,\rho\epsilon+c_{22}\,\epsilon^2.$$

Обратим внимание на условие (21). Оно описывает область, для которой заведомо верны проведенные рассуждения. Учитывая определение b_0, запишем это условие в виде $\frac{\rho+\epsilon}{\|x\|} \leqslant \frac{\lambda_{\min}(R_0)}{24\sqrt{n}\,R^*}$. Если ошибка аппроксимации ρ велика, для выполнения неравенства нужно или добиваться уменьшения случайных возмущений в измерениях, или, если возмущения нельзя считать случайными, усложнять уравнение (1), расширяя многообразие $\mathcal{M} \doteq \bigcup\limits_{\theta\in\Theta}\mathrm{nul}\,G_\theta$.

В условии (22) правая часть определяется вектором γ. Если строки многочленной матрицы $\gamma_\theta(s)$ близки к линейной зависимости, то след $\mathrm{Sp}\,C$ велик, что уменьшает амплитуду допустимых возмущений ϵ.

Следствие. *Пусть* $\rho = 0$ *и выполнены неравенства* $\epsilon \leqslant \frac{\|x\|}{12\, b_0 R^*}$,

$$\sqrt{\frac{b_0}{2\sqrt{n}}}\,\epsilon + c_{22}\epsilon^2 \leqslant \frac{(\sqrt{6}-2)}{(N-p)\big[(N-p)^{3/2}+1\big]\cdot \operatorname{Sp} C\cdot\|D\|\cdot\|\gamma\|}.$$

Тогда

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \sqrt{\frac{b_0}{2\sqrt{n}}}\,\epsilon + c_{22}\,\epsilon^2.$$

Утверждение следствия дает оценку чувствительности в обратной задаче восстановления коэффициентов уравнения (1) по наблюдению $x = z + \epsilon$ решения z. Существенной здесь является зависимость величин $\lambda_{\min}(R_0)$ и b_0 от z. На этом основании можно предложить количественные критерии идентифицируемости параметров уравнения (1) [6].

Приложение

Приведем доказательства утверждений.

Пусть A — вещественная симметричная неотрицательная матрица. Обозначим $\|\,.\,\|_2$ спектральную норму $\|A\|_2 \doteq \max_{\|x\|=1}\|Ax\| = \lambda_{\max}(A)$. Верны следующие утверждения (см. П.6.3 и теорему 7.1.1 в работе [24]).

Предложение 1. 1) $\|A\|_2 = \lambda_{\max}(A) \leqslant \|A\|$. 2) $\|A\| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|_2$. 3) $\|A\| \leqslant \operatorname{Sp} A$.

Предложение 2. *Если* $\|\;\|_*$ *обозначает любую матричную норму, для которой* $\|I\|_* = 1$, *и если* $\nu_* \doteq \|M\|_* < 1$, *то* $(I+M)^{-1}$ *существует, и* $\|\,(I+M)^{-1}\,\|_* \leqslant \frac{1}{1-\nu_*}$.

Следствие 2. *Если* $\nu = \|M\| < 1$, *то* $(I+M)^{-1} = I + Y$, $Y = -M\,(I+M)^{-1}$, $\|Y\| \leqslant \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{n}$.

Предложение 3. 1) $\|x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C\|^2 \leqslant \rho^2 \operatorname{Sp} C$, 2) $\|G^{\mathrm T} C\|^2 = \operatorname{Sp} C$, 3) $\|C\| \leqslant \operatorname{Sp} C$. 4) *Пусть матрица* E_q *определена в* (12), *и* X, Y — *матрицы, для которых имеют смысл произведения* XE_q, E_qY, ΠY. *Тогда* $\|XE_q\| \leqslant \|X\|$, $\|E_qY\| \leqslant \|Y\|$, $\|\Pi Y\| \leqslant \|Y\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\|x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C\|^2 \leqslant \|x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C^{1/2}\|^2 \cdot \|C^{1/2}\|^2 = x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C G x \cdot \|C^{1/2}\|^2 = \rho^2 \operatorname{Sp} C$. 2) $\|G^{\mathrm T} C\|^2 = \operatorname{Sp} CGG^{\mathrm T} C = \operatorname{Sp} C$. 3) См. предложение 1. 4) Неравенство $\|XE_q\| \leqslant \|X\|$ и ему подобное для матрицы Y следует из определения матрицы E_q — она состоит из нулей и единиц и имеет не более одной единицы в каждой строке и каждом столбце. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (лемма 1). Необходимо проделать стандартные выкладки. Случай $\theta \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^2$ разобран в монографии [23. Т. 1, гл. 3, п. 8]. В выражении (8) используются частные производные, взятые в точке $\theta(x)$. При вычислении производной 2-го порядка берется полная производная вдоль кривой $\theta(x)$. Ставим целью получить форму записи с обратной матрицей $(J''_{\theta\theta})^{-1}$ в качестве сомножителя, поскольку этот сомножитель является ключевым в последующих оценках.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x_j}\right] \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Вычислим правую часть этого выражения.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J''_{\theta x_j}\right]=\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J''_{\theta x_j}\right]}_{(1)}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}\right]}_{(2)}\cdot J''_{\theta x_j}+\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J'''_{\theta x_j x_k}.$$

Рассмотрим выделенные сомножители.

(1): $\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(-J''_{\theta\theta})^{-1}J''_{\theta x_j}\right]\doteq(J''_{\theta\theta})^{-1}\begin{pmatrix}a_{1,j} & \dots & a_{n,j}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$,

$$a_{s,j}=J'''_{\theta\theta\theta_s}\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J''_{\theta x_j}-J'''_{\theta x_j\theta_s}\in\mathbb{R}^{n\times 1},\qquad s\in\overline{1,n}.$$

(2): $\frac{\partial}{\partial x_k}\left[(-J''_{\theta\theta})^{-1}\right]=(J''_{\theta\theta})^{-1}J'''_{\theta\theta x_k}(J''_{\theta\theta})^{-1}$.

Из полученных равенств следует

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\partial x_k}=\underbrace{(J''_{\theta\theta})^{-1}\begin{pmatrix}a_{1,j} & \dots & a_{n,j}\end{pmatrix}}_{(1)}\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J''_{\theta x_k}+$$
$$+\underbrace{\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J'''_{\theta\theta x_k}\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}}_{(2)}J''_{\theta x_j}+\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J'''_{\theta x_j x_k}.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (лемма 2). Незначительно модифицируем доказательство, опубликованное в [5. Разд. 8.10.2]. Первая производная:

$$J'_q\doteq\partial J/\partial\gamma^q=\tfrac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(-\partial\Pi/\partial\gamma^q)x,$$
$$-\partial\Pi/\partial\gamma^q=E_q^{\mathrm{T}}CG-G^{\mathrm{T}}C(E_qG^{\mathrm{T}}+GE_q^{\mathrm{T}})CG+G^{\mathrm{T}}CE_q=$$
$$=(E_q^{\mathrm{T}}-G^{\mathrm{T}}CGE_q^{\mathrm{T}})CG+G^{\mathrm{T}}C(E_q-E_qG^{\mathrm{T}}CG)=\Pi E_q^{\mathrm{T}}CG+G^{\mathrm{T}}CE_q\Pi.\quad(23)$$

Отсюда следует

$$J'_q=x^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}CE_q\Pi x.\quad(24)$$

Учитывая, что $E_q\Pi x=\widehat{V}_q$ есть q-й столбец матрицы $\widehat{V}=V(\hat{z})$ и $x^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}=\gamma^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}$, получаем

$$J'_q=\gamma^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}C\widehat{V}_q,\quad J'_\gamma=\gamma^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}C\widehat{V}.$$

Для второй производной из (24) следует выражение

$$J''_{qt}\doteq\partial^2J/\partial\gamma^q\partial\gamma^t=x^{\mathrm{T}}(\partial G^{\mathrm{T}}CE_q\Pi/\partial\gamma^t)x,$$
$$\partial G^{\mathrm{T}}CE_q\Pi/\partial\gamma^t=E_t^{\mathrm{T}}CE_q\Pi-G^{\mathrm{T}}C(E_tG^{\mathrm{T}}+GE_t^{\mathrm{T}})CE_q\Pi-$$
$$-G^{\mathrm{T}}CE_q(\Pi E_t^{\mathrm{T}}CG+G^{\mathrm{T}}CE_t\Pi).$$

Два последних слагаемых здесь получены с применением формулы (23). После раскрытия скобок сложим 1-е и 3-е слагаемые: $E_t^{\mathrm{T}}CE_q\Pi-G^{\mathrm{T}}CGE_t^{\mathrm{T}}CE_q\Pi=\Pi E_t^{\mathrm{T}}CE_q\Pi$. Объединив 2-е и 5-е слагаемые, получим

$$\partial G^{\mathrm{T}}CE_q\Pi/\partial\gamma^t=\Pi E_t^{\mathrm{T}}CE_q\Pi-G^{\mathrm{T}}C(E_tG^{\mathrm{T}}CE_q+E_qG^{\mathrm{T}}CE_t)\Pi-G^{\mathrm{T}}CE_q\Pi E_t^{\mathrm{T}}CG.$$

Следовательно,

$$J''_{qt}=\widehat{V}_t^{\mathrm{T}}C\widehat{V}_q-x^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}C(E_qG^{\mathrm{T}}CE_t+E_tG^{\mathrm{T}}CE_q)\Pi x-x^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}CE_q\Pi E_t^{\mathrm{T}}CGx.$$

Тогда
$$J''_{\theta\theta} = D^{\mathrm T} \left\| J''_{qt} \right\|_t^q D = D^{\mathrm T}(\widehat{V}^{\mathrm T} C \widehat{V} + W_1 + W_2) D = R_0 + R_1 + R_2.$$

Оценим сверху нормы R_1 и R_2. Согласно определениям
$$W_1^{qt} = x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C (E_q G^{\mathrm T} C E_t + E_t G^{\mathrm T} C E_q) \Pi x, \quad W_2^{qt} = x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C E_q \Pi E_t^{\mathrm T} C G x.$$
Тогда
$$\begin{aligned}\|W_1\|^2 = \sum_q \sum_t \|W_1^{qt}\|^2 \leqslant 2 \sum_q \sum_t \|x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C E_q G^{\mathrm T} C E_t \Pi x\|^2 \leqslant \\ \leqslant 2 \sum_q \sum_t \|x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C\|^2 \cdot \|E_q G^{\mathrm T} C\|^2 \cdot \|E_t \Pi x\|^2 \leqslant \\ \leqslant 2 \left[r(r+m)(p+1) \right]^2 \cdot \|x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C\|^2 \cdot \|G^{\mathrm T} C\|^2 \cdot \|x\|^2 \leqslant \\ \leqslant 2 \left[r(r+m)(p+1) \right]^2 \cdot \rho^2 \cdot (\operatorname{Sp} C)^2 \cdot \|x\|^2.\end{aligned}$$

Последние два неравенства получены с учетом предложения 3 и диапазона индексов $q, t = \overline{1, r(r+m)(p+1)}$. Следовательно, $\|W_1\| \leqslant \sqrt{2}\, c_0 \cdot \|x\| \cdot \rho$ и тогда $\|R_1\| \leqslant \sqrt{2} c_0 \cdot \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot \rho$.

Аналогично оцениваются нормы W_2, R_2:
$$\begin{aligned}\|W_2\|^2 = \sum_q \sum_t \|W_2^{qt}\|^2 = \sum_q \sum_t \|x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C E_q \Pi E_t^{\mathrm T} C G x\|^2 \leqslant \\ \leqslant \sum_q \sum_t \|CGx\|^4 \leqslant \left[r(r+m)(p+1) \right]^2 \cdot (\operatorname{Sp} C)^2 \cdot \rho^4.\end{aligned}$$

Следовательно, $\|W_2\| \leqslant c_0 \cdot \rho^2$ и $\|R_2\| \leqslant c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \rho^2$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (лемма 3). Из соотношений (23) имеем
$$\begin{aligned} J''_{qx} = \partial J'_q / \partial x = \partial \left[\tfrac{1}{2} x^{\mathrm T} \left(\Pi E_q^{\mathrm T} C G + G^{\mathrm T} C E_q \Pi \right) x \right] / \partial x = \\ = \left[\tfrac{1}{2} \partial x^{\mathrm T} \left(\Pi E_q^{\mathrm T} C G + G^{\mathrm T} C E_q \Pi \right) x + \tfrac{1}{2} x^{\mathrm T} \left(\Pi E_q^{\mathrm T} C G + G^{\mathrm T} C E_q \Pi \right) \partial x \right] / \partial x = \\ = \left[x^{\mathrm T} \left(\Pi E_q^{\mathrm T} C G + G^{\mathrm T} C E_q \Pi \right) \partial x \right] / \partial x = x^{\mathrm T} \left(\Pi E_q^{\mathrm T} C G + G^{\mathrm T} C E_q \Pi \right). \end{aligned} \tag{25}$$

Перейдем к матричной записи, используя равенство $x^{\mathrm T} \Pi E_q^{\mathrm T} = \widehat{V}_q^{\mathrm T}$:
$$J''_{\gamma x} = \left\| J''_{qx} \right\|^q = \widehat{V}^{\mathrm T} C G + F_1, \quad F_1 \doteq \|F_1^q\|^q, \quad F_1^q \doteq x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C E_q \Pi.$$

Учитывая соотношения $J''_{\theta x} = D^{\mathrm T} J''_{\gamma x}$ и $Gx = G(x - \hat{z})$, получаем
$$J''_{\theta x} = D^{\mathrm T} \widehat{V}^{\mathrm T} C G + D^{\mathrm T} F_1 = P_0 + P_1.$$

С учетом предложения 3 верны цепочки неравенств:
$$\begin{aligned} \|P_0\| = \|D^{\mathrm T} \widehat{V}^{\mathrm T} C G\| \leqslant \sqrt{r(r+m)(p+1)} \cdot \|D\| \cdot \|x^{\mathrm T} \Pi E_q^{\mathrm T} C G\| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{r(r+m)(p+1)} \cdot \|D\| \cdot \|x^{\mathrm T}\| \cdot \|CG\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \operatorname{Sp} C} \cdot \|x\|. \\ \|P_1\| = \|D^{\mathrm T} F_1\| \leqslant \|D\| \cdot \|F_1\| \leqslant \sqrt{r(r+m)(p+1)} \cdot \|D\| \cdot \|x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C E_q^{\mathrm T} \Pi\| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{r(r+m)(p+1)} \cdot \|D\| \cdot \|x^{\mathrm T} G^{\mathrm T} C\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \operatorname{Sp} C} \cdot \rho. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (следствие 1). Обозначим $R \doteq (S^{\mathrm{T}}S)^{-1}$. Ввиду (15) верно неравенство $y^{\mathrm{T}}Ry \leqslant 1$. С другой стороны, $\lambda_{\min}(R)\, y^{\mathrm{T}}y \leqslant y^{\mathrm{T}}Ry$, откуда для точек эллипсоида $y \in E_{S^{\mathrm{T}}S}$ следует соотношение $y^{\mathrm{T}}y = \|y\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(R)}$. Согласно теореме 1 $R^{-1} = R_0^{-1} + O(\rho)$. Нужно установить связь между $\lambda_{\min}(R)$ и $\lambda_{\min}(R_0)$. Воспользуемся известным результатом Л. Мирского [25], который сформулируем в виде леммы. Напомним, матричная норма $|||\cdot|||$ называется унитарно инвариантной, если $|||Ux||| = |||x|||$, где U — унитарная матрица.

Лемма 8. *Пусть A и $\tilde{A}$ — две эрмитовы матрицы размерности $n \times n$, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n$ — собственные числа этих матриц, упорядоченные по возрастанию. Тогда $|||\operatorname{diag}(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1, \ldots, \lambda_n - \tilde{\lambda}_n)||| < |||A - \tilde{A}|||$, где $|||\cdot|||$ обозначает произвольную унитарно инвариантную норму.*

Из леммы следуют оценки

$$|\lambda_{\max}(R^{-1}) - \lambda_{\max}(R_0^{-1})| \leqslant \|R^{-1} - R_0^{-1}\| = O(\rho), \quad |\lambda_{\min}(R) - \lambda_{\min}(R_0)| \leqslant O(\rho),$$

и для $y \in E_{S^{\mathrm{T}}S}$ имеем неравенство $\|y\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(R_0)} + O(\rho)$. Ввиду этого для точек эллипсоида $\Delta_1\theta \in E_{\epsilon^2 S^{\mathrm{T}}S}$ выполнено неравенство $\|\Delta_1\theta\|^2 \leqslant \frac{\epsilon^2}{\lambda_{\min}(R_0)} + O(\epsilon^2\rho)$, из которого следует доказываемое утверждение $\|\Delta_1\theta\| \leqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda_{\min}(R_0)}} + O(\epsilon\rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (лемма 4). Из лемм 1, 2, 3 следует

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{T}} &= -\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x} = -\left(R_0 + R_1 + R_2\right)^{-1}\left(P_0 + P_1\right) = \\ &= -R_0^{-1}\left[I + (R_1 + R_2)R_0^{-1}\right]^{-1}\left(P_0 + P_1\right) \doteq -R_0^{-1}\left[I + M\right]^{-1}\left(P_0 + P_1\right). \end{aligned}$$

Применяя следствие 2, приходим к равенству

$$S^{\mathrm{T}} = -R_0^{-1}(I + Y)(P_0 + P_1) = -R_0^{-1}P_0 - R_0^{-1}\left[P_1 + Y(P_0 + P_1)\right].$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} &S_1^{\mathrm{T}} \doteq -R_0^{-1}\left[P_1 + Y(P_0 + P_1)\right], \\ &Y \doteq -M\left[I + M\right]^{-1} \doteq -(R_1 + R_2)R_0^{-1}\left[I + (R_1 + R_2)R_0^{-1}\right]^{-1}. \end{aligned}$$

Первое утверждение доказано. Оценим норму $\|S_1^{\mathrm{T}}\|$. Ведем обозначения $\|R_0^{-1}\| \doteq \nu_0$, $\|R_{1,2}\| \doteq \nu_{1,2}$, $\|P_{0,1}\| \doteq \mu_{0,1}$. При условии выполнения неравенства

$$\|M\| = \|(R_1 + R_2)R_0^{-1}\| \doteq \nu \leqslant \nu_0(\nu_1 + \nu_2) < 1 \tag{26}$$

будет верна оценка $\|Y\| \leqslant \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{n}$ (см. следствие 2). Следующие оценки получены в леммах 2 и 3:

$$\nu_1 \leqslant 2\, c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot \rho, \quad \nu_2 \leqslant c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \rho^2, \tag{27}$$

$$\mu_0 \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_0} \cdot \|x\|, \qquad \mu_1 \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_0} \cdot \rho. \tag{28}$$

Примем следующую оценку для ν_0:

$$\nu_0 \doteq \|R_0^{-1}\| \leqslant \sqrt{n}\,\|R_0^{-1}\|_2 = \sqrt{n}\,\lambda_{\max}(R_0^{-1}) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0)} = \tfrac{1}{2}b_0. \tag{29}$$

Имеем

$$\|S_1^{\mathrm{T}}\| = \|R_0^{-1}\left(P_1 + Y(P_0+P_1)\right)\| \leqslant \nu_0\left(\mu_1 + \|Y\|\cdot(\mu_0+\mu_1)\right),$$
$$\|Y\| \leqslant \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{n} \leqslant \frac{\nu_0(\nu_1+\nu_2)}{1-\nu_0(\nu_1+\nu_2)}\sqrt{n},$$

и с учетом неравенств (27), (29)

$$\nu_0(\nu_1+\nu_2) \leqslant \tfrac{1}{2}b_0c_0\cdot\|D\|^2\cdot(2\cdot\|x\|+\rho)\,\rho \leqslant \tfrac{1}{2}b_0c_0\cdot\|D\|^2\cdot 3\cdot\|x\|\cdot\rho \doteq \varphi.$$

Имея в виду (26), наложим условие $\varphi < 1$, которое будет играть роль порога обусловленности оценок. Запишем его в виде

$$\rho < \frac{2}{3\,b_0c_0\cdot\|D\|^2\cdot\|x\|}. \tag{30}$$

Заменим последнее неравенство более сильным условием (21), из которого следует

$$\rho \leqslant \frac{1}{10\,b_0c_0\cdot\|D\|^2\cdot\|x\|},$$

тогда

$$\varphi \doteq \tfrac{1}{2}b_0c_0\cdot\|D\|^2\cdot 3\cdot\|x\|\cdot\rho \leqslant 5\,b_0c_0\cdot\|D\|^2\cdot\|x\|\cdot\rho \doteq \omega_0\rho \leqslant \tfrac{1}{2} < 1.$$

Поскольку $\nu_0(\nu_1+\nu_2) \leqslant \varphi \leqslant \omega_0\rho \leqslant \frac{1}{2} < 1$, имеем оценку

$$\|Y\| \leqslant \frac{\nu_0(\nu_1+\nu_2)}{1-\nu_0(\nu_1+\nu_2)}\sqrt{n} \leqslant \frac{\omega_0\rho}{1-\omega_0\rho}\sqrt{n} \leqslant \frac{\omega_0\rho}{1-\frac{1}{2}}\sqrt{n} = 2\omega_0\rho\sqrt{n}. \tag{31}$$

Используя (27), (28), (29) и (31), получаем неравенства

$$\|S_1^{\mathrm{T}}\| \leqslant \nu_0\left(\mu_1 + \|Y\|\cdot(\mu_0+\mu_1)\right) \leqslant \tfrac{1}{2}b_0\sqrt{c_0}\cdot\|D\|\cdot\left(1+2\omega_0\sqrt{n}\,(\|x\|+\rho)\right)\rho \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}b_0\sqrt{c_0}\cdot\|D\|\cdot\left(1+4\omega_0\sqrt{n}\,\|x\|\right)\rho = \tfrac{b_0\sqrt{R^*}}{2\|x\|}\left(20\sqrt{n}\,b_0R^*+1\right)\rho.$$

Из неравенства (16) $1 \leqslant \frac{\lambda_{\max}(R_0)}{\lambda_{\min}(R_0)} \leqslant \frac{b_0R^*}{2\sqrt{n}\,c_{00}}$ следует $b_0R^* \geqslant 2\sqrt{n}\,c_{00} > 1$, откуда

$$20\sqrt{n}\,b_0R^*+1 < 21\sqrt{n}\,b_0R^* \quad \text{и} \quad \|S_1^{\mathrm{T}}\| \leqslant \tfrac{21\sqrt{n}\,b_0^2(R^*)^{3/2}}{2\|x\|}\,\rho.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (лемма 5). 1) Ввиду леммы 3 и предложения 3

$$\|J''_{\theta x}\| \leqslant \|D\|\cdot\|J''_{\gamma x}\| \leqslant \|D\|\cdot\sqrt{r(r+m)(p+1)}\cdot\|x^{\mathrm{T}}\left(\Pi E_q^{\mathrm{T}}CG + G^{\mathrm{T}}CE_q\Pi\right)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|D\|\cdot\sqrt{r(r+m)(p+1)}\cdot\left(\|x\|\cdot\|CG\| + \|x^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}C\|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \|D\|\cdot\sqrt{r(r+m)(p+1)}\cdot\left(\|x\|\cdot\sqrt{\operatorname{Sp}C} + \rho\cdot\sqrt{\operatorname{Sp}C}\right).$$

Следовательно,

$$\|J''_{\theta x}\| \leqslant \|D\|\cdot\sqrt{c_{00}\operatorname{Sp}C}\cdot(\|x\|+\rho), \quad \|B_{3,5}\| \leqslant \|D\|\cdot\sqrt{c_{00}\operatorname{Sp}C}\cdot(\|x\|+\rho)\cdot\epsilon. \tag{32}$$

2) Оценим $\|J'''_{\theta x\theta_s}\|$. Пусть, как и ранее, $[A]^i$ обозначает i-ю строку матрицы A. Согласно лемме 3 $\left[J''_{\gamma x}\right]^q = x^{\mathrm{T}}\left(\Pi E_q^{\mathrm{T}}CG + G^{\mathrm{T}}CE_q\Pi\right)$. Тогда, применяя соотношения $\partial\Pi/\partial\gamma^t = -\Pi E_t^{\mathrm{T}}CG - G^{\mathrm{T}}CE_t\Pi$ (см. (23)) и $\partial C/\partial\gamma^t = -C\left(E_tG^{\mathrm{T}} + GE_t^{\mathrm{T}}\right)C$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\gamma_t}\left[J''_{\gamma x}\right]^q = x^{\mathrm{T}}\Big(-\big[\Pi E_t^{\mathrm{T}} CG + G^{\mathrm{T}} CE_t\Pi\big]E_q^{\mathrm{T}} CG +$$

$$+\underbrace{\Pi E_q^{\mathrm{T}}}_{\mathrm{a}_1}\{-C\,(E_tG^{\mathrm{T}} + GE_t^{\mathrm{T}})\,C\}\,G + \underbrace{\Pi E_q^{\mathrm{T}} CE_t}_{\mathrm{a}_2} + \underbrace{E_t^{\mathrm{T}} CE_q\Pi}_{\mathrm{b}_1} +$$

$$+\,G^{\mathrm{T}}\{-C\,(E_tG^{\mathrm{T}} + GE_t^{\mathrm{T}})\,C\}\,\underbrace{E_q\Pi}_{\mathrm{b}_2} - G^{\mathrm{T}} CE_q\big[\Pi E_t^{\mathrm{T}} CG + G^{\mathrm{T}} CE_t\Pi\big]\Big) =$$

(объединяя слагаемые a_1, a_2 и b_1, b_2 вместе с сомножителями)

$$= x^{\mathrm{T}}\Big(-\big[\Pi E_t^{\mathrm{T}} CG + G^{\mathrm{T}} CE_t\Pi\big]E_q^{\mathrm{T}} CG + \underbrace{\Pi E_q^{\mathrm{T}} CE_t\Pi}_{\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2} - \Pi E_q^{\mathrm{T}} CGE_t^{\mathrm{T}} CG +$$

$$+\underbrace{\Pi E_t^{\mathrm{T}} CE_q\Pi}_{\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2} - G^{\mathrm{T}} CE_tG^{\mathrm{T}} CE_q\Pi - G^{\mathrm{T}} CE_q\big[\Pi E_t^{\mathrm{T}} CG + G^{\mathrm{T}} CE_t\Pi\big]\Big).$$

Перейдем к оценке нормы, применяя предложение 3:

$$\|J'''_{\gamma x\gamma}\| \leqslant c_{00}\cdot\|\tfrac{\partial}{\partial\gamma_t}\left[J''_{\gamma x}\right]^q\| \leqslant c_{00}\Big(\|x\|\cdot\|CG\|^2 + \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C\|\cdot\|CG\| +$$

$$+\|x\|\cdot\|C\| + \|x\|\cdot\|CG\|^2 + \|x\|\cdot\|C\| + \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C\|\cdot\|G^{\mathrm{T}} C\| +$$

$$+\|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C\|\cdot 2\|CG\|\Big) \leqslant 4\cdot c_{00}\,\mathrm{Sp}\,C\cdot(\|x\| + \rho)\,.$$

В результате

$$\|J'''_{\theta x\theta_s}\| \leqslant \|D\|^2\cdot\|J'''_{\gamma x\gamma}\| \leqslant 4\,\|D\|^2\cdot c_{00}\,\mathrm{Sp}\,C\cdot(\|x\| + \rho). \tag{33}$$

3) Оценим норму $\|J'''_{\theta\theta\theta_s}\|$. Перейдем к производным по γ:

$$\|J'''_{\theta\theta\theta_s}\| \leqslant \|D\|^2\cdot\|D_s\|\cdot\|J'''_{\gamma\gamma\gamma}\| \leqslant \|D\|^3\cdot\|J'''_{\gamma\gamma\gamma}\|.$$

Обозначим производные по элементам γ_q с помощью индексов: $\frac{\partial}{\partial\gamma_q}(..) \doteq (..)_q$. Тогда $E_q \doteq G_q$, $E_t \doteq G_t$. Из леммы 2 имеем

$$J''_{qt} = \widehat{V}_q^{\mathrm{T}} C\widehat{V}_t - W_1^{qt} - W_2^{qt} =$$

$$= x^{\mathrm{T}}\Big(\Pi G_t^{\mathrm{T}} CG_q\Pi - G^{\mathrm{T}} C\,\underbrace{(G_tG^{\mathrm{T}} CG_q + G_qG^{\mathrm{T}} CG_t)}_{A}\,\Pi - G^{\mathrm{T}} CG_q\Pi G_t^{\mathrm{T}} CG\Big)x. \tag{34}$$

Вычислим 3-ю производную:

$$J'''_{qts} = x^{\mathrm{T}}\Big(\underbrace{\Pi_s G_t^{\mathrm{T}} CG_q\Pi}_{A_1} + \underbrace{\Pi G_t^{\mathrm{T}} C_sG_q\Pi}_{A_2} + \underbrace{\Pi G_t^{\mathrm{T}} CG_q\Pi_s}_{A_3} - \underbrace{G_s^{\mathrm{T}} CA\Pi}_{A_4} - \underbrace{G^{\mathrm{T}} C_sA\Pi}_{A_5} -$$

$$-\underbrace{G^{\mathrm{T}} CA_s\Pi}_{A_6} - \underbrace{G^{\mathrm{T}} CA\Pi_s}_{A_7} - \underbrace{G_s^{\mathrm{T}} CG_q\Pi G_t^{\mathrm{T}} CG - G^{\mathrm{T}} C_sG_q\Pi G_t^{\mathrm{T}} CG}_{A_8} -$$

$$-\underbrace{G^{\mathrm{T}} CG_q\Pi_s G_t^{\mathrm{T}} CG}_{A_9} - \underbrace{G^{\mathrm{T}} CG_q\Pi G_t^{\mathrm{T}} C_sG - G^{\mathrm{T}} CG_q\Pi G_t^{\mathrm{T}} CG_s}_{A_{10}}\Big)x.$$

Понадобятся соотношения:

$$\Pi_s = -\Pi G_s^{\mathrm{T}} CG - G^{\mathrm{T}} CG_s\Pi, \quad C_s = -C\,(G_sG^{\mathrm{T}} + GG_s^{\mathrm{T}})\,C.$$

Рассмотрим отдельные слагаемые.

$$x^{\mathrm{T}} A_{10} x = x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C G_q \Pi G_t^{\mathrm{T}} \left(C_s G + C G_s \right) x.$$

Обратим внимание на сумму в скобках:

$$\begin{aligned} C_s G + C G_s = -C \left(G_s G^{\mathrm{T}} + G G_s^{\mathrm{T}} \right) C G + C G_s = \\ = C G_s \left(I - G^{\mathrm{T}} C G \right) - C G G_s^{\mathrm{T}} C G = C G_s \Pi - C G G_s^{\mathrm{T}} C G. \end{aligned}$$

С учетом последнего равенства

$$x^{\mathrm{T}} A_{10} x = x^T G^{\mathrm{T}} C G_q \Pi G_t^{\mathrm{T}} \left(C G_s \Pi - C G G_s^{\mathrm{T}} C G \right) x.$$

Применяя предложение 3, получаем оценку

$$\|x^{\mathrm{T}} A_{10} x\| \leqslant \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C\| \cdot \left(\|C\| \cdot \|x\| + \|CG\| \cdot \|CGx\| \right) \leqslant \left(\operatorname{Sp} C \right)^{3/2} \rho \left(\|x\| + \rho \right).$$

Ввиду симметрии между слагаемыми A_8 и A_{10} без вычислений получаем

$$\|x^{\mathrm{T}} A_8 x\| \leqslant \left(\operatorname{Sp} C \right)^{3/2} \rho \left(\|x\| + \rho \right).$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\|\Pi_s\| = \|\Pi G_s^{\mathrm{T}} C G + G^{\mathrm{T}} C G_s \Pi\| \leqslant 2 \cdot \|CG\| \leqslant 2 \sqrt{\operatorname{Sp} C}. \\ &\|x^{\mathrm{T}} A_9 x\| = \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C G_q \Pi_s G_t^{\mathrm{T}} C G x\| \leqslant \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C\|^2 \cdot \|\Pi_s\| \leqslant 2\rho^2 \left(\operatorname{Sp} C \right)^{3/2}. \\ &\|x^{\mathrm{T}} \Pi_s\| = \|x^{\mathrm{T}} \Pi G_s^{\mathrm{T}} C G + x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C G_s \Pi\| \leqslant \|x\| \cdot \|CG\| + \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C\| \leqslant \sqrt{\operatorname{Sp} C} \, \left(\|x\| + \rho \right). \\ &\|x^{\mathrm{T}} A_1 x\| = \|x^{\mathrm{T}} \Pi_s G_t^{\mathrm{T}} C G_q \Pi x\| \leqslant \|x^{\mathrm{T}} \Pi_s\| \cdot \|C\| \cdot \|x\| \leqslant \left(\operatorname{Sp} C \right)^{3/2} \left(\|x\| + \rho \right) \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Ввиду симметрии между A_1 и A_3 без вычислений получаем

$$\|x^{\mathrm{T}} A_3 x\| \leqslant \left(\operatorname{Sp} C \right)^{3/2} \left(\|x\| + \rho \right) \cdot \|x\|.$$

Затем,

$$\begin{aligned} &\|C_s\| = \|C \left(G_s G^{\mathrm{T}} + G G_s^{\mathrm{T}} \right) C\| \leqslant 2 \cdot \|C\| \cdot \|CG\| \leqslant 2 \, \left(\operatorname{Sp} C \right)^{3/2}. \\ &\|x^{\mathrm{T}} A_2 x\| = \|x^{\mathrm{T}} \Pi G_t^{\mathrm{T}} C_s G_q \Pi x\| \leqslant \|C_s\| \cdot \|x\|^2 \leqslant 2 \, \left(\operatorname{Sp} C \right)^{3/2} \cdot \|x\|^2. \\ &\|A\| = \|G_t G^{\mathrm{T}} C G_q + G_q G^{\mathrm{T}} C G_t\| \leqslant 2 \, \|G^{\mathrm{T}} C\| \leqslant 2 \sqrt{\operatorname{Sp} C}. \\ &\|x^{\mathrm{T}} A_4 x\| = \|x^{\mathrm{T}} G_s^{\mathrm{T}} C A \Pi x\| \leqslant \|C\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|^2 \leqslant 2 \, \left(\operatorname{Sp} C \right)^{3/2} \cdot \|x\|^2. \\ &\|G^{\mathrm{T}} C_s\| = \|G^{\mathrm{T}} C \left(G_s G^{\mathrm{T}} + G G_s^{\mathrm{T}} \right) C\| \leqslant 2 \cdot \|G^{\mathrm{T}} C\|^2 \leqslant 2 \, \operatorname{Sp} C. \\ &\|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C_s\| = \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C \left(G_s G^{\mathrm{T}} + G G_s^{\mathrm{T}} \right) C\| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C\| \cdot \|G^{\mathrm{T}} C\| + \underbrace{\|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C G\|}_{\rho} \cdot \|C\| \leqslant 2\rho \, \operatorname{Sp} C. \\ &\|x^{\mathrm{T}} A_5 x\| = \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C_s A \Pi x\| \leqslant \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C_s\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \leqslant 4\rho \, \left(\operatorname{Sp} C \right)^{3/2} \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Далее,

$$\|A_s\| = \| \left(G_t G^{\mathrm{T}} C G_q + G_q G^{\mathrm{T}} C G_t\right)_s \| =$$
$$= \|G_t G_s^{\mathrm{T}} C G_q + G_t G^{\mathrm{T}} C_s G_q + G_q G_s^{\mathrm{T}} C G_t + G_q G^{\mathrm{T}} C_s G_t\| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \cdot \|C\| + 2 \cdot \|G^{\mathrm{T}} C_s\| \leqslant 6 \cdot \operatorname{Sp} C,$$
$$\|x^{\mathrm{T}} A_6 x\| = \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C A_s \Pi x\| \leqslant \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C\| \cdot \|A_s\| \cdot \|x\| \leqslant 6\rho \left(\operatorname{Sp} C\right)^{3/2} \cdot \|x\|.$$
$$\|x^{\mathrm{T}} A_7 x\| = \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C A \Pi_s x\| \leqslant \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C\| \cdot \|A\| \cdot \|\Pi_s x\| \leqslant 2\rho \left(\operatorname{Sp} C\right)^{3/2} \left(\|x\| + \rho\right).$$

В результате оценка принимает вид

$$\|J'''_{\theta\theta\theta_s}\| \leqslant \|D\|^3 \cdot \|J'''_{\gamma\gamma\gamma}\| \leqslant \|D\|^3 \cdot c_{00}^{3/2} \cdot \|J'''_{qts}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|D\|^3 \cdot c_{00}^{3/2} \cdot \left(\|x^{\mathrm{T}} A_1 x\| + \ldots + \|x^{\mathrm{T}} A_{10} x\|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \|D\|^3 \cdot \left(c_{00} \operatorname{Sp} C\right)^{3/2} \left(6 \|x\|^2 + 16 \|x\| \rho + 6\rho^2\right). \quad (35)$$

4) Оценим сомножитель $\|B_2\|$. Учитывая определение, имеем

$$a_{s,j} \doteq J'''_{\theta\theta\theta_s} \left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x_j} - J'''_{\theta x_j \theta_s},$$
$$\|B_2\| = \| \sum_j \begin{pmatrix} a_{1,j} & \ldots & a_{n,j} \end{pmatrix} \Delta x_j \| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{n} \, \| \sum_j a_{s,j} \Delta x_j \| = \sqrt{n} \, \|J'''_{\theta\theta\theta_s} \left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x} \Delta x - J'''_{\theta x \theta_s} \Delta x\| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{n} \, \|B\| \cdot \|J'''_{\theta\theta\theta_s}\| \cdot \|J''_{\theta x} \Delta x\| + \sqrt{n} \, \|J'''_{\theta x \theta_s} \Delta x\|.$$

Применим неравенства (32), (33), (35). В результате получим оценку

$$\|B_2\| \leqslant \sqrt{n} \, \left\{\|B\| \cdot \|D\|^2 \cdot \left(c_{00} \operatorname{Sp} C\right) \left(6 \|x\|^2 + 16 \|x\| \rho + 6\rho^2\right) + 4\right\} \times$$
$$\times \|D\|^2 \cdot c_{00} \operatorname{Sp} C \cdot \left(\|x\| + \rho\right) \cdot \epsilon.$$

5) Оценим сомножитель $\|B_4\| = \|J'''_{\theta\theta x} \Delta x\|$. Из (34) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} J''_{qt} = \frac{\partial}{\partial x} \Big\{ x^{\mathrm{T}} \left(\Pi G_t^{\mathrm{T}} C G_q \Pi - G^{\mathrm{T}} C A \Pi - G^{\mathrm{T}} C G_q \Pi G_t^{\mathrm{T}} C G\right) x \Big\}.$$

Применим тождество

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^{\mathrm{T}} Y x\right) = \frac{\left(\partial x^{\mathrm{T}} \cdot Y x + x^{\mathrm{T}} Y \cdot \partial x\right)}{\partial x} = x^{\mathrm{T}} \left(Y + Y^{\mathrm{T}}\right).$$

С учетом неравенства $\|J'''_{\gamma\gamma x}\| \leqslant c_{00} \cdot \max\limits_{qt} \|\frac{\partial}{\partial x} J''_{qt}\|$ получаем

$$\|J'''_{\gamma\gamma x}\| \leqslant c_{00} \cdot \|x^{\mathrm{T}} \left(Y + Y^{\mathrm{T}}\right) \| =$$
$$= c_{00} \cdot \|x^{\mathrm{T}} \Pi G_t^{\mathrm{T}} C G_q \Pi - x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C A \Pi - x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C G_q \Pi G_t^{\mathrm{T}} C G +$$
$$+ x^{\mathrm{T}} \Pi G_q^{\mathrm{T}} C G_t \Pi - x^{\mathrm{T}} \Pi A^{\mathrm{T}} C G - x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C G_t \Pi G_q^{\mathrm{T}} C G\| \leqslant$$
$$\leqslant c_{00} \left(2 \|x^{\mathrm{T}} \Pi G_t^{\mathrm{T}} C G_q \Pi\| + \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C A \Pi\| + \right.$$
$$\left. + \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C G_q \Pi G_t^{\mathrm{T}} C G\| + \|x^{\mathrm{T}} \Pi A^{\mathrm{T}} C G\| + \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C G_t \Pi G_q^{\mathrm{T}} C G\|\right) \leqslant$$
$$\leqslant c_{00} \left(2 \|x\| \cdot \|C\| + \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C\| \cdot \|A\| + \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C\| \cdot \|C G\| + \right.$$
$$\left. + \|x\| \cdot \|A\| \cdot \|C G\| + \|x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C\| \cdot \|C G\|\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_{00}\,(2\,\|x\|\cdot \operatorname{Sp} C + 2\rho\ \operatorname{Sp} C + \rho\ \operatorname{Sp} C + 2\,\|x\|\cdot \operatorname{Sp} C + \rho\ \operatorname{Sp} C) = \\ = 4c_{00}\operatorname{Sp} C\ (\|x\| + \rho)\,.$$

Тогда

$$\|B_4\| = \|J'''_{\theta\theta x}\Delta x\| \leqslant \|D\|^2\cdot\|J'''_{\gamma\gamma x}\|\cdot\|\Delta x\| \leqslant 4\,\|D\|^2\cdot c_{00}\operatorname{Sp} C\ (\|x\|+\rho)\cdot\epsilon.$$

6) Оценим слагаемое $\|B_6\| = \|\sum_j\sum_k J'''_{\theta x_j x_k}\Delta x_j\Delta x_k\|$. Из (25) следует

$$\left[J'''_{\gamma x x}\right]^q \doteq \tfrac{\partial}{\partial x}\left[J''_{\gamma x}\right]^q = \Pi G_q^{\mathrm{T}} C G + G^{\mathrm{T}} C G_q \Pi,$$

и верна оценка $\left[J'''_{\gamma xx}\right]^q \leqslant 2\,\|CG\| \leqslant 2\sqrt{\operatorname{Sp} C}$ (предложение 3),

$$\|\sum_j\sum_k J'''_{\theta x_j x_k}\Delta x_j\Delta x_k\| \leqslant \|D\|\cdot\sqrt{c_{00}}\,\|\left[J'''_{\gamma xx}\right]^q\|\cdot\|\Delta x\|^2 \leqslant 2\,\|D\|\cdot\sqrt{c_{00}\operatorname{Sp} C}\cdot\epsilon^2.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (лемма 6). Из леммы 2 имеем $\|\,(J''_{\theta\theta})^{-1}\,\| \doteq \|\,(R_0+E)^{-1}\,\|$,

$$\|E\| \leqslant \|R_1\| + \|R_2\| \leqslant c_0\cdot\|D\|^2\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\|x\|+\rho\right)\rho.$$

Из леммы 8 с учетом неравенства

$$|\lambda_i(A+E)-\lambda_i(A)| \leqslant \|\operatorname{diag}(\lambda_1(A+E)-\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A+E)-\lambda_n(A))\,\|$$

можем доказать следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть A, E — вещественные симметрические матрицы, и λ_i — собственные числа. Тогда $\forall i$ $|\lambda_i(A+E)-\lambda_i(A)| \leqslant \|E\|$.*

Следствие. *Для симметричных вещественных неотрицательных матриц A, E верно неравенство $\|\,(A+E)^{-1}\,\|_2 = \frac{1}{\lambda_{\min}(A+E)} \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(A)-\|E\|}$.*

Применим это следствие для получения верхней оценки нормы $\|\,(J''_{\theta\theta})^{-1}\,\| = \|\,(R_0+E)^{-1}\,\|$. Используя предложение 1, можем написать

$$\|\,\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}\,\| \leqslant \sqrt{n}\,\|\,\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}\,\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0) - c_0\cdot\|D\|^2\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\|x\|+\rho\right)\rho}.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (лемма 7).

Установим одно вспомогательное неравенство. Заметим, что $CGG^{\mathrm{T}} = I_{N-p}$, следовательно, $\|C\|\cdot\|G\|^2 \geqslant \|CGG^{\mathrm{T}}\| = \|I_{N-p}\| = \sqrt{N-p}$. Учитывая соотношение

$$\|G\|^2 = (N-p)\|\gamma\|^2, \tag{36}$$

получаем неравенство

$$\|C\|\cdot\|\gamma\|^2 \geqslant \frac{1}{\sqrt{N-p}}. \tag{37}$$

Перейдем к доказательству леммы. Матрицы C и $C+\Delta C$ симметричные и положительно определены:

$$\operatorname{Sp} C = \lambda_1(C)+\ldots+\lambda_{N-p}(C) > 0, \quad \operatorname{Sp} C + \Delta\operatorname{Sp} C = \operatorname{Sp}(C+\Delta C) > 0.$$

Применяя лемму 9, получаем неравенство

$$\operatorname{Sp}\Delta C = \Delta \operatorname{Sp} C \leqslant (N-p)\max_i |\Delta\lambda_i| \leqslant (N-p)\cdot\|\Delta C\|. \tag{38}$$

Оценим $\|\Delta C\|$.

$$C + \Delta C = (GG^{\mathrm{T}} + \Delta G\cdot G^{\mathrm{T}} + G\cdot\Delta G^{\mathrm{T}} + \Delta G\cdot\Delta G^{\mathrm{T}})^{-1} = \\ = C\Big(I + \underbrace{(\Delta G\cdot G^{\mathrm{T}} + G\cdot\Delta G^{\mathrm{T}} + \Delta G\cdot\Delta G^{\mathrm{T}})\,C}_{M}\Big)^{-1}.$$

Обозначим $\nu \doteq \|M\|$. Имеет место оценка (см. (36))

$$\nu \doteq \|M\| \leqslant \|C\|\cdot\big(2\cdot\|G\|\cdot\|\Delta G\| + \|\Delta G\|^2\big) = \\ = (N-p)\cdot\|C\|\cdot\big(2\cdot\|\gamma\|\cdot\|\Delta\gamma\| + \|\Delta\gamma\|^2\big) \leqslant \\ \leqslant (N-p)\cdot\|C\|\cdot\|D\|\cdot\|\Delta\theta\|\cdot(2\cdot\|\gamma\| + \|D\|\cdot\|\Delta\theta\|) \doteq \nu_+.$$

Предположим, что $\nu_+ < 1$, тогда $\nu < 1$ и можно применить следствие 2, $C + \Delta C = C(I+Y)$, $\|Y\| \leqslant \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{N-p}$. Следовательно,

$$\|\Delta C\| \leqslant \|C\|\cdot\|Y\| \leqslant \|C\|\cdot\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{N-p} \leqslant \|C\|\cdot\frac{\nu_+}{1-\nu_+}\sqrt{N-p}. \tag{39}$$

Для выполнения неравенства $\operatorname{Sp}\Delta C \leqslant \operatorname{Sp} C$ ввиду (38) достаточно условия $(N-p)\cdot\|\Delta C\| \leqslant \operatorname{Sp} C$, и значит, в силу (39) достаточно удовлетворить неравенству $(N-p)^{3/2}\cdot\|C\|\cdot\frac{\nu_+}{1-\nu_+} \leqslant \operatorname{Sp} C$. Поскольку $\|C\| \leqslant \operatorname{Sp} C$ (см. предложение 1), достаточным будет также условие $(N-p)^{3/2}\cdot\operatorname{Sp} C\cdot\frac{\nu_+}{1-\nu_+} \leqslant \operatorname{Sp} C$, которое запишем в виде

$$\nu_+ \leqslant \frac{1}{(N-p)^{3/2}+1}. \tag{40}$$

Отсюда будет следовать и условие $\nu < \nu_+ < 1$.

Из неравенства (40) следует искомое ограничение на $\|\Delta\theta\|$:

$$\nu_+ = (N-p)\cdot\|C\|\cdot\|D\|\cdot\|\Delta\theta\|\cdot(2\cdot\|\gamma\| + \|D\|\cdot\|\Delta\theta\|) \leqslant \frac{1}{(N-p)^{3/2}+1}. \tag{41}$$

Оно имеет вид $x(2a+x) \leqslant b$, где

$$x \doteq \|D\|\cdot\|\Delta\theta\|, \quad a \doteq \|\gamma\|, \quad b \doteq \frac{1}{(N-p)\Big[(N-p)^{3/2}+1\Big]\cdot\|C\|}.$$

Учитывая, что $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$, имеем $x \leqslant \sqrt{(a^2+b)} - a = a\left(\sqrt{1+e}-1\right)$,

$$e \doteq \frac{b}{a^2} = \frac{1}{(N-p)\Big[(N-p)^{3/2}+1\Big]\cdot\|C\|\cdot\|\gamma\|^2},$$

т. е. неравенство (41) равносильно условию

$$\|D\|\cdot\|\Delta\theta\| \leqslant \|\gamma\|\cdot\left(\sqrt{1+e}-1\right). \tag{42}$$

Ввиду соотношения (37) верна оценка $e \leqslant \frac{1}{\sqrt{N-p}\left[(N-p)^{3/2}+1\right]} \leqslant \frac{1}{2}$, тогда $(\sqrt{6}-2)e \leqslant$ $\leqslant \sqrt{1+e}-1$, и достаточным условием для (42) и (41) является неравенство

$$\|D\| \cdot \|\Delta\theta\| \leqslant \|\gamma\| \cdot \left(\sqrt{6}-2\right) e = \|\gamma\| \frac{\left(\sqrt{6}-2\right)}{(N-p)\left[(N-p)^{3/2}+1\right] \cdot \|C\| \cdot \|\gamma\|^2},$$

которое запишем в виде

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \frac{\left(\sqrt{6}-2\right)}{(N-p)\left[(N-p)^{3/2}+1\right] \cdot \|C\| \cdot \|D\| \cdot \|\gamma\|}. \tag{43}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (теорема 2). Ввиду соотношений (14) выбором достаточно малого ϵ всегда можно обеспечить любую сколь угодно малую величину нормы $\|\Delta\theta\|$. Будем считать отклонения Δx малыми настолько, чтобы соответствующие отклонения $\Delta\theta$ удовлетворяли неравенству из условия леммы 7. Ниже будет показано, что для выполнения этого неравенства достаточно условия (22).

Получим оценку нормы $\|\Delta\theta\| = \|S_0^{\mathrm{T}}\Delta x + S_1^{\mathrm{T}}\Delta x + \Delta_2\theta\|$. С учетом (14) и следствия 1

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda_{\min}(R_0)}} + \|S_1^{\mathrm{T}}\| \cdot \epsilon + \|\Delta_2\theta\|. \tag{44}$$

Заметим, что имеет место соотношение

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda_{\min}(R_0)}} = \sqrt{\frac{b_0}{2\sqrt{n}}}\,\epsilon. \tag{45}$$

Из леммы 4 имеем оценку $\|S_1^{\mathrm{T}}\| \leqslant \frac{21\sqrt{n}\,b_0^2(R^*)^{3/2}}{2\|x\|}\,\rho$.

Перейдем к оценке нормы $\|\Delta_2\theta\|$. Переменные в выражениях для компонент $\Delta_2\theta$ берутся в точках $x + h_i\Delta x$, $h_i \in (0,1)$ согласно (10). Пометим значения величин в этих точках индексом Δ. Из леммы 6 следует оценка

$$\|B^{\Delta}\| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0^{\Delta}) - c_0^{\Delta} \cdot \|D\|^2 \cdot (2\,\|x^{\Delta}\| + \rho^{\Delta})\,\rho^{\Delta}}.$$

Ввиду леммы 9

$$\left|\lambda_{\min}(R_0^{\Delta}) - \lambda_{\min}(R_0)\right| \leqslant \|R_0^{\Delta} - R_0\|,$$

тогда получаем оценку

$$\|B^{\Delta}\| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0) - \|R_0^{\Delta} - R_0\| - c_0^{\Delta} \cdot \|D\|^2 \cdot (2\,\|x^{\Delta}\| + \rho^{\Delta})\,\rho^{\Delta}}.$$

Имеет место оценка

$$\begin{aligned}\|R_0^{\Delta} - R_0\| \leqslant \|D\|^2 \cdot \|\widehat{V}^{\mathrm{T}\Delta} C \widehat{V}^{\Delta} - \widehat{V}^{\mathrm{T}} C \widehat{V}\| \leqslant \\ \leqslant \|D\|^2 \cdot c_{00}\|C\| \cdot (\|x\| + \|\Delta x\|) \cdot \|\Delta x\| \leqslant \\ \leqslant c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot (\|x\| + \epsilon)\,\epsilon.\end{aligned}$$

(см. доказательство леммы 2). В правой части все величины без индекса «Δ».

Исходя из этого неравенства, в качестве второго[11] порога обусловленности оценок принимаем условие

$$c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot (\|x\| + \epsilon)\,\epsilon + c_0^\Delta \cdot \|D\|^2 \cdot \left(2\,\|x^\Delta\| + \rho^\Delta\right) \rho^\Delta \leqslant \tfrac{1}{2}\lambda_{\min}(R_0), \tag{46}$$

которое равносильно ограничению

$$\|B^\Delta\| \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0)} = b_0. \tag{47}$$

Выразим полученные неравенства через значения величин в точке $\theta(x)$. Принимая условие на $\Delta\theta$ из леммы 7 и $\rho, \rho^\Delta, \epsilon \leqslant \|x\|$, можем считать

$$c_0^\Delta = c_{00}\,\mathrm{Sp}\,C^\Delta \leqslant 2\,c_{00}\,\mathrm{Sp}\,C = 2\,c_0, \quad \|x^\Delta\| \leqslant 2\,\|x\|. \tag{48}$$

Учтем соотношение (20) между ρ и ρ^Δ, тогда

$$\begin{aligned} &c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot (\|x\| + \epsilon)\,\epsilon + c_0^\Delta \cdot \|D\|^2 \cdot \left(2\,\|x^\Delta\| + \rho^\Delta\right) \rho^\Delta \leqslant \\ &\qquad \leqslant c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot (\|x\| + \epsilon)\,\epsilon + 2\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot (4\,\|x\| + \|x\|) \cdot (\rho + \epsilon) \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant 2\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\|\epsilon + 10\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot (\rho + \epsilon) \leqslant \\ &\qquad\qquad\qquad \leqslant 12\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot (\rho + \epsilon). \end{aligned}$$

Следовательно, достаточным условием для выполнения (46) является неравенство

$$12\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot (\rho + \epsilon) \leqslant \tfrac{1}{2}\lambda_{\min}(R_0),$$

которое запишем в виде

$$\rho + \epsilon < \frac{\lambda_{\min}(R_0)}{24\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\|}. \tag{49}$$

Все три условия (30), (46) и (49) будут выполнены, если ограничиться неравенством

$$\rho + \epsilon \leqslant \frac{\lambda_{\min}(R_0)}{24\sqrt{n}\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\|} = \frac{\|x\|}{12\,b_0 R^*}. \tag{50}$$

Это неравенство принимается в качестве единого порога обусловленности оценок. Оно включено в условие теоремы.

Для оценки $\|\Delta_2\theta\|$ имеем неравенство (см. (18), (19))

$$\|\Delta_2\theta\| \leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{n}\,\|B^\Delta\| \cdot \left\{\|B^\Delta\| \cdot \|B^\Delta_{3,5}\| \cdot \left(\|B_2^\Delta\| + \|B_4^\Delta\|\right) + \|B_6^\Delta\|\right\}. \tag{51}$$

При выполнении соотношения (50) и его следствия (46) для нормы $\|B^\Delta\|$ имеет место оценка (47). Оценки норм $\|B^\Delta_{2\div 6}\|$ получаем из леммы 5. Упростим эти оценки с учетом неравенства $\rho^\Delta \leqslant \|x\|$ и выразим величины через значения переменных в точке $\theta(x)$ (20), (48):

$$\begin{aligned} \|B_2^\Delta\| \leqslant \sqrt{n}\,&\left\{\|B^\Delta\| \cdot \|D\|^2 \cdot c_0^\Delta\,\left(6\,\|x^\Delta\|^2 + 16\,\|x^\Delta\|\,\rho^\Delta + 6\rho^{\Delta 2}\right) + 4\right\} \times \\ &\times \|D\|^2 \cdot c_0^\Delta\,\left(\|x^\Delta\| + \rho^\Delta\right) \epsilon \leqslant \end{aligned}$$

---

[11] См. (30).

$$\leqslant \sqrt{n}\,\left\{b_0\cdot\|D\|^2\cdot c_0^\Delta\,\left(6\,\|x^\Delta\|^2+16\,\|x^\Delta\|\cdot\|x\|+6\|x\|^2\right)+4\right\}\times$$
$$\times\,\|D\|^2\cdot c_0^\Delta\cdot\left(\|x^\Delta\|+\|x\|\right)\epsilon=$$
$$=3\sqrt{n}\,\left\{62\cdot b_0\cdot\|D\|^2\cdot c_0^\Delta\cdot\|x\|^2+4\right\}\cdot\|D\|^2\cdot c_0^\Delta\cdot\|x\|\cdot\epsilon\leqslant$$
$$\leqslant 6\sqrt{n}\,\left\{124\cdot b_0\cdot\|D\|^2\cdot c_0\cdot\|x\|^2+4\right\}\cdot\|D\|^2\cdot c_0\cdot\|x\|\cdot\epsilon=$$
$$=24\sqrt{n}\,\{31\cdot b_0R^*+1\}\,\frac{R^*}{\|x\|}\,\epsilon,$$

$$\|B_{3,5}^\Delta\|\leqslant\|D\|\cdot\sqrt{c_0^\Delta}\,\left(\|x^\Delta\|+\rho^\Delta\right)\epsilon\leqslant 3\sqrt{2}\cdot\|D\|\cdot\sqrt{c_0}\cdot\|x\|\cdot\epsilon=3\sqrt{2R^*}\,\epsilon,$$
$$\|B_4^\Delta\|\leqslant 4\,\|D\|^2\cdot c_0^\Delta\,\left(\|x^\Delta\|+\rho^\Delta\right)\epsilon\leqslant 24\,\|D\|^2\cdot c_0\cdot\|x\|\cdot\epsilon=24\,\frac{R^*}{\|x\|}\,\epsilon,$$
$$\|B_6^\Delta\|\leqslant 2\,\|D\|\cdot\sqrt{c_0^\Delta}\,\epsilon^2\leqslant 2\,\|D\|\cdot\sqrt{2c_0}\,\epsilon^2\leqslant 2\,\frac{\sqrt{2R^*}}{\|x\|}\,\epsilon^2.$$

Подставим полученные значения в неравенство (51):

$$\|\Delta_2\theta\|\leqslant\tfrac{1}{2}\sqrt{n}\,b_0\cdot\Big\{b_0\cdot 3\sqrt{2R^*}\,\epsilon\,\times$$
$$\times\Big(24\sqrt{n}\,[31\cdot b_0R^*+1]\,\frac{R^*}{\|x\|}\,\epsilon+24\frac{R^*}{\|x\|}\,\epsilon\Big)+2\,\frac{\sqrt{2R^*}}{\|x\|}\,\epsilon^2\Big\}=$$
$$=\sqrt{2n}\,b_0\cdot\left\{36\cdot b_0R^*\left(\sqrt{n}\,[31\cdot b_0R^*+1]+1\right)+1\right\}\frac{\sqrt{R^*}}{\|x\|}\,\epsilon^2. \quad (52)$$

В результате получены оценки всех трех слагаемых в правой части неравенства (44). После выполнения подстановок (45), (52) и леммы 4 неравенство приобретает вид:

$$\|\Delta\theta\|\leqslant\sqrt{\tfrac{b_0}{2\sqrt{n}}}\,\epsilon+\tfrac{21\sqrt{n}\,b_0^2(R^*)^{3/2}}{2\|x\|}\,\rho\epsilon+c_{22}\,\epsilon^2, \quad (53)$$
$$c_{22}\doteq\tfrac{\sqrt{2n}\,b_0\sqrt{R^*}}{\|x\|}\left\{36\,b_0R^*\left(\sqrt{n}\,[31\,b_0R^*+1]+1\right)+1\right\}.$$

Осталось показать, что из условия теоремы следует неравенство (43). Действительно, из оценки (53) ввиду неравенства (21) получаем соотношение

$$\|\Delta\theta\|\leqslant\left(\sqrt{\tfrac{b_0}{2\sqrt{n}}}+\tfrac{21\sqrt{n}\,b_0\sqrt{R^*}}{20}\right)\epsilon+c_{22}\,\epsilon^2.$$

Поскольку $\|C\|\leqslant\operatorname{Sp}C$, из условия (22) следует неравенство (43). Теорема доказана.

Список литературы

1. *Bjorck A.* Numerical Methods for Least Squares Problems. SIAM, Philadelphia, 1996.

2. *Aoki M., Yue P. C.* On a Priori Error Estimates of Some Identification Methods // IEEE Trans. on Automat. Control. 1970. Vol. AC-15. P. 541–548.

3. *Van Huffel S., Vandewalle J.* The Total Least Squares Problem. SIAM, Philadelphia, 1991.

4. *Abatzoglu T. J., Mendel J. M., Harada G. A.* The Constrained Total Least Squares Technique and Its Applications to Harmonic Superresolution // IEEE Trans. Signal Processing. SP-39. 1991. P. 1070–1087.

5. *Ломов А. А.* Орторегрессионные методы оценивания параметров и задачи отделения трендов в линейных системах // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2005. № 2. С. 1–86. URL: http://www.neva.ru/journal

6. *Ломов А. А.* О количественном априорном показателе идентифицируемости параметров линейной системы // Тр. VIII Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'09. Москва, 26–30 янв. 2009 г. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 479–491.

7. *Fuller W. A.* Measurement Error Models. N. Y.: Wiley, 1987.

8. *Lomov A. A.* Orthoregressive Estimates for the Parameters of Systems of Linear Difference Equations // J. Appl. and Industrial Math. 2007. Vol. 1. No. 1. P. 59–76.

9. *Osborne M. R.* A Class of Nonlinear Regression Problems // Data Representation / Eds. R. S. Anderssen, M. R. Osborne. University of Queensland Press, 1970. P. 94–101.

10. *Егоршин А. О.* Вычислительные замкнутые методы идентификации линейных объектов // Оптимальные и самонастраивающиеся системы. Новосибирск, 1971. С. 40–53.

11. *Roorda B.* Algorithms for Global Total Least Squares Modelling of Finite Multivariable Time Series // Automatica. 1995. Vol. 31. No. 3. P. 391–404.

12. *Егоршин А. О.* Оптимизация параметров стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. № 12. С. 29–48.

13. *Демиденко В. Г.* Восстановление параметров однородной линейной модели // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 3. С. 51–59.

14. *Aoki M., Yue P. C.* On the Certain Convergence Questions in System Identification // SIAM J. of Control. 1970. Vol. 8. No. 2. P. 239–256.

15. *Ворчик Б. Г.* Идентифицируемость линейных параметрических стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1985. № 5. С. 64–78; № 7. С. 96–109.

16. *Ломов А. А.* Идентификация линейных динамических систем по коротким участкам переходных процессов при аддитивных измерительных возмущениях // Изв. РАН ТиСУ. 1997. № 3. С. 20–26.

17. *Ломов А. А.* Условия различимости стационарных линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 2. С. 261–266.

18. *Ломов А. А.* О различимости стационарных линейных систем с коэффициентами, зависящими от параметра // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6, № 4 (16). С. 60–66.

19. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: ФМЛ, 1961.

20. *Костин В. И.* О точках экстремума одной функции // Управляемые системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. Т. 24. С. 35–42.

21. *Smyth G. K.* Employing Symmetry Constraints for Improved Frequency Estimation by Eigenanalysis Methods // Technometrics. Aug. 2000. Vol. 42. P. 277–289.

22. *Ломов А. А.* Минимальные описания стационарных линейных моделей // Тр. Ин-та математики СО РАН. Новосибирск, 1994. Т. 28: Модели и методы оптимизации. С. 91–117.

23. *Шварц Л.* Анализ I, II. М.: Мир, 1972.

24. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1973.

25. *Mirsky L.* Symmetric Gauge Functions and Unitarily Invariant Norms // Quart. J. Math. Oxford. 1960. Vol. 11. P. 50–59.

Материал поступил в редколлегию 02.10.2009

Адрес автора

ЛОМОВ Андрей Александрович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: lomov@math.nsc.ru