УДК 004.82 + 510.64

Д. Е. Пальчунов, Г. Э. Яхъяева

НЕЧЕТКИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ*

В работе исследуется проблема пополнения частичной информации о нечетких значениях истинности формул первого порядка на алгебраической системе. Предложен семантический подход к нечеткой логике. Данный подход основан на построении нечетких моделей и обобщенных нечетких моделей при помощи фазификации булевозначных моделей.

Введена операция произведения булевозначных моделей. Исследованы свойства произведения булевозначных моделей с конечной булевой алгеброй.

Исследованы обобщенные нечеткие модели, порожденные интервальными означиваниями. Доказано, что если обобщенная нечеткая модель порождена интервальным означиванием некоторого множества предложений, то для любого предложения значением его истинности на данной обобщенной нечеткой модели является интервал.

Ключевые слова: нечеткие логики, нечеткая алгебраическая система, нечеткая модель, булевозначная модель, фазификация булевозначной модели, обобщенная нечеткая модель, интервальное означивание.

Введение

Термин *«нечеткая логика»* появился при развитии теории нечетких множеств Лотфи Заде [1]. Нечеткое подмножество A множества B характеризуется тем, что каждому элементу $x \in B$ ставится в соответствие степень принадлежности элемента x множеству A. Если B — множество суждений, то его элементам может быть поставлена в соответствие степень их истинности, которая может быть *«истинной»*, *«ложной»* или принимать некоторые промежуточные значения: одно суждение может быть более истинно чем другое.

Можно выделить два направления нечеткой логики [2]. *Нечеткая логика в широком смысле* является аппаратом нечеткого управления, анализа неопределенности естественного языка и применяется для некоторых других прикладных областей. Она является и одним из методов мягких вычислений. Подробное описание данного направления можно найти в [3–6].

Нечеткая логика в узком смысле — это логическое исчисление, развивающееся в духе классической логики (синтаксис, семантика, аксиоматизация, полнота и т. д.). Нечеткая логика является одним из направлений многозначной логики, основанном на парадигме вывода при наличии неопределенности. Такая нечеткая логика — относительно молодая дисциплина, которая является основой для нечеткой логики в широком смысле. Основная работа по данному направлению проделана в [7] (см. также: [8; 9]). В работе [10] рассматриваются алгебраические системы с нечеткими операциями.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН 119, а также в рамках гранта Федерального агенства по образованию, государственный контракт П-1008.

В настоящей работе исследуется семантический подход к нечеткой логике. Решается задача пополнения частичной или неточной информации об истинности формул на модели. А именно, по информации о нечетком знании истинности некоторого множества формул на модели необходимо определить нечеткие знания истинности всех формул.

Мы рассматриваем нечеткую алгебраическую систему $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ с основным множеством A и говорим об истинности формул на ней. Об истинности формул на $\mathfrak{A}$ мы изначально имеем неполную и неточную информацию. Наша цель — экстраполяция этой информации.

Для удобства, для того, чтобы говорить не об истинности произвольных формул на $\mathfrak{A}$, а только об истинности предложений, мы обогащаем сигнатуру σ новыми константами. Вместо σ мы рассматриваем $\sigma_A \rightleftharpoons \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$, где $\{c_a \mid a \in A\} \cap \sigma = \varnothing$. При этом на $\mathfrak{A}$ выполнено $c_a^{\mathfrak{A}} = a$.

§ 1. Обработка нечеткой информации

При работе с нечеткой и неполной информацией мы рассматриваем две возможные ситуации.

I. Пусть есть некоторый эксперт по предметной области, описываемой языком σ_A. Например, таким экспертом может быть врач, а предметной областью — определенный раздел медицины. Эксперт имеет дело с некоторым множеством ситуаций — экземпляров данной предметной области (например, с некоторым множеством историй болезни пациентов). Это множество ситуаций можно рассматривать как вероятностное пространство. Элементарными исходами этого вероятностного пространства будут ситуации — экземпляры предметной области. Для простоты можно считать, что все элементарные исходы являются равновероятными. Естественно, эксперт не знает полного описания каждой из указанных ситуаций и, тем более, не знает истинного значения всех предложений сигнатуры σ_A в каждой из этих ситуаций (в частности, поскольку количество таких предложений бесконечно).

Тем не менее, существует конечное множество предложений I, интересных для эксперта, про каждое из которых эксперт точно знает, на каком количестве из известных ему ситуаций это предложение было истинно. Таким образом, в нашей модели исходим из того, что на данном вероятностном пространстве эксперту известны вероятности истинности всех утверждений, содержащихся в множестве I.

Очевидно, что из этого не следует, что реальному эксперту (например, тому же врачу) известны вероятности истинности булевых комбинаций предложений из I — конъюнкции, дизъюнкции, импликации и т. д. Врач знает вероятность успеха определенной операции, знает вероятность наличия определенных симптомов у пациента, но это не означает, что врач знает вероятности всех возможных закономерностей.

Таким образом, возникает проблема по известным вероятностям истинности предложений из I оценить возможную вероятность истинности произвольного предложения $\psi \notin I$ сигнатуры σ_A.

II. Допустим, что для некоторой предметной области мы имеем конечный набор ее экземпляров (обозначим его через G) и конечный набор I предложений языка σ_A. Без ограничения общности можно предположить, что все экземпляры предметной области (элементы множества G) равновероятны (т. е. для любого $g \in G$ вероятность $p(g) = \frac{1}{\|G\|}$, где $\|G\|$ — мощность, т. е. колличество элементов множества G). В противном случае каждый из экземпляров можно продублировать необходимое количество раз. Например, пусть

$$G = \{g_1, \ldots, g_k\} \quad \text{и} \quad p(g_1) = \frac{m_1}{l}, \ldots, p(g_k) = \frac{m_k}{l},$$

где $\frac{m_1}{l} + \ldots + \frac{m_k}{l} = 1$. Тогда мы можем рассматривать множество

$$G' = \{g_1^1, \ldots, g_1^{m_1}, \ldots, g_k^1, \ldots, g_k^{m_k}\}.$$

Очевидно, что $\|G'\| = m_1 + \ldots + m_k = l$ и каждое событие $g \in G'$ имеет вероятность $p(g) = \frac{1}{l}$.

Предположим, что для каждого экземпляра рассматриваемой предметной области известна истинность каждого предложения из I. Таким образом, мы имеем формальный контекст [11], в котором экземпляры данной предметной области из множества G рассматриваются как объекты, а предложения из множества I — как их атрибуты. Исходя из данного формального контекста для каждого атрибута $\varphi \in I$ мы можем вычислить *вероятностную истинность* на данном контексте (т. е. число $\mu(\varphi) = \frac{\|G^*\|}{\|G\|}$, где $G^* = \{g \in G \mid \varphi \text{ истинно на } g\}$). Но возникает вопрос — что мы можем сказать о вероятности истинности произвольного предложения $\psi \notin I$ языка данной предметной области?

Таким образом, можно сформулировать следующую проблему: по множеству I предложений сигнатуры σ_A и отображению $\mu : I \to [0, 1]$ определить для произвольного предложения ψ сигнатуры σ_A возможные значения истинности ψ из промежутка $[0, 1]$.

Заметим, что вторая ситуация, в определенной степени близка к первой. При этом важно отметить следующее. Очень часто множество предложений I, истинность которых известна эксперту или представлена в таблице, описывающей набор экземпляров данной предметной области, состоит из достаточно простых предложений: атомарных $P(c_1, \ldots, c_n)$, где c_i — константы, а P — предикатный символ, или дизъюнктов вида $(\bigwedge\limits_i P_i(c_1^i, \ldots, c_{n_i}^i) \to P_0(c_1^0, \ldots, c_{n_0}^0))$.

Однако, кроме неполной и неточной информации, предоставляемой экспертами, необходимо учитывать еще и информацию о значениях (смысле) понятий, на языке которых описывается данная предметная область. Действительно, аналитические суждения [12] о ключевых понятиях предметной области являются либо всегда истинными, либо всегда ложными. Например, *«собака — это животное»*, *«овчарка — это собака»*, *«медь — это металл»* и т. д. Аналитические предложения, т. е. предложения, истинность которых определяется только смыслом входящих в них понятий (сигнатурных символов из σ), имеют в данной предметной области строго определенное истинностное значение, причем *«четкое»* — либо *«истино»*, либо *«ложно»*. По существу, это определения ключевых понятий предметной области, имена которых содержит сигнатура σ, или, другими словами, онтология данной предметной области [12; 13]. Заметим, что аналитические предложения, т. е. определения ключевых понятий предметной области, могут быть достаточно сложными, в частности, содержать кванторы.

Таким образом, наше знание об истинности предложений в рассматриваемой предметной области формализуется следующими множествами:

(1) множество I предложений, вероятностная истинность (т. е. отображение $\mu : I \to \to [0,1]$) которых известна эксперту или представлена в таблице данных об известных экземплярах предметной области;

(2) онтология предметной области — множество аналитических предложений Θ и отображение $\mu^{\Theta} : \Theta \to \{0,1\}$, определяющее истинность аналитических суждений.

Обозначим $I' \rightleftharpoons I \cup \Theta$, $\mu' : I' \to [0,1]$, где если $\varphi \in I$, то $\mu'(\varphi) = \mu(\varphi)$, а если $\varphi \in \Theta$, то $\mu'(\varphi) = \mu^{\Theta}(\varphi)$.

Поэтому наша задача уточняется следующим образом: по отображению $\mu' : I' \to \to [0,1]$ и предложению ψ сигнатуры σ_A определить, какие возможные значения истинности может принимать ψ.

Приведем пример. Пусть у нас есть следующие сигнатурные предикаты:

$D(x)$ — «x является собакой»;

$A(x)$ — «x является животным»;

$LD(x)$ — «x является болонкой»;

$SD(x)$ — «x является овчаркой»;

$W1(x)$ — «x имеет вес более одного килограмма»;

$EL(x)$ — «x является английской леди»;

$H(x,y)$ — «y является собственностью x».

Аналитическими, в частности, будут следующие предложения:

$$\forall x(D(x) \to A(x));$$
$$\forall x(LD(x) \to D(x));$$
$$\forall x(SD(x) \to D(x)).$$

Допустим, $\mu(D(x) \to W1(x)) = 0{,}9$, т. е. с вероятностью 0,9 вес собаки больше 1 килограмма. Можем ли мы что-либо сказать о вероятности истинности формул

$$\varphi_{LD} = (LD(x) \to W1(x)) \text{ или } \varphi_{SD} = (SD(x) \to W1(x))?$$

Очевидно, об этом мы не можем сказать ничего конкретного. Действительно, болонки могут попадать в 10 % собак, вес которых меньше килограмма, а овчарки — в 90 % собак, вес которых больше килограмма, а можно представить себе и обратную ситуацию. Поэтому возможное значение истинности формул φ_{LD} и φ_{SD} — это весь интервал $[0,1]$.

Допустим теперь, что имеет место другое утверждение:

$$\mu\big(EL(x) \to \exists y\,(H(x,y) \,\&\, LD(y))\big) = 0{,}7,$$

т. е. 70 % английских леди имеют болонку. Что мы тогда можем сказать о возможном значении вероятностной истинности предложений

$$\big(EL(x) \to \exists y(H(x,y) \,\&\, D(y))\big)$$

и

$$\big(EL(x) \to \exists y(H(x,y) \mathbin{\&} A(y))\big)\,?$$

Очевидно, вероятностная истинность этих предложений находится в промежутке $[0{,}7, 1]$, т. е. вероятность того, что некоторая собака является собственностью английской леди, не меньше 0,7, и вероятность того, что некоторое животное является собственностью английской леди, тоже не меньше 0,7.

Также очевидно, что вероятностная истинность предложения

$$\forall x\,(EL(x) \vee \neg EL(x))$$

равна 1, а вероятностная истинность предложения

$$\forall x\,(EL(x) \mathbin{\&} \neg EL(x))$$

равна 0.

Таким образом, в описанной ситуации вероятностная истинность различных предложений принадлежит разным промежуткам: $[0,1]$, $[0{,}7,\ 1]$, $[1,1]$, $[0,0]$.

Кроме того, из приведенных примеров видно, что в рассматриваемом примере значения вероятностных истинностей

$$\mu\big(EL(x) \to \exists y\,\big(H(x,y) \mathbin{\&} LD(y)\big)\big) = 0{,}7$$

и

$$\mu(EL(x) \to \exists y\,\big(H(x,y) \mathbin{\&} D(y)\big)\big) = 0{,}5$$

одновременно невозможны (в силу истинности онтологического утверждения $\forall y\,(LD(y) \to D(y))$).

Итак, имея дело с неполной и неточной информацией об истинности предложений в некоторой предметной области (на некоторой модели $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma\rangle$), мы должны решать две проблемы

Проблема 1. Какие оценки $\mu : I \to [0,1]$ являются совместными (т. е. возможными, реализуемыми)?

Проблема 2. Для совместной оценки $\mu : I \to [0,1]$ и предложения ψ, каковы могут быть значения вероятностной истинности предложения ψ?

Цель данной работы — точная формальная постановка указанных проблем и разработка подхода к их решению. Заметим, что формализм существующих нечетких логик позволяет решать только вторую проблему, причем в значительно более слабой постановке: если известны нечеткие значения истинности предложений из некоторого множества I, то индукцией по построению формул определяются значения истинности булевых комбинаций этих предложений; значениями их истинности являются элементы промежутка $[0,1]$.

Однако даже при решении нечеткими логиками этой достаточно узкой проблемы возникают парадоксы: значения истинности формул вида $(\varphi \vee \neg\varphi)$ и $(\varphi \to \varphi)$ отличны от 1, а значения истинности формул вида $(\varphi \mathbin{\&} \neg\varphi)$ отличны от 0; кроме того, некоторые логически эквивалентные формулы имеют различные значения истинности.

Действительно, рассмотрим наиболее популярные нечеткие логики.

I. *Максимильная логика Заде:*

$\mu(\neg\varphi) = 1 - \mu(\varphi)$, $\mu(\varphi \mathbin{\&} \psi) = \min\{\mu(\varphi), \mu(\psi)\}$, $\mu(\varphi \vee \psi) = \max\{\mu(\varphi), \mu(\psi)\}$.

Примеры парадоксов: Пусть формула φ имеет значение истинности $\mu(\varphi) = \frac{1}{2}$. Тогда $\mu(\varphi \mathbin{\&} \neg\varphi) = \frac{1}{2}$ и $\mu(\varphi \vee \neg\varphi) = \frac{1}{2}$.

II. *Логика Лукасевича:*

$\mu(\neg\varphi) = 1-\mu(\varphi)$, $\mu(\varphi \& \psi) = \max\{0, \mu(\varphi)+\mu(\psi)-1\}$, $\mu(\varphi\vee\psi) = \min\{1, \mu(\varphi)+\mu(\psi)\}$.

Примеры парадоксов: Пусть формула φ имеет значение истинности $\mu(\varphi) = \frac{1}{2}$. Тогда $\mu(\varphi \mathbin{\&} \varphi) = 0$ и $\mu(\varphi \vee \varphi) = 1$.

Пусть формулы φ, ψ, ξ имеют значения истинности $\mu(\varphi) = \mu(\psi) = \mu(\xi) = \frac{1}{2}$. Тогда $\mu((\varphi \mathbin{\&} \psi) \vee \xi) = \frac{1}{2}$ и $\mu((\varphi \vee \xi) \mathbin{\&} (\psi \vee \xi)) = 1$.

III. *Вероятностная логика:*

$\mu(\neg\varphi) = 1 - \mu(\varphi)$, $\mu(\varphi \mathbin{\&} \psi) = \mu(\varphi)\mu(\psi)$, $\mu(\varphi \vee \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi) - \mu(\varphi)\mu(\psi)$.

Вероятностная логика обладает парадоксами как логики Заде, так и логики Лукасевича.

§ 2. Системы, порожденные набором прецедентов

В данной работе мы рассматриваем логику предикатов без равенства. Обозначим $S(\sigma)$ — множество всех предложений сигнатуры σ (не содержащих символа равенства).

Для точной постановки и последующего решения проблем 1 и 2 сначала рассмотрим вторую из указанных в предыдущем параграфе ситуаций (т. е. пункт II).

Итак, пусть у нас имеется некоторая предметная область, для простоты будем считать, что она описывается некоторой алгебраической системой $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma\rangle$. Более точно, каждый конкретный экземпляр этой предметной области определяет свою алгебраическую систему $\langle A, \sigma\rangle$, т. е. свое означивание сигнатурных символов из σ на основном множестве A. Для простоты будем считать, что у всех алгебраических систем $\mathfrak{A}$, формально описывающих экземпляры данной предметной области, основное множество, в определенном смысле, т. е. с точностью до переобозначения, одно — это множество $\{c_a^{\mathfrak{A}} \mid a \in A\}$. Сигнатура σ — это множество понятий, на языке которых описывается данная предметная область. Естественно, у всех экземпляров предметной области сигнатура одна. Будем считать, что $\sigma \cap \{c_a \mid a \in A\} = \varnothing$ и обозначать $\sigma_A = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$. В данной работе мы ограничиваемся случаем, когда σ содержит только символы предикатов.

Для удобства, мы будем рассматривать алгебраические системы в расширенной сигнатуре σ_A.

Таким образом, возможные алгебраические системы, описывающие экземпляры данной предметной области, принадлежат множеству

$$K(\sigma, A) \rightleftharpoons \{\mathfrak{A} = \langle\{c_a^{\mathfrak{A}} \mid a \in A\}, \sigma_A\rangle \mid c_a^{\mathfrak{A}} \neq c_b^{\mathfrak{A}} \text{ при } a \neq b\}.$$

Вообще говоря, не каждая алгебраическая система $\mathfrak{A} \in K(\sigma, A)$ может быть моделью некоторого экземпляра данной предметной области. Дело в том, что на моделях экземпляров предметной области, как было отмечено выше, должны быть истинны все аналитические предложения [12; 14] данной предметной области, т. е. такие предложения, истинность которых определяется смыслом входящих в них понятий (смысл понятий специфичен для данной предметной области). Однако для нашего рассмотрения это не является принципиально важным — мы можем считать, что все аналитические предложения означены отображением μ, т. е. входят в множество I; при этом их мера истинности принимает значения 1 или 0, в зависимости от того, являются ли они истинными для данной предметной области.

Алгебраическую систему $\mathfrak{A} \in K(\sigma, A)$, являющуюся моделью некоторого экземпляра данной предметной области, назовем *прецедентом* предметной области.

Для удобства, в дальнейшем будем считать, что для разных $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma, A)$ выполняется $|\mathfrak{A}| \cap |\mathfrak{B}| = \varnothing$, при этом $|\mathfrak{A}| = \{c_a^{\mathfrak{A}} \mid a \in A\}$. Через $\wp(X)$ будем обозначать множество всех подмножеств множества X.

Для каждого набора прецедентов $E \subseteq K(\sigma, A)$ построим систему $\mathfrak{A}_E$.

Определение 1. Пусть $E \subseteq K(\sigma, A)$. *Прецедентной системой* (порожденной множеством E) назовем $\mathfrak{A}_E \rightleftharpoons \langle A, \sigma, \tau_E \rangle$, где $\tau_E : S(\sigma_A) \to \wp(E)$, причем для любого $\varphi \in S(\sigma_A)$

$$\tau_E(\varphi) = \{\mathfrak{A} \in E \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}.$$

Как обычно, считаем $|\mathfrak{A}| = \{c_a^{\mathfrak{A}} \mid a \in A\}$.

Отметим, что мы допускаем наличие в E изоморфных моделей, т. е. возможно, что существуют $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in E$ такие, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Таким образом, по набору прецедентов E мы определяем булевозначную модель $\mathfrak{A}_E$. Каждому предложению сигнатуры σ_A соответствует элемент атомной булевой алгебры $\wp(E)$. Булевозначные модели с атомными булевыми алгебрами мы изучим более подробно в следующем параграфе.

§ 3. Булевозначные модели с атомной булевой алгеброй

Дадим определение булевозначной модели $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}}$, т. е. модели, в которой значениями истинности предложений являются элементы булевой алгебры $\mathbb{B}$. Булевы алгебры будем рассматривать в сигнатуре $\langle \cup, \cap, ^{-}, 0, 1 \rangle$.

Определение 2 [15]. Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра и $\tau : S(\sigma_A) \to \mathbb{B}$. Тогда упорядоченная тройка $\mathfrak{A}_\tau = \langle A, \sigma, \tau \rangle$ называется *булевозначной моделью*, если выполняются следующие условия:

$$\begin{array}{rcl} \tau(\neg\varphi) & = & \overline{\tau(\varphi)}; \\ \tau(\varphi \vee \psi) & = & \tau(\varphi) \cup \tau(\psi); \\ \tau(\varphi \,\&\, \psi) & = & \tau(\varphi) \cap \tau(\psi); \\ \tau(\varphi \to \psi) & = & \overline{\tau(\varphi)} \cup \tau(\psi); \end{array} \tag{1}$$

$$\tau(\forall x \varphi(x)) = \bigcap_{a \in A} \tau(\varphi(c_a)); \tag{2}$$

$$\tau(\exists x \varphi(x)) \;=\; \bigcup_{a\in A} \tau(\varphi(c_a)).$$

Будем обозначать $\mathbb{B}(\tau) = \mathbb{B}$.

Пусть $\mathbb{B}$ — атомная булева алгебра. Обозначим через $At(\mathbb{B})$ множество атомов булевой алгебры $\mathbb{B}$ и через $At(b)$ множество атомов, лежащих под элементом b. Если $\mathbb{B}$ — конечная или полная булева алгебра, то

$$\mathbb{B} \cong \{\wp(At(\mathbb{B})), \cup, \cap, -, \varnothing, At(\mathbb{B})\}.$$

Покажем, как булевозначные модели связаны с введенным выше определением прецедентной системы.

Рассмотрим множество X всевозможных прецедентов данной предметной области. Очевидно, что в каждый конечный момент времени наше знание о предметной области (т. е. число уже произошедших прецедентов) конечно. Однако это знание постоянно растет, пополняясь новыми прецедентами. Таким образом, естественно предположить, что множество X счетно. При этом достаточно рассматривать только конечные подмножества множества X как формализацию нашего знания о предметной области в разные моменты времени.

Допустим, что в данный момент времени наше знание о предметной области ограничивается конечным множеством прецедентов $X' \subseteq X$. Пусть $\mathbb{B}$ — конечная булева алгебра такая, что и $At(\mathbb{B}) = X'$. Если $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\tau)$ и предложение φ на модели $\mathfrak{A}_\tau$ имеет значение истинности $b \in |\mathbb{B}|$, то мы полагаем, что во всех прецедентах из множества $At(b)$ предложение φ истинно и во всех прецедентах из множества $At(\mathbb{B}) \setminus At(b)$ предложение φ ложно.

Множество X счетно, поэтому далее, без ограничения общности, будем считать, что $X = \mathbb{N}$. Обозначим

$$K^f \;=\; \{\, \mathfrak{A}_\tau = \langle A, \sigma, \tau\rangle \mid At(\mathbb{B}) \subseteq \mathbb{N} \text{ и } At(\mathbb{B}) \text{ — конечно}\,\}.$$

Сначала рассмотрим произвольные булевозначные модели.

Определение 3. Пусть $\mathfrak{A}$ — булевозначная модель, $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\tau)$. Тогда для каждого атома $b \in At(\mathbb{B})$ определим модель $\mathfrak{A}_b \in K(\sigma, A)$: для любых $P, c_1, \ldots, c_n \in \sigma_A$ положим

$$\mathfrak{A}_b \models P(c_1, \ldots, c_n) \text{ тогда и только тогда, когда } b \leq \tau(P(c_1, \ldots, c_n)). \tag{3}$$

Предложение 1. *Для модели $\mathfrak{A}_b$ из определения* 3 *и произвольного предложения $\varphi \in$ $\in S(\sigma_A)$ выполнено следующее условие:*

$$\mathfrak{A}_b \models \varphi \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad b \leq \tau(\varphi). \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $b \in At(\mathbb{B})$ условие 3 однозначно определяет модель $\mathfrak{A}_b \in$ $\in K(A, \sigma)$. Покажем, что для нее выполнено условие 4.

Индукцией по построению предложений φ и ψ заметим, что

(1) $\mathfrak{A}_b \models (\varphi \,\&\, \psi) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A}_b \models \varphi$ и $\mathfrak{A}_b \models \psi \;\Leftrightarrow\; b \leq \tau(\varphi)$ и $b \leq \tau(\psi) \;\Leftrightarrow\; b \leq \tau(\varphi) \cap \tau(\psi) =$ $= \tau(\varphi \,\&\, \psi)$.

(2) $\mathfrak{A}_b \models (\varphi \vee \psi) \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{A}_b \models \varphi$ или $\mathfrak{A}_b \models \psi \ \Leftrightarrow\ b \leq \tau(\varphi)$ или $b \leq \tau(\psi)$.

Последнее, в силу того, что b — атом, равносильно

$$b \leq \tau(\varphi) \cup \tau(\psi) = \tau(\varphi \vee \psi).$$

(3) $\mathfrak{A}_b \models \neg\varphi \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{A}_b \not\models \varphi \ \Leftrightarrow\ b \not\leq \tau(\varphi)$ что, поскольку b – атом, эквивалентно $b \leq \overline{\tau(\varphi)} = \tau(\neg\varphi)$.

(4) $\mathfrak{A}_b \models (\varphi \to \psi) \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{A}_b \models (\neg\varphi \vee \psi) \ \Leftrightarrow\ b \leq \tau(\neg\varphi \vee \psi) = \overline{\tau(\varphi)} \cup \tau(\psi) = \tau(\varphi \to \psi)$.

(5) $\mathfrak{A}_b \models \forall x \varphi(x) \ \Leftrightarrow$ для любого $a \in A$ выполнено $\mathfrak{A}_b \models \varphi(c_a) \ \Leftrightarrow$ для любого $a \in A$ выполнено $b \leq \tau(\varphi(c_a)) \ \Leftrightarrow\ b \leq \bigcap\limits_{a \in A} \tau(\varphi(c_a)) \ \Leftrightarrow\ b \leq \tau(\forall x \varphi(x))$.

(6) $\mathfrak{A}_b \models \exists x\, \varphi(x) \ \Leftrightarrow$ для некоторого $a \in A$ выполнено $\mathfrak{A}_b \models \varphi(c_a) \ \Leftrightarrow$ для некоторого $a \in A$ выполнено $b \leq \tau(\varphi(c_a)) \ \Leftrightarrow\ b \leq \bigcup\limits_{a \in A} \tau(\varphi(c_a))$ (поскольку b — атом) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ b \leq \tau\,(\exists x\, \varphi(x))$.

В (5) и (6) мы используем то, что $\mathbb{B}$ является полной булевой алгеброй.

Исследуем теперь связь между булевозначными моделями и введенными ранее прецедентными моделями.

Предложение 2. *Пусть $E \subseteq K(\sigma, A)$ и $\mathfrak{A}_E = \langle A, \sigma, \tau_E \rangle$ — прецедентная модель, порожденная множеством E. Тогда $\mathfrak{A}_E = \mathfrak{A}_{\tau_E} = \langle A, \sigma, \tau_E \rangle$ — булевозначная модель с булевой алгеброй $\mathbb{B} = \langle \wp(E); \cup, \cap, -, \varnothing, E \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо проверить, что отображение $\tau_E : S(\sigma_A) \to \wp(E)$ удовлетворяет всем условиям определения 2. Данная проверка проводится непосредственно на основе определения 1.

Предложение 3. *Рассмотрим класс $E \subseteq K(\sigma, A)$ и прецедентную модель $\mathfrak{A}_E = \langle A, \sigma, \tau_E \rangle$, порожденную классом E. Пусть $\mathbb{B} = \langle \wp(E); \cup, \cap, -, \varnothing, E \rangle$. Тогда для любой модели $\mathfrak{A} \in E$ существует такой атом $b \in At(\mathbb{B})$, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_b$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b = \{\mathfrak{A}\}$, значит, $b \in \mathbb{B}$, причем $b \in At(\mathbb{B})$. Тогда по определению 3 для любых $P \in \sigma_A$ и $a_1, \ldots, a_n \in \sigma_A$ выполнено

$$\mathfrak{A}_b \models P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \ \Leftrightarrow\ b \leq \tau_E(P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \{\mathfrak{A}\} \leq \tau_E(P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \mathfrak{A} \in \tau_E(P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})) = \{\mathfrak{B} \in E \mid \mathfrak{B} \models P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})\} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \mathfrak{A} \models P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}), \text{ поскольку } \mathfrak{A} \in E.$$

Теорема 1 (о двойственности). *Пусть $\mathbb{B}$ — полная атомная булева алгебра, $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} = \langle A, \sigma, \tau \rangle$ — булевозначная модель, $E = \{\mathfrak{A}_b \mid b \in At((B)\}$ и $\mathfrak{A}_E$ — прецедентная модель. Тогда $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} \cong \mathfrak{A}_E$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что по нашему соглашению об обозначениях мы считаем, что для любых $a, b \in At(\mathbb{B})$ если $a \neq b$, то $\mathfrak{A}_a \neq \mathfrak{A}_b$. Поэтому $\mathbb{B} \cong \langle \wp(At(\mathbb{B})), \cup, \cap, -, \varnothing, At(\mathbb{B})\rangle \cong \langle \wp(E), \cup, \cap, -, \varnothing, E\rangle$. Пусть $h : \mathbb{B} \to \wp(E)$ — соответствующий изоморфизм, а именно, если $d \in \mathbb{B}$, то $h(d) = \{\mathfrak{A}_b \mid b \in At(d)\}$.

Нам достаточно показать, что для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ выполнено $\tau_E(\varphi) = h(\tau(\varphi))$.

Действительно,

$$\begin{aligned}\tau_E(\varphi) = \{\mathfrak{A}_b \mid \mathfrak{A}_b \in E \text{ и } \mathfrak{A}_b \models \varphi\} &= \\ = \{\mathfrak{A}_b \mid b \in At(\mathbb{B}) \text{ и } b \leq \tau(\varphi)\} &= \\ = \{\mathfrak{A}_b \mid b \in At(\tau(\varphi))\} &= h(\tau(\varphi)).\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Таким образом, операции построения множества $\{\mathfrak{A}_b \mid b \in At(\mathbb{B})\}$ по булевозначной модели $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} = \langle A, \sigma, \tau\rangle$ и построения булевозначной модели $\mathfrak{A}_E$ по множеству $\{\mathfrak{A}_b \mid b \in X = At(\mathbb{B})\}$ являются взаимно обратными.

Далее, при рассмотрении булевозначной модели $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}}$ с атомной булевой алгеброй $\mathbb{B}$, без ограничения общности, будем считать, что $\mathbb{B} = \wp(X)$ и $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} = \mathfrak{A}_E$ для некоторых множеств X и $E = \{\mathfrak{A}_b \mid b \in X\}$.

§ 4. Нечеткие модели

Определение 4. Рассмотрим отображение $\mu : S(\sigma_A) \to [0,1]$. Упорядоченную тройку $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma_A, \mu\rangle$ будем называть *нечеткой моделью*, а отображение μ — истинностной функцией. Считаем, что $|\mathfrak{A}_\mu| = \{c_a^{\mathfrak{A}_\mu} \mid a \in A\}$.

Если $\varphi \in S(\sigma_A)$ и $\mu(\varphi) = c$, то будем обозначать $\mathfrak{A}_\mu \models_c \varphi$. Таким образом, для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ мы имеем $\mathfrak{A}_\mu \models_{\mu(\varphi)} \varphi$.

Заметим, что если образом $\rho\mu$ истинностной функции μ является двухэлементное множество $\{0,1\}$, то данная модель превращается в модель логики предикатов первого порядка. Такие модели в дальнейшем будем называть *классическими моделями.*

Очевидно, что именно описание способа задания истинностной функции определяет структуру данной модели. Каждый такой способ должен отвечать по крайней мере следующим двум условиям: (1) классические модели должны попадать под это описание как частный случай; (2) значения истинности сложных формул должны быть тем или иным способом зависимы от значений истинности подформул, в них входящих.

На сегодняшний день существует два альтернативных способа формализации понятия нечеткости: *функциональные нечеткие логики* и *логики фазификаций булевозначных моделей.*

Для каждой функциональной нечеткой логики (см., например, [7; 16; 17]) истинностное значение формулы является функцией истинностных значений подформул, ее составляющих. Иначе говоря, при задании истинностной функции $\mu : F \to [0,1]$ должны существовать такие функции $n : [0,1] \to [0,1]$ и $f, g : [0,1]^2 \to [0,1]$, что

$$\mu(\neg\varphi) = n(\mu(\varphi));$$

$$\begin{aligned} \mu(\varphi \mathbin{\&} \psi) &= f(\mu(\varphi), \mu(\psi)); \\ \mu(\varphi \vee \psi) &= g(\mu(\varphi), \mu(\psi)). \end{aligned} \tag{5}$$

Исторически первая функциональная нечеткая логика была предложена Л. Заде [20]. Для операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции он предложил следующие функции:

$$n(\alpha) = 1 - \alpha, \quad f(\alpha, \beta) = \min\{\alpha, \beta\}, \quad g(\alpha, \beta) = \max\{\alpha, \beta\}.$$

Как мы уже отмечали выше, нетрудно проверить, что для этих функций не выполняются законы исключения третьего и противоречия, т. е. в общем случае $\mu(\varphi \mathbin{\&} \neg\varphi) \neq 0$, $\mu(\varphi \vee \neg\varphi) \neq 1$.

В [3] было доказано, что если предположить, что множество $L = [0, 1]$ образует решетку с inf (функция f) и sup(функция g) и содержит наименьший (0) и наибольший (1) элементы, то нельзя определить операцию дополнения (функция n) так, чтобы данная решетка образовывала булеву алгебру.

Таким образом, если нечеткая модель подчиняется законам той или иной функциональной нечеткой логики, то обязательно существуют такие предложения сигнатуры σ_A, которые тождественно истинны в классической логике и не истинны на данной модели. Заметим, что классические модели этим свойством не обладают и, в данном случае, являются исключением.

При решении многих задач анализа сложных систем в условиях неопределенности широко используются методы теории вероятности и математической статистики. Эти методы предполагают вероятностную интерпретацию обрабатываемых данных и полученных статистических выводов. В последнее время возрастает потребность в новых подходах к математическому описанию информации, характеризующейся высоким уровнем неопределенности. Мы предлагаем один из возможных путей решения этой проблемы.

Определение 5 [18]. Отображение ν называется *мерой* над множеством X, если оно удовлетворяет следующим условиям:

a. $\nu(\varnothing) = 0$.

b. Для $A, B \subseteq X$ если $A \subseteq B$, то $\nu(A) \leq \nu(B)$.

c. Для $A, B \subseteq X$ если $A \cap B = \varnothing$, то $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

Определение 6 [15]. Нечеткую модель $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma_A, \mu \rangle$ назовем *фазификацией булевозначной модели* $\mathfrak{A}_\tau = \langle A, \sigma_A, \tau \rangle \in K^f$ с помощью меры ν (и будем обозначать $Fuz(\nu, \mathfrak{A}_\tau)$), если для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ выполнено

$$\mu(\varphi) = \frac{\nu(\tau(\varphi))}{\nu(At(\mathbb{B}(\tau)))}.$$

Очевидно, что при задании различных мер, мы будем получать различные нечеткие логики. Таким образом, так же как и в случае функциональных логик, существует бесконечное число различных логик фазификации.

Определение 7 [19]. Мера ν над множеством X называется *равномерной*, если $\nu(\{x_i\}) = \nu(\{x_j\})$ для любых $x_i, x_j \in X$.

Таким образом, если мы рассматриваем логику фазификаций, построенную на равномерной мере, то полагаем, что все прецеденты данной предметной области являются равновероятными.

Предложение 4. *Пусть* $\mathfrak{A}_\tau$ *— булевозначная модель и булева алгебра* $\mathbb{B}(\tau)$ *— конечна. Тогда для любой равномерной меры* ν *справедливо следующее равенство:*

$$Fuz(\nu, \mathfrak{A}_\mathbb{B}) = Fuz(\eta, \mathfrak{A}_\mathbb{B}),$$

где η *— естественная мера, т. е. количество элементов конечного множества.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим булевозначную модель $\mathfrak{A}_\mathbb{B}$. Пусть $At(\mathbb{B}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — конечное подмножество множества X и ν — равномерная мера. Тогда (по определению 7) мы получим

$$\nu(At(\mathbb{B})) = \nu(\{x_1\}) + \nu(\{x_2\}) + \ldots + \nu(\{x_n\}) = \|At(\mathbb{B})\| \cdot \nu(\{x_1\}).$$

Пусть $Fuz(\nu, \mathfrak{A}_\mathbb{B}) = \langle A, \sigma_A, \mu\rangle$ и $Fuz(\eta, \mathfrak{A}_\mathbb{B}) = \langle A, \sigma_A, \mu'\rangle$. Тогда для любого предложения $\varphi \in S_A$ имеем

$$\mu(\varphi) = \frac{\nu(\tau(\varphi))}{\nu(At(\mathbb{B}))} = \frac{\|\tau(\varphi)\| \cdot \nu(\{x_1\})}{\|At(\mathbb{B})\| \cdot \nu(\{x_1\})} = \frac{\|\tau(\varphi)\|}{\|At(\mathbb{B})\|} = \mu'(\varphi).$$

Таким образом, производя фазификацию булевозначной модели с помощью равномерной меры, нам нет необходимости указывать конкретную меру, с помощью которой была произведена фазификация. В связи с этим вместо обозначения $Fuz(\nu, \mathfrak{A}_\mathbb{B})$ будем использовать обозначение $Fuz(\mathfrak{A}_\mathbb{B})$ и полагать, что фазификация произведена с помощью естественной меры, т. е. количества элементов.

По аналогии с логикой предикатов первого порядка введем понятия предложения, истинного на модели и тождественно истинного.

Определение 8 [21]. Предложение φ называется *истинным на фазификации* $Fuz(\mathfrak{A}_\mathbb{B}) = \langle A, \sigma_A, \mu\rangle$, если $\mu(\varphi) = 1$.

Предложение называется *тождественно истинным* в логике фазификаций, если оно истинно на любой фазификации.

В [22] была доказана следующая

Теорема 2. *Предложение тождественно истинно в логике фазификаций тогда и только тогда, когда оно тождественно истинно в логике предикатов первого порядка.*

Таким образом, если нечеткая модель является фазификацией некоторой булевозначной модели, то все предложения сигнатуры σ_A, которые тождественно истинны в классической логике, являются истинными и на данной нечеткой модели.

Заметим, что если рассмотреть множество нечетких моделей, подчиняющихся законам функциональных нечетких логик, и множество нечетких моделей, являющихся фазикациями булевозначных моделей, то в пересечении этих множеств будут лежать только классические модели.

§ 5. Обобщенные нечеткие модели

Рассмотрим проблему, сформулированную во введении: *если нам известны нечеткие истинностные значения для предложений* $\varphi \in U$*, где* $U \subseteq S(\sigma_A)$*, как мы можем находить нечеткое истинностное значение любого предложения сигнатуры* σ_A*?*

Функциональные нечеткие логики частично решают данную проблему. Они предлагают алгоритм нахождения нечетких истинностных значений предложений в случае, когда множество U предложений, о которых данная информация уже известна, совпадает с множеством всех атомарных предложений сигнатуры σ_A. Но ни одна из этих логик не может избежать парадоксов (см. Введение), так как не учитывает феномена совместимости/несовместимости предложений.

В настоящей работе предлагается подход, основанный на фазификации булевозначных моделей, который, с одной стороны, лишен парадоксов функциональных нечетких логик, а с другой — дает решение данной проблемы в общем виде.

Основная идея подхода состоит в следующем. Предположим, что истинностное значение некоторого предложения φ сигнатуры σ_A находится в промежутке $(0, 1)$. Это может означать, что нам не известна полная информация о реальной ситуации, породившей это означивание. Иными словами, нам не известно, на каких прецедентах рассматриваемой предметной области данное предложение является истинным, а на каких — ложным. Поэтому мы вынуждены рассматривать все ситуации, в которых данное означивание предложения φ является верным. Таким образом, необходимо рассмотреть класс всех булевозначных моделей, в фазификациях которых предложение φ принимает данное истинностное значение.

Далее мы покажем, что для произвольного предложения φ множество всевозможных истинностных значений является подинтервалом интервала [0,1].

Дадим теперь формальное описание данного подхода.

Определение 9. Рассмотрим множество $U \subseteq S(\sigma_A)$ и отображение $\eta : U \to [0, 1]$. Будем говорить, что нечеткая модель $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma_A, \mu\rangle$ *согласуется с означиванием* η (и обозначать $\mathfrak{A} \upharpoonright \eta$), если $\mu(\varphi) = \eta(\varphi)$, т. е. $\mathfrak{A} \models_{\eta(\varphi)} \varphi$, для любого предложения $\varphi \in U$.

Определение 10. Рассмотрим множество $U \subseteq S(\sigma_A)$ и отображение $\eta : U \to [0, 1]$. Будем говорить, что булевозначная модель $\mathfrak{A}_\tau \in K^f$ *согласуется с означиванием* η (и обозначать $\mathfrak{A}_\tau \upharpoonright \eta$), если $Fuz(\mathfrak{A}_\tau) \upharpoonright \eta$.

Введем следующее обозначение:

$$\mathbb{K}(\eta) \rightleftharpoons \{\mathfrak{A}_\tau \in K^f \mid \mathfrak{A}_\tau \upharpoonright \eta\}.$$

Определение 11. Пусть $U \subseteq S(\sigma_A)$. Означивание $\eta : U \to [0, 1]$ является *реализуемым*, если $\mathbb{K}(\eta) \neq \varnothing$.

Выше мы ввели понятие фазификации булевозначной модели. По булевозначной модели мы определяли нечеткую модель. Но, как мы заметили выше, означиванию некоторого множества предложений может соответствовать не одна, а несколько булевозначных моделей. Чтобы корректно работать с такой ситуацией, нам потребуется понятие *обобщенной нечеткой модели* — фазификации набора булевозначных моделей (вместо одной).

Определение 12. Пусть $K \subseteq K^f$ — некоторый класс булевозначных моделей. Определим отображение $\xi_K : S(\sigma_A) \to \wp([0,1])$ следующим образом: для $\varphi \in S(\sigma_A)$ положим

$$\xi_K(\varphi) = \{q \mid \exists \mathbb{B} \in K : Fuz(\mathbb{B}) \models_q \varphi\}.$$

Модель $\mathfrak{A}_K = \langle A, \sigma, \xi_K \rangle$ назовем *обобщенной нечеткой моделью* (порожденной классом K).

Определение 13. Рассмотрим множество $U \subseteq S(\sigma_A)$ и реализуемое означивание $\eta : U \to [0,1]$, т. е. $\mathbb{K}(\eta) \neq \varnothing$. Модель $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}(\eta)} = \langle A, \sigma_A, \xi_{\mathbb{K}(\eta)} \rangle$ назовем обобщенной нечеткой моделью, порожденной нечетким означиванием η.

Напомним, что мы рассматриваем только конечные подмножества множества всевозможных прецедентов данной предметной области и, соответственно, булевозначные модели с конечной булевой алгеброй. Следовательно, для любого предложения φ и для любой рассматриваемой фазификации $Fuz(\mathfrak{A}_\tau)$ означивание предложения φ на фазификации $Fuz(\mathfrak{A}_\tau)$ есть рациональное число из интервала $[0,1]$. Более того, если $\|At(\mathbb{B})\| = n$, тогда множество всевозможных истинностных значений модели $Fuz(\mathfrak{A}_\tau)$ есть $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Таким образом, переходя к обобщенным нечетким моделям, мы будем рассматривать подмножества рациональных чисел из интервала $[0,1]$.

В [15] была доказана

Теорема 3. *Рассмотрим множество $U \subseteq S(\sigma_A)$, непротиворечивое означивание* $\eta : U \to$ $\to [0,1]$ *и обобщенную нечеткую модель $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}(\eta)} = \langle A, \sigma, \xi_{\mathbb{K}(\eta)} \rangle$. Тогда для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ множество $\xi_{\mathbb{K}(\eta)}(\varphi)$ является интервалом рациональных чисел.*

§ 6. Интервальные означивания

Как мы заметили в предыдущем параграфе, если мы рассматриваем нечеткое означивание некоторого множества предложений, то нечеткие значения истинности оставшихся предложений *«пробегают»* интервалы — для каждого предложения свой интервал. Поэтому рассмотрим более общую постановку задачи — нам изначально известны не *«точные»* нечеткие значения истинности предложений, а интервальные значения — интервалы нечетких значений.

Определение 14. Пусть $U \subseteq S(\sigma_A)$. Отображение $\alpha : U \to [0,1]^2$ будем называть *интервальным означиванием* предложений множества U.

Пусть $l(\langle x, y \rangle) = x$ и $r(\langle x, y \rangle) = y$.

Определение 15. Рассмотрим множество $U \subseteq S(\sigma_A)$ и определенное на нем интервальное означивание α. Будем говорить, что нечеткая модель $\mathfrak{A}_\mu$ *согласуется с означиванием* α (и обозначать $\mathfrak{A}_\mu \uparrow \alpha$), если для любого предложения $\varphi \in U$ мы имеем $\mathfrak{A}_\mu \models_q \varphi$, то $l(\alpha(\varphi)) \leq q \leq r(\alpha(\varphi))$.

Определение 16. Рассмотрим множество $U \subseteq S(\sigma_A)$ и определенное на нем интервальное означивание α. Будем говорить, что булевозначная модель $\mathfrak{A}_\tau \in K^f$ *согласуется с означиванием* α (и обозначать $\mathfrak{A}_\tau \uparrow \alpha$), если $Fuz(\mathfrak{A}_\tau) \uparrow \alpha$.

Обозначим

$$\mathbb{K}(\alpha) \rightleftharpoons \{\mathfrak{A}_\tau \in K^f \mid \mathfrak{A}_\tau \uparrow \alpha\}.$$

Определение 17. Пусть $U \subseteq S(\sigma_A)$. Интервальное означивание α является *реализуемым*, если $\mathbb{K}(\alpha) \neq \varnothing$.

Определение 18. Рассмотрим множество $U \subseteq S(\sigma_A)$ и определенное на нем, реализуемое интервальное означивание α. Обобщенную нечеткую модель $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_{\mathbb{K}(\alpha)}$ назовем обобщенной нечеткой моделью, порожденной интервальным означиванием α.

Понятие обобщенной нечеткой модели $\mathfrak{A}_\eta$, порожденной нечетким означиванием η (определение 13), является частным случаем понятия обобщенной нечеткой модели $\mathfrak{A}_\alpha$, порожденной интервальным означиванием α (определение 18). Действительно, если у означивания α все интервалы являются одноэлементными, то для него определения 13 и 18 совпадают.

Обобщением теоремы 3 на случай интервальных означиваний является следующая

Теорема 4. *Рассмотрим множество $U \subseteq S(\sigma_A)$ и реализуемое интервальное означивание α. Пусть $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_{\mathbb{K}(\alpha)} = \langle A, \sigma_A, \xi_{\mathbb{K}(\alpha)}\rangle$ — обобщенная нечеткая модель, порожденная означиванием α. Тогда для произвольного предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ множество $\xi_{\mathbb{K}(\alpha)}(\varphi)$ является интервалом рациональных чисел.*

Для доказательства рассмотрим понятие произведения булевозначных моделей. Следующее определение является обобщением определения 10 из [15].

Определение 19. Рассмотрим булевозначные модели $\mathfrak{A}_{\tau_1} = \langle A, \sigma_A, \tau_1\rangle$ и $\mathfrak{A}_{\tau_2} = \langle A, \sigma_A, \tau_2\rangle$. Модель $\mathfrak{A}_\tau = \langle A, \sigma, \tau\rangle$ назовем произведением моделей $\mathfrak{A}_{\tau_1}$ и $\mathfrak{A}_{\tau_2}$ и обозначим $\mathfrak{A}_\tau = \mathfrak{A}_{\tau_1} * \mathfrak{A}_{\tau_2}$ если $\mathbb{B}(\tau) = \mathbb{B}(\tau_1) \times \mathbb{B}(\tau_2)$, $\tau : S(\sigma_A) \to \mathbb{B}(\tau)$ и для любого $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\tau(\varphi) = (\tau_1(\varphi), \tau_2(\varphi))$.

Предложение 5. $\mathfrak{A}_\tau = \mathfrak{A}_{\tau_1} * \mathfrak{A}_{\tau_2}$ *— булевозначная модель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi, \psi \in S(\sigma_A)$. Тогда

(1) $\tau(\neg\varphi) = (\tau_1(\neg\varphi), \tau_2(\neg\varphi)) = (\overline{\tau_1(\varphi)}, \overline{\tau_2(\varphi)}) = (\overline{\tau_1(\varphi), \tau_2(\varphi)}) = \overline{\tau(\varphi)}$.

(2) $\tau(\varphi\vee\psi) = (\tau_1(\varphi\vee\psi), \tau_2(\varphi\vee\psi)) = ((\tau_1(\varphi)\cup\tau_1(\psi)), (\tau_2(\varphi)\cup\tau_2(\psi))) = (\tau_1(\varphi), \tau_2(\varphi)) \cup$
$\cup (\tau_1(\psi), \tau_2(\psi)) = \tau(\varphi) \cup \tau(\psi)$.

(3) $\tau(\varphi\&\psi) = (\tau_1(\varphi\&\psi), \tau_2(\varphi\&\psi)) = ((\tau_1(\varphi)\cap\tau_1(\psi)), (\tau_2(\varphi)\cap\tau_2(\psi))) = (\tau_1(\varphi), \tau_2(\varphi)) \cap$
$\cap (\tau_1(\psi), \tau_2(\psi)) = \tau(\varphi) \cap \tau(\psi)$.

(4) $\tau(\varphi \to \psi) = \tau(\neg\varphi \vee \psi) = \tau(\neg\varphi) \cup \tau(\psi) = \overline{\tau(\varphi)} \cup \tau(\psi)$.

(5) $\tau(\forall x\varphi(x)) = (\tau_1(\forall x\varphi(x)), \tau_2(\forall x\varphi(x))) = (\bigcap\limits_{a\in A} \tau_1(c_a), \bigcap\limits_{a\in A} \tau_2(c_a)) =$
$= \bigcap\limits_{a\in A} (\tau_1(c_a), \tau_2(c_a)) = \bigcap\limits_{a\in A} \tau(c_a)$.

(6) $\tau(\exists x\varphi(x)) = (\tau_1(\exists x\varphi(x)), \tau_2(\exists x\varphi(x))) = (\bigcup\limits_{a\in A}\tau_1(c_a), \bigcup\limits_{a\in A}\tau_2(c_a)) =$
$= \bigcup\limits_{a\in A}(\tau_1(c_a), \tau_2(c_a)) = \bigcup\limits_{a\in A}\tau(c_a)$.

Определение 20. Пусть $\mathfrak{A}_\tau$ — булевозначная модель. Тогда под квадратом $\mathfrak{A}_\tau * \mathfrak{A}_\tau$ мы понимаем $\mathfrak{A}_\tau * \mathfrak{A}_{\tau_1}$, где $\mathfrak{A}_{\tau_1}$ — изоморфная копия булевозначной модели $\mathfrak{A}_\tau$ с $\mathbb{B}(\tau_1) \cap \cap \mathbb{B}(\tau) = \varnothing$.

Замечание 1. Операция $*$ на булевозначных моделях коммутативна и ассоциативна.

Как мы отмечали выше, если $\mathbb{B}$ — полная атомная булева алгебра (в частности, конечная булева алгебра) и $X = At(\mathbb{B})$, то $\mathbb{B} \cong \wp(X)$. Без ограничения общности будем считать, что в этом случае $\mathbb{B} = \wp(X)$.

Замечание 2. Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — полные атомные булевы алгебры (в частности, конечные), пусть $\mathbb{B}_1 = \wp(X_1)$, $\mathbb{B}_2 = \wp(X_2)$ и $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Тогда $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 \cong \wp(X_1 \cup X_2)$ при естественном изоморфизме h: для $Y_1 \subseteq X_1$ и $Y_2 \subseteq X_2$ имеем $h(Y_1, Y_2) = Y_1 \cup Y_2$.

Поэтому, без ограничения общности, для атомных булевых алгебр $\mathbb{B}_1 = \wp(X_1)$ и $\mathbb{B}_2 = \wp(X_2)$ будем считать, что $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 = \wp(X_1 \cup X_2)$ и $X_1 \cap X_2 = \varnothing$.

Исходя из таких договоренностей об обозначениях для булевозначных моделей $\mathfrak{A}_{\tau_1} = \langle A, \sigma_A, \tau_1\rangle$ и $\mathfrak{A}_{\tau_2} = \langle A, \sigma_A, \tau_2\rangle$ с булевыми алгебрами $\mathbb{B}_1(\tau_1) = \wp(X_1)$ и $\mathbb{B}_2(\tau_2) = \wp(X_2)$ будем считать, что у модели $\mathfrak{A}_\tau = \mathfrak{A}_{\tau_1} * \mathfrak{A}_{\tau_2}$ истинностная функция $\tau : S(\sigma_A) \to \wp(X_1 \cup X_2)$ определена следующим образом: если $\varphi \in S(\sigma_A)$, то $\tau(\varphi) = \tau_1(\varphi) \cup \tau_2(\varphi)$.

Это имеет место, в частности, для булевозначных моделей с конечными булевыми алгебрами.

Предложение 6. *Рассмотрим булевозначные модели* $\mathfrak{A}_\tau, \mathfrak{A}_{\tau_1}, \mathfrak{A}_{\tau_2}$ *такие, что* $\mathfrak{A}_\tau = \mathfrak{A}_{\tau_1} * \mathfrak{A}_{\tau_2}$. *Пусть* $\mathfrak{A}_\mu = Fuz(\mathfrak{A}_\tau)$, $\mathfrak{A}_{\mu_1} = Fuz(\mathfrak{A}_{\tau_1})$, $\mathfrak{A}_{\mu_2} = Fuz(\mathfrak{A}_{\tau_2})$ *и множества* $At(\mathbb{B}(\tau_1))$, $At(\mathbb{B}(\tau_2))$ *— конечны. Тогда для любого предложения* $\varphi \in S(\sigma_A)$

$$\mu(\varphi) = \frac{\mu_1(\varphi)\cdot\|At(\mathbb{B}(\tau_1))\| + \mu_2(\varphi)\cdot\|At(\mathbb{B}(\tau_2))\|}{\|At(\mathbb{B}(\tau_1))\| + \|At(\mathbb{B}(\tau_2))\|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\|At(\mathbb{B}(\tau_1))\| = m$ и $\|At(\mathbb{B}(\tau_2))\| = n$. Тогда $At(\mathbb{B}(\tau)) = At(\mathbb{B}(\tau_1)) \cup At(\mathbb{B}(\tau_2))$, $At(\mathbb{B}(\tau_1)) \cap At(\mathbb{B}(\tau_2)) = \varnothing$ и, следовательно $\|At(\mathbb{B}(\tau))\| = m+n$.

Пусть $\mathfrak{A}_{\tau_1} = \langle A, \sigma, \tau_1\rangle, \mathfrak{A}_{\tau_2} = \langle A, \sigma, \tau_2\rangle$ и $\mathfrak{A}_\tau = \langle A, \sigma, \tau\rangle$. Тогда для $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем

$$\tau(\varphi) = \tau_1(\varphi) \cup \tau_2(\varphi)$$

и

$$\mu_1(\varphi) = \frac{\|\tau_1(\varphi)\|}{m}, \quad \mu_2(\varphi) = \frac{\|\tau_2(\varphi)\|}{n}, \quad \mu(\varphi) = \frac{\|\tau(\varphi)\|}{m+n}.$$

Поэтому

$$\mu(\varphi) = \frac{\|\tau(\varphi)\|}{m+n} = \frac{\|\tau_1(\varphi)\cup\tau_2(\varphi)\|}{m+n} = \frac{\|\tau_1(\varphi)\| + \|\tau_2(\varphi)\|}{m+n} =$$
$$= \frac{m\cdot\mu_1(\varphi) + n\cdot\mu_2(\varphi)}{m+n} = \frac{\mu_1(\varphi)\cdot\|At(\mathbb{B}(\tau_1))\| + \mu_2(\varphi)\cdot\|At(\mathbb{B}(\tau_2))\|}{\|At(\mathbb{B}(\tau_1))\| + \|At(\mathbb{B}(\tau_2))\|}.$$

Предложение доказано.

Следствие 1. *Рассмотрим булевозначные модели с конечными булевыми алгебрами* $\mathfrak{A}_\tau, \mathfrak{A}_{\tau_1}, \mathfrak{A}_{\tau_2}$ *такие, что* $\mathfrak{A}_\tau = \mathfrak{A}_{\tau_1} * \mathfrak{A}_{\tau_2}$. *Пусть* $\mathfrak{A}_\mu = Fuz(\mathfrak{A}_\tau)$, $\mathfrak{A}_{\mu_1} = Fuz(\mathfrak{A}_{\tau_1})$, $\mathfrak{A}_{\mu_2} = Fuz(\mathfrak{A}_{\tau_2})$. *Тогда для произвольного предложения* $\varphi \in S(\sigma_A)$

$$\text{если } \mu_1(\varphi) \le \mu_2(\varphi), \text{ то } \mu_1(\varphi) \le \mu(\varphi) \le \mu_2(\varphi).$$

Следствие 2. *Пусть* $U \subseteq S(\sigma_A)$ *и* $\alpha : U \to [0,1]^2$ *— реализуемое интервальное означивание. Тогда для произвольных булевозначных моделей* $\mathfrak{A}_{\tau_1}$ *и* $\mathfrak{A}_{\tau_2}$ *если* $\mathfrak{A}_{\tau_1} \uparrow \alpha$ *и* $\mathfrak{A}_{\tau_2} \uparrow \alpha$, *то* $(\mathfrak{A}_{\tau_1} * \mathfrak{A}_{\tau_2}) \uparrow \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in S(\sigma_A)$. Нам нужно доказать, что если $q_1, q_2 \in \xi_{\mathbb{K}(\alpha)}(\varphi)$ и $q_1 < q_2$, то для любого $q_3 \in \mathbb{Q}$ такого, что $q_1 < q_3 < q_2$, имеем $q_3 \in \xi_{\mathbb{K}(\alpha)}(\varphi)$.

Пусть $q_1, q_2 \in \xi_{\mathbb{K}(\alpha)}(\varphi)$ и $q_1 < q_2$. Следовательно, существуют такие булевозначные модели $\mathfrak{A}_{\tau_1}, \mathfrak{A}_{\tau_2} \in \mathbb{K}(\alpha)$, что

$$Fuz(\mathfrak{A}_{\tau_1}) \models_{q_1} \varphi, \quad Fuz(\mathfrak{A}_{\tau_2}) \models_{q_2} \varphi.$$

Пусть $q_1 = \frac{p_1}{l_1}$, $q_2 = \frac{p_2}{l_2}$, $q_3 = \frac{p}{l}$ и $At(\mathbb{B}(\tau_1)) = n$, $At(\mathbb{B}(\tau_2)) = m$.

Пусть $j \rightleftharpoons (pl_1l_2 - p_1ll_2)m$, $i \rightleftharpoons (p_2ll_1 - pl_1l_2)n$. Определим модель

$$\mathfrak{A}_\tau \rightleftharpoons \underbrace{\mathfrak{A}_{\tau_1} * \ldots * \mathfrak{A}_{\tau_1}}_{i \text{ раз}} * \underbrace{\mathfrak{A}_{\tau_2} * \ldots * \mathfrak{A}_{\tau_2}}_{j \text{ раз}}.$$

В силу следствия 2 мы имеем $\mathfrak{A}_\tau \in \mathbb{K}(\alpha)$. Покажем, что

$$Fuz(\mathfrak{A}_\tau) \models_{q_3} \varphi.$$

Пусть $\mathfrak{A}_\mu = Fuz(\mathfrak{A}_\tau), \mathfrak{A}_{\mu_1} = Fuz(\mathfrak{A}_{\tau_1})$ и $\mathfrak{A}_{\mu_2} = Fuz(\mathfrak{A}_{\tau_2})$. Тогда, необходимое число раз применив предложение 6, получим

$$\mu(\varphi) = \frac{\mu_1(\varphi) \cdot \|At(\mathbb{B}(\tau_1))\| \cdot i + \mu_2(\varphi) \cdot \|At(\mathbb{B}(\tau_2))\| \cdot j}{i \cdot \|At(\mathbb{B}(\tau_1))\| + j \cdot \|At(\mathbb{B}(\tau_2))\|} =$$
$$= \frac{\frac{p_1}{l_1} \cdot m \cdot (p_2ll_1 - pl_1l_2) \cdot n + \frac{p_2}{l_2} \cdot n \cdot (pl_1l_2 - p_1ll_2) \cdot m}{(p_2ll_1 - pl_1l_2) \cdot n + (pl_1l_2 - p_1ll_2) \cdot m} = \frac{p}{l} = q_3.$$

Таким образом, $\mu(\varphi) = q_3$.

Теорема доказана. □

Список литературы

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy Sets in Inform. and Control., 1965. Vol. 8. P. 338–353.

2. *Zadeh L. A.* Fuzzy Logic Technology and Applications // IEEE Technical Activities Board, 1994.

3. *Fuzzy* Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy System: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh / Eds. G. J. Klir, B. Yuan. World Scientific Singapore, 1996.

4. *Nguyen H. T., Walker A.* First Course in Fuzzy Logic. CRC Press, 1999.

5. *Novak V.* Fuzzy Sets and Their Applications. Bristol: Adam Hilger, 1989.

6. *Zimmermann H.-J.* Fuzzy Set Theory and Its Applications. 2nd ed. Kluwer, 1991.

7. *Hajek P.* Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer, 1998.

8. *Novak V., Perfilieva I., Mockor J.* Mathematical Principles of Fuzzy Logic. Kluwer, 2000.

9. *Turunen E.* Mathematics Behind Fuzzy Logic. Physica Verlag, 1999.

10. *Добрица В. П., Яхъяева Г. Э.* О группах с нечеткими операциями // Вычислительные системы. Новосибирск, 1999. Т. 165. С. 127–138.

11. *Bernhard G., Rudolf W.* Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations. Springer-Verlag.

12. *Пальчунов Д. Е.* Моделирование мышления и формализация рефлексии. Ч. 1. Теоретико-модельная формализация онтологии и рефлексии // Философия науки. 2006. Т. 4. С. 86–114.

13. *Пальчунов Д. Е.* Решение задач поиска информации на основе онтологий // Бизнес-информатика. 2008. Т. 1. С. 3–13.

14. *Карнап Р.* Философские основания физики. М.: Прогресс, 1971.

15. *Palchunov D. E., Yakhyaeva G. E.* Interval Fuzzy Algebraic Systems // Proc. of the Asian Logic Conf. 2005. World Scientific Publishers, 2006. P. 23–37.

16. *Батыршин И. З.* Основные операции нечеткой логики и их обобщения. Казань: Отечество, 2001.

17. *Нечеткие* множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука, 1986.

18. *Loo S. C.* Measures of Fuzziness. Cybernetica, 1977. Vol. 3. P. 201–207.

19. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной (введение в теорию интеграла). М.: Наука, 1973.

20. *Zadeh L. A.* Fuzzy Logic and Approximate Reasoning // Synthese. 1975. Vol. 30. P. 407–428.

21. *Yahkyaeva G. E.* Fuzzy Model Truth Values // Proc. of the 6^{th} Int. Conf. Aplimat, February 6–9, 2007. Bratislava, Slovak Republic. P. 423–431.

22. *Яхъяева Г. Э.* Теоретико-модельный подход к нечеткой логике // Альманах современной науки и образования. Тамбов, 2008. Т. 12 (19). С. 252–255.

Материал поступил в редколлегию 19.12.2009

Адреса авторов

ПАЛЬЧУНОВ Дмитрий Евгеньевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: palch@math.nsc.ru

ЯХЪЯЕВА Гульнара Эркиновна
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: gul_nara@mail.ru