УДК 517.946

А. И. Кожанов, Н. С. Попов

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

Для псевдопараболических уравнений

$$u_t - a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u - u_{xxt} = f(x,t)$$

изучается разрешимость краевых задач, сочетающих задачи с нелокальными условиями А. А. Самарского и задачи с интегральными условиями. Для рассматриваемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Ключевые слова: псевдопараболические уравнения, нелокальная краевая задача, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

Настоящая работа представляет собой исследование разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для одномерных линейных псевдопараболических уравнений с граничным условием, представляющим собой комбинацию нелокальных граничных условий А. А. Самарского с переменными коэффициентами и граничных условий интегрального вида. Подобные нелокальные задачи для псевдопараболических уравнений ранее изучались лишь в частных случаях (см.: [1; 2]). Используемые методы основаны на переходе от задачи для «хорошего» уравнения с «плохими» граничными условиями к задаче с «хорошими» граничными условиями, но для «плохого» уравнения — так называемого нагруженного [3; 4] уравнения, доказательстве разрешимости полученной задачи с помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок, и далее — к построению решения исходной задачи. Ранее подобные методы в близкой ситуации эффективно использовались в работах [5; 6].

§ 1. Постановка задач

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $a(x,t)$, $c(x,t)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$, $f(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Краевая задача I: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$Lu \equiv u_t - a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u - u_{xxt} = f(x,t) \qquad (1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00422а) и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала» (проект № АХ-23/11 пр. от 12 декабря 2008 г.).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 46–62
© А. И. Кожанов, Н. С. Попов, 2010

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0)=0, \quad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u_x(0,t)=\alpha_1(t)u(0,t)+\alpha_2(t)u(1,t)+\int\limits_0^1 K_1(x)u(x,t)\,dx, \quad 0<t<T, \tag{3}$$

$$u_x(1,t)=\beta_1(t)u(0,t)+\beta_2(t)u(1,t)+\int\limits_0^1 K_2(x)u(x,t)\,dx, \quad 0<t<T. \tag{4}$$

Краевая задача II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условия*

$$u_x(0,t)=\alpha_1(t)u(0,t)+\alpha_2(t)u_x(1,t)+\int\limits_0^1 K_1(x)u(x,t)\,dx, \quad 0<t<T, \tag{5}$$

$$u(1,t)=\beta_1(t)u(0,t)+\beta_2(t)u_x(1,t)+\int\limits_0^1 K_2(x)u(x,t)\,dx, \quad 0<t<T. \tag{6}$$

Краевая задача III: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условия*

$$u(0,t)=\alpha_1(t)u_x(0,t)+\alpha_2(t)u_x(1,t)+\int\limits_0^1 K_1(x)u(x,t)\,dx, \quad 0<t<T, \tag{7}$$

$$u(1,t)=\beta_1(t)u_x(0,t)+\beta_2(t)u_x(1,t)+\int\limits_0^1 K_2(x)u(x,t)\,dx, \quad 0<t<T. \tag{8}$$

Уточним, что в рассматриваемых задачах предполагается, что функция $\alpha_1(t)\beta_2(t)-\alpha_2(t)\beta_1(t)$ может обращаться в нуль (в том числе и тождественно) на отрезке $[0,T]$.

§ 2. Разрешимость краевой задачи I

Пусть V есть пространство

$$V=\{v(x,t):\ v(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)),\ v_t(x,t)\in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)),$$
$$v_{xxt}(x,t)\in L_2(Q)\};$$

норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_V=\|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))}+\|v_t\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\|v_{xxt}\|_{L_2(Q)}.$$

Осуществим некоторые формальные построения, предполагая выполненными необходимые условия гладкости (в точном виде эти условия будут указаны ниже).

Определим функцию $\Delta_1(t)$:

$$\Delta_1(t)=\alpha_2(t)+\beta_2(t)-2;$$

будем считать, что выполняется условие

$$\Delta_1(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

Далее положим

$$\gamma_0(t) = \frac{1-\beta_2(t)}{\Delta_1(t)}, \quad \gamma_1(t) = \frac{\beta_2(t)-2}{\Delta_1(t)},$$

$$\delta_0(t) = \frac{\alpha_2(t)-1}{\Delta_1(t)}, \quad \delta_1(t) = -\frac{\alpha_2(t)}{\Delta_1(t)},$$

$$N_1(x,t) = \gamma_0(t)K_1(x) + \delta_0(t)K_2(x),$$

$$N_2(x,t) = \gamma_1(t)K_1(x) + \delta_1(t)K_2(x),$$

$$K(x,y,t) = x^2 N_1(y,t) + xN_2(y,t).$$

Определим оператор B:

$$(Bu)(x,t) = u(x,t) - \int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)\,dy;$$

для удобства действие оператора B на функции $u(x,t)$ будем обозначать также $\overline{u}(x,t)$. Поскольку оператор B есть интегральный оператор Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром, то нетрудно указать условия его обратимости (обратимость оператора B ниже понадобится). Положим

$$z_1(t) = 1 - \int\limits_\Omega x^2 N_1(x,t)\,dx, \quad z_2(t) = -\int\limits_\Omega xN_1(x,t)\,dx,$$

$$s_1(t) = -\int\limits_\Omega x^2 N_2(x,t)\,dx, \quad s_2(t) = 1 - \int\limits_\Omega xN_2(x,t)\,dx,$$

$$\Delta_{11}(t) = z_1(t)s_2(t) - z_2(t)s_1(t),$$

$$K_0(x,y,t) = \frac{1}{\Delta_{11}(t)}\{[x^2 s_2(t) - xs_1(t)]N_1(y,t) - [x^2 z_2(t) - xz_1(t)]N_2(y,t)\}.$$

При выполнении условия

$$\Delta_{11}(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T] \tag{10}$$

справедливо равенство

$$u(x,t) = \overline{u}(x,t) + \int\limits_\Omega K_0(x,y,t)\overline{u}(y,t)\,dy,$$

которое и определяет обратный оператор B^{-1}.

Определим функцию $\Phi(x,t,u)$ $(u = u(x,t))$:

$$\Phi(x,t,u) = \int\limits_\Omega K_{xx}(x,y,t)u_t(y,t)\,dy -$$

$$-\int\limits_\Omega K(x,y,t)u_{yyt}(y,t)\,dy - \int\limits_\Omega a(x,t)K(x,y,t)u_{yy}(y,t)\,dy +$$

$$+\int\limits_{\Omega}\{a(x,t)K_{xx}(x,y,t)-K_t(x,y,t)+K_{xxt}(x,y,t)-$$

$$-c(x,t)K(x,y,t)+c(y,t)K(x,y,t)\}u(y,t)\,dy.$$

Пусть $g(x,t)$ есть функция $\overline{f}(x,t)$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$Lv-\Phi(x,t,B^{-1}v)=g(x,t) \tag{11}$$

и такую, что для нее выполняется условие (2), *а также условие*

$$v_x(0,t)=\alpha_1(t)v(0,t)+\alpha_2(t)v(1,t),\quad 0<t<T, \tag{12}$$

$$v_x(1,t)=\beta_1(t)v(0,t)+\beta_2(t)v(1,t),\quad 0<t<T. \tag{13}$$

Утверждение 1. *Пусть выполняются условия* (9) *и* (10). *Тогда если функция $v(x,t)$ является решением из пространства V краевой задачи* (11), (2), (12), (13), *то функция $u=B^{-1}v$ будет решением из пространства V краевой задачи I.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что из принадлежности функции $v(x,t)$ пространству V вытекает принадлежность функции $u(x,t)$ тому же пространству, и наоборот. Далее, выполнение условий (2)–(4) очевидно. Имеет место равенство

$$B(Lu-f)=0.$$

Из этого равенства и из условия (10), дающего однозначную обратимость оператора B, и следует, что функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1).

Утверждение доказано.

Из утверждения 1 очевидным образом следует, что для доказательства разрешимости в пространстве V краевой задачи I достаточно установить разрешимость в том же пространстве краевой задачи (11), (2), (12), (13).

Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Положим

$$a_i(x,t,\lambda)=\frac{\lambda x^2}{2}[\beta_i(t)-\alpha_i(t)]+\lambda x\alpha_i(t),\quad i=1,2,$$

$$b_1(x,t,\lambda)=a_1(x,t,\lambda)+\frac{a_2(x,t,\lambda)a_1(1,t,\lambda)}{1-a_2(1,t,\lambda)},$$

$$b_2(x,t,\lambda)=\frac{a_2(x,t,\lambda)}{1-a_2(1,t,\lambda)},$$

$$A_i(x,t,\lambda)=b_{ixx}(x,t,\lambda)-b_i(x,t,\lambda),\quad B_i(x,t,\lambda)=b_{ixxt}(x,t,\lambda)+$$

$$+a(x,t)b_{ixx}(x,t,\lambda)-c(x,t)b_i(x,t,\lambda)-b_{it}(x,t,\lambda),\quad i=1,2,$$

$$F(x,t,\lambda,\xi)=A_1(x,t,\lambda)\xi_1+A_2(x,t,\lambda)\xi_2+B_1(x,t,\lambda)\xi_3+B_2(x,t,\lambda)\xi_4,$$

$$\overline{w}(t)=(w_t(0,t),w_t(1,t),w(0,t),w(1,t)).$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условие* (9), *а также условия*

$$K_1(x) \equiv K_2(x) \equiv 0 \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{14}$$

$$a(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x,t) \in C^1(\overline{Q}); \tag{15}$$

$$\alpha_i(t) \in C^1([0,T]), \quad \beta_i(t) \in C^1([0,T]), \quad i = 1,2; \tag{16}$$

$$c(x,t) \geq c_0 > 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \overline{Q}; \tag{17}$$

$$\begin{gathered} [1 + 8\alpha_1(t)]\xi_1^2 + 8[\alpha_2(t) - \beta_1(t)]\xi_1\xi_2 + [1 - 8\beta_2(t)]\xi_2^2 \geq 0 \\ \textit{при} \quad t \in [0,T], \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \end{gathered} \tag{18}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q). \tag{19}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$, *принадлежащая пространству* V, *являющаяся в прямоугольнике* Q *решением уравнения* (1) *и такая, что для нее выполняются условия* (2), (12) *и* (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию* $w(x,t)$, *являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения*

$$L(\lambda)w \equiv w_t - aw_{xx} + cw - w_{xxt} - F(x,t,\lambda,\overline{w}) = f \tag{20}$$

и такую, что для нее выполняются условие (2), *а также условия*

$$w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{21}$$

Согласно теореме о методе продолжения по параметру [7], для того, чтобы эта задача была разрешима в пространстве V при всех λ из отрезка $[0,1]$ и любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$, достаточно установить

1) *непрерывность семейства операторов* $\{L(\lambda)\}$ *по* λ;

2) *разрешимость в пространстве* V *краевой задачи* (20), (2), (21) при $\lambda = 0$;

3) *наличие в пространстве* V *равномерной по* λ *априорной оценки всевозможных решений* $w(x,t)$ *краевой задачи* (20), (2), (21).

Непрерывность по λ семейства операторов $\{L(\lambda)\}$ очевидна. Далее, разрешимость в пространстве V краевой задачи (20), (2), (21) при $\lambda = 0$, при выполнении условий (15), (17) и (19) известна (см.: [8; 9]). Покажем, что для всевозможных решений $w(x,t)$ краевой задачи (20), (2), (21) имеет место равномерная по λ априорная оценка в пространстве V.

Пусть $w(x,t)$ есть решение из пространства V краевой задачи (20), (2), (21). Положим

$$u(x,t) = w(x,t) + b_1(x,t,\lambda)w(0,t) + b_2(x,t,\lambda)w(1,t).$$

Используя элементарные неравенства

$$\begin{aligned} &\int_0^t v^2(0,\tau)\,d\tau \leq \int_0^t \int_\Omega v_x^2(x,\tau)\,dx\,d\tau + 2\int_0^t \int_\Omega v^2(x,\tau)\,dx\,d\tau, \\ &\int_0^t v^2(1,\tau)\,d\tau \leq \int_0^t \int_\Omega v_x^2(x,\tau)\,dx\,d\tau + 2\int_0^t \int_\Omega v^2(x,\tau)\,dx\,d\tau, \end{aligned} \tag{22}$$

нетрудно показать, что функция $u(x,t)$ будет принадлежать пространству V. Далее, несложные выкладки показывают, что функция $u(x,t)$ представляет собой решение уравнения

$$u_t - au_{xx} + cu - u_{xxt} = f, \tag{23}$$

для которого выполняются условие (2), а также условия

$$u_x(0,t) = \lambda[\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(1,t)], \quad 0 < t < T, \tag{24}$$

$$u_x(1,t) = \lambda[\beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(1,t)], \quad 0 < t < T. \tag{25}$$

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (u_\tau - u_{xx\tau} + cu)[u_\tau + (x - \frac{1}{2})u_{x\tau} - u_{xx\tau}]\, dx\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (f + au_{xx})[u_\tau + (x - \frac{1}{2})u_{x\tau} - u_{xx\tau}]\, dx\, d\tau, \tag{26}$$

являющееся следствием уравнения (23). Интегрируя по частям и используя условия (2), (24) и (25), нетрудно от данного равенства перейти к следующему:

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[\frac{1}{2}u_\tau^2 + 2u_{x\tau}^2 + u_{xx\tau}^2\right] dx\, d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega c(x,t)[u^2(x,t) + u_x^2(x,t)]\, dx +$$

$$+ \frac{1}{4}\int\limits_0^t \{u_\tau^2(0,\tau) + u_\tau^2(1,\tau) + 8\lambda[\alpha_1(\tau)u_\tau^2(0,\tau) + [\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)]u_\tau(0,\tau)u_\tau(1,\tau) -$$

$$- \beta_2(\tau)u_\tau^2(1,\tau)]\}\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) u_{x\tau}u_{xx\tau} dx\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (f + au_{xx})[u_\tau + (x - \frac{1}{2})u_{x\tau} - u_{xx\tau}]\, dx\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_\Omega c_\tau[u^2 + u_x^2]\, dx\, d\tau - \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (x - \frac{1}{2})cuu_{x\tau}\, dx\, d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_\Omega c_x uu_{x\tau}\, dx\, d\tau - 2\lambda\int\limits_0^t \{u_\tau(0,\tau)[\alpha_1'(\tau)u(0,\tau) + \alpha_2'(\tau)u(1,\tau)] -$$

$$- u_\tau(1,\tau)[\beta_1'(\tau)u(0,\tau) + \beta_2'(\tau)u(1,\tau)]\}\, d\tau + \lambda\int\limits_0^t \{c(1,\tau)u(1,\tau)[\beta_1(\tau)u_\tau(0,\tau) +$$

$$+ \beta_2(\tau)u_\tau(1,\tau) + \beta_1'(\tau)u(0,\tau) + \beta_2'(\tau)u(1,\tau)] -$$

$$- c(0,\tau)u(0,\tau)[\alpha_1(\tau)u_\tau(0,\tau) + \alpha_2(\tau)u_\tau(1,\tau) + \alpha_1'(\tau)u(0,\tau) + \alpha_2'(\tau)u(1,\tau)]\}\, d\tau.$$

Используя далее условия (15)–(18), неравенства (22), неравенство Юнга, а также очевидное неравенство

$$\int_0^1 \int_\Omega u_{xx}^2 \, dx \, dt \le T \int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega u_{xx\xi}^2 \, dx \, d\xi \, d\tau, \tag{27}$$

получаем, что из данного равенства вытекает неравенство

$$\int_0^t \int_\Omega (u_\tau^2 + u_{x\tau}^2 + u_{xx\tau}^2) \, dx \, d\tau + \int_\Omega [u^2(x,t) + u_x^2(x,t)] \, dx \le$$

$$\le \delta \int_0^t \int_\Omega (u_\tau^2 + u_{x\tau}^2 + u_{xx\tau}^2) \, dx \, d\tau +$$

$$+ C_1 \left[\int_0^t \int_\Omega (u^2 + u_x^2) \, dx \, d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega u_{xx\xi}^2 \, dx \, d\xi \, d\tau + \int_0^t \int_\Omega f^2 \, dx \, d\tau \right],$$

в котором δ есть произвольное положительное число, число C_1 определяется функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, β_i, $i = 1, 2$, а также числами T и δ. Подбирая число δ малым и фиксируя, применяя далее лемму Гронуолла, получаем, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (23), (2), (24), (25) выполняется априорная оценка

$$\int_0^t \int_\Omega (u_\tau^2 + u_{x\tau}^2 + u_{xx\tau}^2) \, dx \, d\tau + \int_\Omega [u^2(x,t) + u_x^2(x,t)] \, dx \le M_1$$

с постоянной M_1, определяющейся лишь функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i = 1, 2$, а также числом T. Из данной оценки и неравенства (26) следует очевидная оценка

$$\|u\|_V \le M_2 \tag{28}$$

с постоянной M_2, вновь определяющейся лишь функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i = 1, 2$, а также числом T. Далее, из представления

$$w(x,t) = u(x,t) - a_1(x,t,\lambda)u(0,t) - a_2(x,t,\lambda)u(1,t)$$

и из оценки (28) вытекает, что аналогичная оценка имеет место и для решений $w(x,t)$ краевой задачи (20), (2), (21). Как уже говорилось выше, из этой оценки, из свойства непрерывности по λ семейства операторов $\{L(\lambda)\}$ и из разрешимости в пространстве V краевой задачи (20), (2), (21) при $\lambda = 0$, следует разрешимость в том же пространстве краевой задачи (20), (2), (21) при $\lambda = 1$. Обозначим решение последней задачи $w_1(x,t)$. Очевидно теперь, что функция $u(x,t)$, определенная равенством

$$u(x,t) = w_1(x,t) + b_1(x,t,1)w_1(0,t) + b_2(x,t,1)w_1(1,t),$$

будет искомым решением краевой задачи (1), (2), (12), (13).

Единственность решений очевидна.

Теорема доказана.

Обратимся теперь к общему случаю, т. е. к случаю, соответствующему не тождественно нулевым функциям $K_1(x)$ и $K_2(x)$.

Введем обозначения:

$$k_1 = \max_{(x,t)\in\overline{Q}} \left[\int\limits_Q K_{xx}^2(x,y,t)\,dy \right], \quad k_2 = \max_{(x,t)\in\overline{Q}} \left[\int\limits_Q K^2(x,y,t)\,dy \right],$$

$$k_3 = \max_{(x,t)\in\overline{Q}} \left[\int\limits_Q K_0^2(x,y,t)\,dy \right], \quad k_4 = \max_{(x,t)\in\overline{Q}} \left[\int\limits_Q K_{0xx}^2(x,y,t)\,dy \right].$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (9), (15)–(19), *а также условие*

$$\exists\,\gamma_0 \in (0, \frac{\sqrt{7}}{2}) : \ \max\left\{ k_1(1+k_3)(6+\frac{1}{4\gamma_0^2}) + k_2k_4(6+\frac{1}{\gamma_0^2}),\, k_2(6+\frac{1}{\gamma_0^2}) \right\} < \frac{1}{4}. \tag{29}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству V, являющаяся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такая, что для нее выполняются условия (2)–(4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 1, достаточно установить разрешимость в пространстве V краевой задачи (11), (2), (12), (13). Вновь воспользуемся методом продолжения по параметру. Именно, для чисел λ из отрезка $[0,1]$ и для заданной функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$Lv - \lambda\Phi(x,t,B^{-1}v) = g(x,t) \tag{30}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2), (12) *и* (13). Как следует из теоремы 1, при выполнении условий (9), (15)–(19) краевая задача (30), (2), (12), (13) при $\lambda = 0$ разрешима в пространстве V. Следовательно, для того чтобы краевая задача (11), (2), (12), (13) была разрешима в пространстве V, достаточно доказать, что для всевозможных решений задачи (30), (2), (12), (13) имеет место равномерная по λ априорная оценка.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (v_\tau - v_{xx\tau} + cv)[v_\tau + (x-\frac{1}{2})v_{x\tau} - v_{xx\tau}]\,dx\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_\Omega [g + av_{xx} + \lambda\Phi(x,\tau,B^{-1}u)][v_\tau + (x-\frac{1}{2})v_{x\tau} - v_{xx\tau}]\,dx\,d\tau, \tag{31}$$

являющееся следствием уравнения (30). В этом равенстве все слагаемые, кроме слагаемых с функцией $\Phi(x,\tau,B^{-1}u)$, преобразуются так же, как они преобразовывались при анализе равенства (26). Далее, имеют место неравенства

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_\tau^2\,dx\,d\tau \le \frac{2(1+k_3)}{1-\delta_0^2} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v_\tau^2\,dx\,d\tau + m_1 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v^2\,dx\,d\tau, \tag{32}$$

$$\int_0^t\int_\Omega u_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau \le \frac{2}{1-\delta_0^2}\int_0^t\int_\Omega v_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau +$$

$$+\frac{2k_4}{1-\delta_0^2}\int_0^t\int_\Omega v_\tau^2\,dx\,d\tau + m_2\int_0^t\int_\Omega v^2\,dx\,d\tau, \tag{33}$$

$$\left|\int_0^t\int_\Omega\left(\int_\Omega K_{xx}(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)\,dy\right)v_\tau(x,\tau)\,dx\,d\tau\right| \le$$

$$\le\left[\frac{\delta_1^2}{2}+\frac{k_1(1+k_3)}{\delta_1^2(1-\delta_0^2)}\right]\int_0^t\int_\Omega v_\tau^2\,dx\,d\tau + m_3\int_0^t\int_\Omega v^2\,dx\,d\tau, \tag{34}$$

$$\left|\int_0^t\int_\Omega\left(\int_\Omega K_{xx}(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)\,dy\right)(x-\frac{1}{2})v_{x\tau}(x,\tau)\,dx\,d\tau\right| \le$$

$$\le\frac{\delta_2^2}{4}\int_0^t\int_\Omega v_{x\tau}^2\,dx\,d\tau + \frac{k_1(1+k_3)}{2\delta_2^2(1-\delta_0^2)}\int_0^t\int_\Omega v_\tau^2\,dx\,d\tau + m_4\int_0^t\int_\Omega v^2\,dx\,d\tau, \tag{35}$$

$$\left|\int_0^t\int_\Omega\left(\int_\Omega K_{xx}(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)\,dy\right)v_{xx\tau}(x,\tau)\,dx\,d\tau\right| \le$$

$$\le\frac{\delta_3^2}{2}\int_0^t\int_\Omega v_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau + \frac{k_1(1+k_3)}{\delta_3^2(1-\delta_0^2)}\int_0^t\int_\Omega v_\tau^2\,dx\,d\tau + m_5\int_0^t\int_\Omega v^2\,dx\,d\tau, \tag{36}$$

$$\left|\int_0^t\int_\Omega\left(\int_\Omega K(x,y,\tau)u_{yy\tau}(y,\tau)\,dy\right)v_\tau(x,\tau)\,dx\,d\tau\right| \le$$

$$\le\left[\frac{\delta_4^2}{2}+\frac{k_2k_4)}{\delta_4^2(1-\delta_0^2)}\right]\int_0^t\int_\Omega v_\tau^2\,dx\,d\tau + \frac{k_2}{\delta_4^2(1-\delta_0^2)}\int_0^t\int_\Omega v_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau +$$

$$+m_6\int_0^t\int_\Omega v^2\,dx\,d\tau, \tag{37}$$

$$\left|\int_0^t\int_\Omega\left(\int_\Omega K(x,y,\tau)u_{yy\tau}(y,\tau)\,dy\right)(x-\frac{1}{2})v_{x\tau}(x,\tau)\,dx\,d\tau\right| \le$$

$$\le\frac{\delta_5^2}{2}\int_0^t\int_\Omega v_{x\tau}^2\,dx\,d\tau + \frac{k_2k_4}{\delta_5^2(1-\delta_0^2)}\int_0^t\int_\Omega v_\tau^2\,dx\,d\tau +$$

$$+\frac{k_2}{\delta_5^2(1-\delta_0^2)}\int_0^t\int_\omega v_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau + m_7\int_0^t\int_\Omega v^2\,dx\,d\tau, \tag{38}$$

$$\left|\int_0^t\int_\Omega\left(\int_\Omega K(x,y,\tau)u_{yy\tau}(y,\tau)\,dy\right)v_{xx\tau}(x,\tau)\,dx\,d\tau\right| \le$$

$$\leq \left[\frac{\delta_6^2}{2} + \frac{k_2}{\delta_6^2(1-\delta_0^2)}\right] \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau +$$

$$+ \frac{k_2 k_4}{\delta_6^2(1-\delta_0^2)} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v_\tau^2\,dx\,d\tau + m_8 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v^2\,dx\,d\tau, \qquad (39)$$

в которых δ_0 – δ_6 есть произвольные положительные числа, числа же m_1 – m_8 определяются функциями $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $K_i(x)$, $i = 1, 2$, а также числами δ_0 – δ_6 (неравенства (32) и (33) доказываются с помощью представления функции $u(x,t)$ через функцию $v(x,t)$, неравенств Гельдера и Юнга, неравенства (34)–(39) — с помощью неравенств Гельдера, Юнга, а также неравенств (32) и (33). Используя данные неравенства, неравенства Гельдера и Юнга, неравенства (22) и (27), а также условия (2), (12), (13), (15)–(19), нетрудно от равенства (31) перейти к неравенству

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega [\frac{1}{2}v_\tau^2 + 2v_{x\tau}^2 + v_{xx\tau}^2]\,dx\,d\tau + \frac{c_0}{2}\int\limits_\Omega [v^2(x,t) + v_x^2(x,t)]\,dx \leq$$

$$\leq \left[\frac{\delta_1^2}{2} + \frac{k_1(1+k_3)}{\delta_1^2(1-\delta_0^2)} + \frac{k_1(1+k_3)}{2\delta_2^2(1-\delta_0^2)} + \frac{k_1(1+k_3)}{\delta_3^2(1-\delta_0^2)} + \frac{\delta_4^2}{2} + \frac{k_2k_4}{\delta_4^2(1-\delta_0^2)} +\right.$$

$$\left. + \frac{k_2k_4}{\delta_5^2(1-\delta_0^2)} + \frac{k_2k_4}{\delta_6^2(1-\delta_0^2)} + \delta\right] \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v_\tau^2\,dx\,d\tau + \left[\frac{\delta_2^2}{4} + \frac{\delta_5^2}{2} + \delta\right] \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v_{x\tau}^2\,dx\,d\tau +$$

$$+ \left[\frac{\delta_3^2}{2} + \frac{k_2}{\delta_4^2(1-\delta_0^2)} + \frac{k_2}{\delta_5^2(1-\delta_0^2)} + \frac{\delta_6^2}{2} + \frac{k_2}{\delta_6^2(1-\delta_0^2)} + \delta\right] \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau +$$

$$+ m_9 \left[\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (v^2 + v_x^2)\,dx\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega v_{xx\xi}^2\,dx\,d\xi\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega g^2\,dx\,d\tau\right], \qquad (40)$$

в котором δ есть произвольное положительное число, число же m_9 определяется функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $K_i(x)$, $i = 1, 2$, а также числами T, δ, δ_0 – δ_6. Зафиксируем числа δ_1 – δ_6, положив $\delta_1 = \delta_4 = \frac{1}{2}$, $\delta_2 = \sqrt{2}\gamma_0$, $\delta_5 = \gamma_0$, $\delta_3 = \delta_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Используя условие (29), подбирая числа δ и δ_0 малыми и фиксируя их, получаем, что выполняется неравенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (v_\tau^2 + v_{x\tau}^2 + v_{xx\tau}^2)\,dx\,d\tau + \int\limits_\Omega [v^2(x,t) + v_x^2(x,t)]\,dx \leq$$

$$\leq m_0 \left[\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (v^2 + v_x^2)\,dx\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega v_{xx\xi}^2\,dx\,d\xi\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega g^2\,dx\,d\tau\right].$$

Из этого неравенства и из леммы Гроноулла следует, что для решений краевой задачи (30), (2), (12), (13) имеет место априорная оценка

$$\|v\|_V \leq M$$

с постоянной M, определяющейся функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $K_i(x)$, $i = 1, 2$, а также числом T. Как уже говорилось выше, из этой оценки вытекает разрешимость в пространстве V краевой задачи (11), (2), (12), (13). Как также говорилось выше, из данного факта и из утверждения 1 вытекает разрешимость в пространстве V краевой задачи I.

Единственность решений очевидна.

Теорема доказана.

§ 3. Разрешимость краевой задачи II

Пусть по-прежнему выполняются нужные условия гладкости. Положим

$$\Delta_2(t) = [1 - \alpha_2(t)][1 - \beta_1(t)] + \alpha_1(t)[1 - \beta_2(t)].$$

Будем считать, что выполняется условие

$$\Delta_2(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0, T]. \tag{41}$$

Далее положим

$$\mu_0(t) = \frac{1 - \beta_1(t)}{\Delta_2(t)}, \quad \nu_0(t) = \frac{\alpha_1(t)}{\Delta_2(t)},$$

$$\mu_1(t) = \frac{\beta_2(t) - 1}{\Delta_2(t)}, \quad \nu_1(t) = \frac{1 - \alpha_2(t)}{\Delta_2(t)},$$

$$R_1(x,t) = \mu_0(t)K_1(x) + \nu_0(x)K_2(x), \quad R_2(x,t) = \mu_1(t)K_1(x) + \nu_1(x)K_2(x),$$

$$R(x,y,t) = xR_1(y,t) + R_2(y,t),$$

$$\overline{z}_1(t) = 1 - \int\limits_\Omega xR_1(x,t)\,dx, \quad \overline{z}_2(t) = -\int\limits_\Omega R_1(x,t)\,dx,$$

$$\overline{s}_1(t) = -\int\limits_\Omega xR_2(x,t)\,dx, \quad \overline{s}_2(t) = 1 - \int\limits_\Omega R_2(x,t)\,dx,$$

$$\Delta_{21}(t) = \overline{z}_1(t)\overline{s}_2(t) - \overline{z}_2(t)\overline{s}_1(t),$$

$$R_0(x,y,t) = \frac{1}{\Delta_{21}(t)}\{[x\overline{s}_2(t) - \overline{s}_1(t)]R_1(y,t) - [x\overline{z}_2(t) - \overline{z}_1(t)]R_1(y,t)\}.$$

Вновь определим интегральный оператор B:

$$(Bu)(x,t) = u(x,t) - \int\limits_\Omega R(x,y,t)u(y,t)\,dy;$$

при выполнении условия

$$\Delta_{21}(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T] \tag{42}$$

этот оператор будет обратимым, оператор B^{-1} определяется равенством

$$(B^{-1}v)(x,t) = v(x,t) + \int\limits_\Omega R_0(x,y,t)v(y,t)\,dy.$$

Определим функцию $\Psi(x,t,u)$:

$$\Psi(x,t,u) = \int\limits_\Omega R_{xx}(x,y,t)u_t(y,t)\,dy - \int\limits_\Omega R(x,y,t)u_{yyt}(y,t)\,dy -$$

$$-\int\limits_{\Omega} a(x,t)R(x,y,t)u_{yy}(y,t)\,dy + \int\limits_{\Omega}\{a(x,y)R_{xx}(x,y,t) - R_t(x,y,t) +$$

$$+ R_{xxt}(x,y,t) - c(x,t)R(x,y,t) + c(y,t)R(x,y,t)\}u(y,t)\,dy.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$Lv - \Psi(x,t,B^{-1}v) = \overline{f}(x,t) \tag{43}$$

и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условия

$$v_x(0,t) = \alpha_1(t)v(0,t) + \alpha_2(t)v_x(1,t), \quad 0 < t < T, \tag{44}$$

$$v(1,t) = \beta_1(t)v(0,t) + \beta_2(t)v_x(1,t), \quad 0 < t < T. \tag{45}$$

Утверждение 2. *Пусть выполняются условия (41) и (42). Тогда если функция $v(x,t)$ является решением из пространства V краевой задачи (43), (2), (44), (45), то функция $u = B^{-1}v$ будет решением из пространства V краевой задачи II.*

Доказательство этого утверждения проводится полностью аналогично доказательству утверждения 1.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (14)–(17), (19) *и (41), а также условия*

$$8\alpha_1(t)\xi_1^2 + 8[\alpha_2(t) - \beta_1(t)]\xi_1\xi_2 + [1 - 8\beta_2(t)]\xi_2^2 \geq 0 \quad \textit{при}$$

$$t \in [0,T], \quad (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2; \tag{46}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q). \tag{47}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству V, являющаяся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такая, что для нее выполняются условия (2), *(44) и (45).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вновь воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Положим

$$\overline{a}_i(x,t,\lambda) = \lambda[x\alpha_i(t) + \beta_i(t) - \alpha_i(t)], \quad i = 1,2,$$

$$\Delta(t,\lambda) = [1 - a_1(0,t,\lambda)][1 - a_{2x}(1,t,\lambda)] - a_{1x}(1,t,\lambda)a_2(0,t,\lambda),$$

$$\overline{b}_1(x,t,\lambda) = \frac{1}{\Delta(t,\lambda)}\{a_1(x,t,\lambda)[1 - a_{2x}(1,t,\lambda)] + a_2(x,t,\lambda)a_1(1,t,\lambda)\},$$

$$\overline{b}_2(x,t,\lambda) = \frac{1}{\Delta(t,\lambda)}\{a_1(x,t,\lambda)a_2(0,t,\lambda) + a_2(x,t,\lambda)[1 - a_1(0,t,\lambda)]\},$$

$$\overline{A}_i(x,t,\lambda) = \overline{b}_{ixx}(x,t,\lambda) - \overline{b}_i(x,t,\lambda), \quad \overline{B}_i(x,t,\lambda) = \overline{b}_{ixxt}(x,t,\lambda) +$$

$$+ a(x,t)\overline{b}_{ixx}(x,t,\lambda) - c(x,t)\overline{b}_i(x,t,\lambda) - \overline{b}_{it}(x,t,\lambda), \quad i = 1,2,$$

$$\overline{F}(x,t,\lambda,\xi) = \overline{A}_1(x,t,\lambda)\xi_1 + \overline{A}_2(x,t,\lambda)\xi_2 + \overline{B}_1(x,t,\lambda)\xi_3 + \overline{B}_2(x,t,\lambda)\xi_4,$$

$$\overline{w}(t) = (w_t(0,t), w_{xt}(1,t), w(0,t), w_x(1,t)).$$

Рассмотрим семейство вспомогательных краевых задач: *найти функцию* $w(x,t)$, *являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения*

$$L(\lambda)w \equiv w_t - aw_{xx} + cw - w_{xxt} - \overline{F}(x,t,\lambda,\overline{w}) = f \tag{48}$$

и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условия

$$w_x(0,t) = w(1,t) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{49}$$

Для данного семейства задач непрерывность операторов $L(\lambda)$ по λ очевидна, разрешимость в пространстве V краевой задачи (48), (2), (49) при $\lambda = 0$ известна [8; 9]. Осталось установить наличие равномерной по λ априорной оценки решений в пространстве V.

Определим функцию $u(x,t)$:

$$u(x,t) = w(x,t) + \overline{b}_1(x,t,\lambda)w(0,t) + \overline{b}_2(x,t,\lambda)w_x(1,t).$$

Очевидно, что если функция $w(x,t)$ принадлежит пространству V, то и функция $u(x,t)$ будет принадлежать тому же пространству, и что функция $u(x,t)$ представляет собой решение уравнения

$$u_t - au_{xx} + cu - u_{xxt} = f, \tag{50}$$

для которого выполняются условие (2), а также условия

$$u_x(0,t) = \lambda[\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u_x(1,t)], \quad 0 < t < T, \tag{51}$$

$$u(1,t) = \lambda[\beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u_x(1,t)], \quad 0 < t < T. \tag{52}$$

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega (u_\tau - u_{xx\tau} + cu)[u_\tau - (x - \frac{1}{2})u_{x\tau} - u_{xx\tau}]\,dx\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_\Omega (f + au_{xx})[u_\tau - (x - \frac{1}{2})u_{x\tau} - u_{xx\tau}]\,dx\,d\tau, \tag{53}$$

являющееся следствием уравнения (50). Интегрируя по частям и используя условия (2), (51) и (52), нетрудно данное равенство преобразовать к виду

$$\int_0^t \int_\Omega [u_\tau^2 + \frac{3}{2}u_{x\tau}^2 + u_{xx\tau}^2]\,dx\,d\tau + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x,t)[u^2(x,t) + u_x^2(x,t)]\,dx + \frac{1}{4}\int_0^t u_{x\tau}^2(0,\tau)\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_0^t \{8\lambda\alpha_1(\tau)u_\tau^2(0,\tau) + 8\lambda[\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)]u_\tau(0,\tau)u_{x\tau}(1,\tau) +$$

$$+ [1 - 8\lambda\beta_2(\tau)]u_{x\tau}^2(1,\tau)\}\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_\Omega (f + au_{xx})[u_\tau - (x - \frac{1}{2})u_{x\tau} - u_{xx\tau}]\,dx\,d\tau - \int_0^t \int_\Omega c_x u u_{x\tau}\,dx\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega c_\tau(u^2+u_x^2)\,dx\,d\tau+\int_0^t\int_\Omega(x-\frac{1}{2})u_\tau u_{x\tau}\,dx\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega(x-\frac{1}{2})cuu_{x\tau}\,dx\,d\tau-2\lambda\int_0^t u_\tau(0,\tau)[\alpha_1'(\tau)u(0,\tau)+\alpha_2'(\tau)u_x(1,\tau)]-$$

$$-u_{x\tau}(1,\tau)[\beta_1'(\tau)u(0,\tau)+\beta_2'(\tau)u_x(1,\tau)]\,d\tau+\lambda\int_0^t c(1,\tau)u(1,\tau)u_{x\tau}(1,\tau)\,d\tau-$$

$$-\lambda\int_0^t c(0,\tau)u(0,\tau)[\alpha_1(\tau)u_\tau(0,\tau)+\alpha_2(\tau)u_{x\tau}(1,\tau)+$$

$$+\alpha_1'(\tau)u(0,\tau)+\alpha_2'(\tau)u_x(1,\tau)]\,d\tau.$$

Используя далее условия (15)–(17), (19) и (46), неравенства (22) и (27), неравенство Юнга и, наконец, лемму Гронуолла, получаем, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (50), (2), (51), (52) будет выполняться искомая априорная оценка

$$\|u\|_V\le M_3$$

с постоянной M_3, определяющейся лишь функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i=1,2$, а также числом T. Из этой оценки следует разрешимость в пространстве V краевой задачи (54), (2), (51), (52) при $\lambda=1$. Определим функцию $u(x,t)$:

$$u(x,t)=w_1(x,t)+\overline{b}_1(x,t,1)w_t(0,t)+\overline{b}(x,t,1)w_{1x}(1,t).$$

Эта функция даст искомое решение краевой задачи II.

Единственность решений очевидна.

Теорема доказана.

Положим

$$r_1=\max_{(x,t)\in\overline{Q}}\left[\int_\Omega R_{xx}^2(x,y,t)\,dy\right],\quad r_2=\max_{(x,t)\in\overline{Q}}\left[\int_\Omega R^2(x,y,t)\,dy\right],$$

$$r_3=\max_{(x,t)\in\overline{Q}}\left[\int_\Omega R_0^2(x,y,t)\,dy\right],\quad r_4=\max_{(x,t)\in\overline{Q}}\left[\int_\Omega R_{0xx}^2(x,y,t)\,dy\right].$$

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (9), (15), (16), (47)–(49), а также условие*

$$\begin{gathered}\exists\,\gamma_0(x)\in\left(0,\tfrac{\sqrt5}{2}\right):\ r_1(1+r_3)\left(4+\tfrac{1}{4\gamma_0^2}\right)+2r_2r_4\left(6+\tfrac{1}{\gamma_0^2}\right)<\tfrac14,\\ r_2\left(4+\tfrac{1}{\gamma_0^2}\right)<\tfrac12.\end{gathered}\tag{54}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением краевой задачи II.

Доказательство этой теоремы проводится практически аналогично доказательству теоремы 2; отличие состоит лишь в несколько ином выборе чисел $\delta_1-\delta_6$ ($\delta_1=\delta_3=\delta_4=$ $=\delta_6=\frac{1}{\sqrt2}$, $\delta_2=\sqrt2\gamma_0$, $\delta_5=\gamma_0$).

§ 4. Разрешимость краевой задачи III

Исследование разрешимости краевой задачи III проводится по той же схеме, по которой проводилось исследование разрешимости краевых задач I и II.

Положим

$$\Delta_3(t) = \beta_1(t) + \beta_2(t) - \alpha_1(t) - \alpha_2(t) - 1;$$

будем считать, что выполняется условие

$$\Delta_3(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0, T]. \tag{55}$$

Далее положим

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\Delta_3(t)}, \quad \psi_0(t) = -\frac{1}{\Delta_3(t)},$$

$$\varphi_1(t) = \frac{\beta_1(t) + \beta_2(t) - 1}{\Delta_3(t)}, \quad \psi_1(t) = -\frac{\alpha_1(t) + \alpha_2(t)}{\Delta_3(t)},$$

$$S_1(x,t) = \varphi_0(t)K_1(x) + \psi_0(t)K_2(x),$$

$$S_2(x,t) = \varphi_1(t)K_1(x) + \psi_1(t)K_2(x),$$

$$S(x,y,t) = xS_1(y,t) + S_2(y,t),$$

$$\widetilde{z}_1(t) = 1 - \int\limits_\Omega xS_1(x,t)\,dx, \quad \widetilde{z}_2(t) = -\int\limits_\Omega S_1(x,t)\,dx,$$

$$\widetilde{s}_1(t) = -\int\limits_\Omega xS_2(x,t)\,dx, \quad \widetilde{s}_2(t) = 1 - \int\limits_\Omega S_2(x,t)\,dx,$$

$$\Delta_{31}(t) = \widetilde{z}_1(t)\widetilde{s}_2(t) - \widetilde{z}_2(t)\widetilde{s}_(t),$$

$$S_0(x.y,t) = \frac{1}{\Delta_{31}(t)}\{[x\widetilde{s}_2(t) - \widetilde{s}_1(t)]S_1(y,t) - [x\widetilde{z}_2(t) - \widetilde{z}_1(t)]S_2(y,t)\}.$$

Вновь определим оператор B:

$$(Bu)(x,t) = u(x,t) - \int\limits_\Omega S(x,y,t)u(y,t)\,dy;$$

при выполнении условия

$$\Delta_{31}(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0, T] \tag{56}$$

этот оператор будет обратимым, оператор B^{-1} определяется равенством

$$(B^{-1}v)(x,t) = v(x,t) + \int\limits_\Omega S_0(x,y,t)v(y,t)\,dy.$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия (14)–(19), (55) и (56). Тогда существует единственная функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением краевой задачи III.*

Положим

$$\widetilde{k}_1 = \max_{(x,t)\in\overline{Q}} \left[\int\limits_{\Omega} S^2_{xx}(x,y,t)\,dy \right], \quad \widetilde{k}_2 = \max_{(x,t)\in\overline{Q}} \left[\int\limits_{\Omega} S^2(x,y,t)\,dy \right],$$

$$\widetilde{k}_3 = \max_{(x,t)\in\overline{Q}} \left[\int\limits_{\Omega} S^2_0(x,y,t)\,dy \right], \quad \widetilde{k}_4 = \max_{(x,t)\in\overline{Q}} \left[\int\limits_{\Omega} S^2_{0xx}(x,y,t)\,dy \right].$$

Теорема 6. *Пусть выполняются условия (15)–(17), (19), (55), (56), а также условие*

$$\exists\,\gamma_0 \in \left(0, \tfrac{\sqrt{5}}{2}\right): \quad \begin{gathered} \widetilde{k}_1(1+\widetilde{k}_2)\left(4+\tfrac{1}{4\gamma_0^2}\right) + 2\widetilde{k}_2\widetilde{k}_4\left(6+\tfrac{1}{\gamma_0^2}\right) < \tfrac{1}{4}, \\ \widetilde{k}_2\left(4+\tfrac{1}{\gamma_0^2}\right) < \tfrac{1}{2}. \end{gathered} \tag{57}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением краевой задачи III.

Доказательство теорем 5 и 6 проводится вполне аналогично доказательству теорем 1 и 3, теорем 2 и 4 соответственно; основная априорная оценка выводится с помощью анализа равенства вида (53).

Дополнение

1. Используя метод продолжения по параметру и оценки, полученные по ходу доказательств теорем 1–6, нетрудно установить разрешимость в пространстве V краевых задач I–III для нагруженных уравнений вида

$$Lu = f(x,t) + G(x,t,u) + F(x,t,\overline{u}(t))$$

с функцией $G(x,t,u)$, представляющей собой сумму интегралов по области Ω от функций $u(x,t)$, $u_t(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xt}(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $u_{xxt}(x,t)$ (с весами), и функцией $F(x,t,\overline{u})$, являющейся линейной формой от следов функции $u(x,t)$ и ее производных при $x=0$ и $x=1$. Далее, оператор L в данных уравнениях вполне можно заменить более общим оператором вида

$$u_{tt} - A(x,t)u_{xxt} - a_1(x,t)u_{xx} + a_2(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u$$

при выполнении условия

$$A(x,t) \geq a_0 > 0 \quad \text{\textit{при}} \quad (x,t)\in\overline{Q},$$

а также естественных условий гладкости.

2. Непосредственно из доказательств теорем 2, 4 и 6 видно, что условия (29), (54) и (57) можно «пошевелить» — за счет иного выбора параметров $\delta_1 - \delta_6$.

3. Условия (29), (54) и (57) представляют собой некоторые условия малости. Очевидно, что множество входных данных краевых задач I–III, для которых они выполняются, не пусто.

Список литературы

1. *Солдатов А. П., Шхануков М. Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 547–551.

2. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Диф. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 769–774.

3. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995.

4. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теор. и прикл. мат., 1995.

5. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского госуниверситета: Естественнонаучная серия. 2008. № 3(62). С. 165–174.

6. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Докл. Академии наук. 2009. Т. 427, № 6. С. 1–3.

7. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

8. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

9. *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.

Материал поступил в редколлегию 02.09.09

Адреса авторов

КОЖАНОВ Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

ПОПОВ Николай Сергеевич
Северо-Восточный федеральный университет
им. М. К. Аммосова
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677000, Россия
e-mail: madu@sitc.ru