

В. М. Александров

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО РАСХОДУ РЕСУРСОВ УПРАВЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕННЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ*

Рассмотрен численный метод решения задачи минимизации расхода ресурсов для линейных динамических систем с возмущениями. Метод основан на формировании финитного управления, переводящего за фиксированное время линейную систему из любого начального состояния в требуемое конечное состояние и позволяющего определить структуру оптимального по расходу ресурсов управления. Дан способ задания начального приближения и предложен итерационный алгоритм вычисления оптимального управления. Получена система линейных алгебраических уравнений, связывающая отклонения начальных условий сопряженной системы с отклонениями фазовых координат от заданного конечного состояния. Приведен вычислительный алгоритм. Найден радиус и установлена квадратичная скорость локальной сходимости. Доказана сходимость вычислительного процесса и последовательности управлений к оптимальному по расходу ресурсов управлению.

Ключевые слова: оптимальное управление, финитное управление, расход ресурсов, линейная система, фазовая траектория, моменты переключений, сопряженная система, вариация, итерация, сходимость.

Введение

Оптимальное управление по различным критериям качества представляет значительный теоретический и практический интерес. Одной из актуальных является задача минимизации расхода ресурсов. Сформулированная первоначально как задача минимизации расхода топлива, она рассматривалась многими как отечественными, так и зарубежными авторами [1–11]. Так как аналитическое решение задачи в общем случае невозможно, то предложены различные численные методы ее решения, каждый из которых обладает определенными достоинствами и недостатками. Большие вычислительные затраты не позволяют реализовать в реальном времени оптимальное по расходу ресурсов управление многими объектами и технологическими процессами и приводят к необходимости разработки новых численных методов, учитывающих специфику решаемой задачи и обладающих малой вычислительной трудоемкостью.

В работе предлагается новый численный метод решения задачи минимизации расхода ресурсов для линейных динамических систем с возмущениями. Метод основан на оригинальном способе формирования финитного управления из начальных условий управляемой системы [13]. Финитное управление представляет чередующуюся последовательность разнополярных воздействий, величины которых пропорциональны начальным условиям, взятыми с некоторыми весовыми коэффициентами. Это управление формируется с использованием принципа максимума [12]. Финитное управление пере-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения РАН (проект № 85) и РФФИ (проект № 10–01–00035).

водит линейную систему из любого начального состояния в требуемое конечное состояние (начало координат) за заданное (фиксированное) время. При этом моменты переключений остаются фиксированными, а изменяются лишь величины управляющих воздействий, что обеспечивает простую техническую реализацию. Простота реализации является важным достоинством этого управления. Структура финитного управления позволяет определить структуру искомого оптимального по расходу ресурсов управления и задать хорошее начальное приближение [14]. Найдена связь между отклонениями моментов переключений управления и отклонениями фазовых координат от начала координат в конечный момент времени. Для нахождения оптимального управления необходимо перейти к определению моментов переключений с помощью сопряженной системы. Получена зависимость между отклонениями моментов переключений и отклонениями начальных условий сопряженной системы. В результате итерационный процесс вычисления оптимального по расходу ресурсов управления сводится к последовательности решений систем линейных алгебраических уравнений и интегрированию матричного дифференциального уравнения на интервалах перемещения моментов переключений.

§ 1. Постановка задачи

Пусть управляемая система описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + F(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in V, \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; u — m -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

$F(t)$ — n -мерный вектор кусочно-непрерывного возмущения, компоненты которого ограничены по условиям:

$$\left| \left(\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau \right)_i \right| + \left| \left(\Phi(t_k, t_0) x(t_0) \right)_i \right| \leq \left| \left(\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) M d\tau \right)_i \right| \quad \forall i = \overline{1, n},$$

где $\Phi(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений уравнения (1); M — максимальное управляющее воздействие. Физический смысл этих ограничений следующий. Отклонение на заданном интервале времени каждой фазовой координаты, порожденное *максимальным* допустимым управлением $u(t)$, должно быть больше (либо равно) суммарного отклонения в конечный момент каждой фазовой координаты, вызванного действием возмущения и свободного движения системы. Свободное движение порождается начальным условием, и для неустойчивых систем отклонения фазовых координат в конечный момент могут быть значительными. При увеличении максимальных значений управлений (т. е. предельных значений M_j , $j = \overline{1, m}$) увеличиваются возмущения, для которых возможен перевод системы, и увеличивается область начальных условий, из которой возможен перевод системы в начало координат.

Предполагается, что система (1) без возмущения $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ полностью управляема, т. е.

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n \quad (3)$$

и переводима в начало координат ограниченным управлением (2), т. е. x_0 принадлежит области управляемости V ; * — знак транспонирования.

Задача. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее систему (1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в нулевое конечное состояние $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$ ($T \geq T_0$) и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^m |u_j(\tau)| d\tau.$$

Здесь T_0 — время оптимального по быстродействию перевода системы.

§ 2. Вычислительный метод решения задачи

2.1. Формирование финитного управления. Предположим, что вектор начальных условий $x^{(i)}(t_0) = (0, \dots, 0, x_i(t_0), 0, \dots, 0)$ содержит только одну ненулевую компоненту $x_i(t_0)$. Рассмотрим алгоритм формирования управления из начального условия i -й фазовой координаты.

Введем в рассмотрение переменные ограничения на компоненты вектора управления, зависящие от начальных условий

$$|u_j| \leq \sum_{i=1}^n N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad N_{ij} > 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

где N_{ij} — некоторые весовые коэффициенты. Для принятого начального условия ограничение (4) имеет вид

$$|u_j| \leq N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad j = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Для нахождения оптимального по быстродействию управления системой $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ при ограничении (5) воспользуемся принципом максимума [12]. Образует функцию Понтрягина $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ и выпишем сопряженную систему $\dot{\psi}(t)$:

$$\begin{aligned} H(\psi(t), x(t), u(t), t) &= \psi^* A(t)x + \psi^* B(t)u, \\ \dot{\psi} &= -A^*(t)\psi. \end{aligned}$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, соответствующей функциям $x(t)$ и $u(t)$, что для любого $t \in [t_0, t_k]$ функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = \sup_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, t).$$

Функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ максимальна, если компоненты вектора управления формируются по алгоритму:

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}|x_i(t_0)| \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

где $[B_j(t)]^*$ — транспонированный j -й вектор-столбец матрицы $B(t)$. Пусть $x_i(t_0) = x_i^+(t_0) > 0$. Тогда (6) можно записать так:

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}x_i^+(t_0) \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}, \quad (7)$$

где $\psi^{(i)}(t)$ — решение сопряженной системы, соответствующее положительному значению $x_i(t_0)$. Если $x_i(t_0) = -x_i^+(t_0) < 0$, то

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}x_i^+(t_0) \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \tilde{\psi}^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}, \quad (8)$$

где $\tilde{\psi}^{(i)}(t)$ — решение сопряженной системы, соответствующее симметричной точке $[-x_i^+(t_0)]$. В силу симметрии относительно начала координат многообразий переключений имеем $\tilde{\psi}^{(i)}(t) = -\psi^{(i)}(t)$. Запишем теперь (8) так:

$$u_j^{(i)}(t) = -N_{ij}x_i^+(t_0) \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Объединим (9) и (7) для произвольного по знаку значения $x_i(t_0)$. Получим

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}x_i(t_0) \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (10)$$

Выпишем решение уравнения $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ в конечный момент времени $t = t_k$ для рассматриваемого случая начальных условий, когда лишь i -я компонента отлична от нуля. Имеем

$$x^{(i)}(t_k) = \Phi(t_k, t_0)x^{(i)}(t_0) + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^{(i)}(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Обозначим через $\Gamma^{(i)}(t_k, t_0)$ i -й вектор-столбец фундаментальной матрицы решений $\Phi(t_k, t_0)$. Тогда $\Phi(t_k, t_0)x^{(i)}(t_0) = \Gamma^{(i)}(t_k, t_0)x_i(t_0)$. Подставив в (11) это выражение, управление (10), конечное условие $x^{(i)}(t_k) = 0$ и учитывая, что $x_i(t_0) \neq 0$ и есть скалярная величина, получим основное уравнение, связывающее моменты переключений управления с параметрами управляемой системы

$$\sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij} \operatorname{sign} \left\{ [B_j(\tau)]^* \psi^{(i)}(\tau) \right\} d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Подставив в (12) решение сопряженной системы $\psi^{(i)}(t) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^* \psi^{(i)}(t_0)$, получим систему из n трансцендентных уравнений с n неизвестными, которыми являются начальные условия $\psi_{\xi}^{(i)}(t_0)$, $\xi = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij} \operatorname{sign} \left\{ [B_j(\tau)]^* [\Phi^{-1}(\tau, t_0)]^* \psi^{(i)}(t_0) \right\} d\tau +$$

$$+ \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Решив (13), найдем $\Psi_{\xi}^{(i)}(t_0)$, $\xi = \overline{1, n}$, и, следовательно, моменты переключений управления (10). Из (13) непосредственно следует, что начальные условия сопряженной системы и, следовательно, моменты переключений управления (10) *не зависят* от значений $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$, а в случае постоянных матриц A и B моменты переключений не зависят от начального момента t_0 , начального условия $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$ и постоянны. В результате доказана

Теорема 1. *Моменты переключений управления (10), сформированного из начального условия i -й фазовой координаты, не зависят от значения $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$.*

В случае постоянных матриц A и B моменты переключений не зависят от начального условия $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$, начального момента t_0 и постоянны.

Сохраним это важное свойство, но другим способом сформируем финитное управление, при котором существенно уменьшается вычислительная трудоемкость и необходимо решать лишь системы линейных алгебраических уравнений.

Зафиксируем моменты переключений управления. Тогда весовые коэффициенты N_{ij} принимают различные значения N_{ij}^p на каждом p -м интервале знакопостоянства компонент вектора управления, где $p = \overline{1, r_j}$, а r_j — число интервалов знакопостоянства j -й компоненты. Число интервалов устанавливается следующим образом. Зададим произвольно $(n-1)$ моментов переключений ν_j^p , $p = \overline{1, l_j}$; $\sum_{j=1}^m l_j = n-1$ для компонент вектора управления. В эти моменты функция переключений равна нулю:

$$[B_j(\nu_j^p)]^* [\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0)]^* \Psi(t_0) = 0, \quad p = \overline{1, l_j}; \quad \sum_{j=1}^m l_j = n-1.$$

Пронормируем решение сопряженной системы, полагая $|\Psi_{\alpha}(t_0)| = 1$, где α — любое значение из $i = \overline{1, n}$. Получим систему из $(n-1)$ линейных алгебраических уравнений

$$[B_j(\nu_j^p)]^* [\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0)]^* \hat{\Psi}(t_0) = 0, \quad p = \overline{1, l_j}; \quad \sum_{j=1}^m l_j = n-1, \quad (14)$$

относительно $(n-1)$ начальных условий $\hat{\Psi}_i(t_0)$ нормированной сопряженной системы. Зная начальное условие $\hat{\Psi}(t_0)$, находим *все* остальные моменты переключений компонент вектора управления на интервале $[t_0, t_k]$ (если они существуют).

Финитное управление при одинаковых для всех фазовых координат моментах переключений формируется по алгоритму

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}^p x_i(t_0) \text{sign} [B_j(t)]^* \Psi(t), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p], \quad (15)$$

где $\nu_j^0 = t_0$, $\nu_j^{r_j} = t_k$. В общем случае, когда вектор начальных условий $x(t_0)$ содержит все (либо часть) ненулевые компоненты, компоненты вектора управления образуются суммированием составляющих (15), сформированных из начальных условий каждой фазовой координаты:

$$u_j(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^p x_i(t_0) \text{sign} [B_j(t)]^* \Psi(t), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (16)$$

Суммарное управление (16) в силу справедливости принципа суперпозиции для линейных систем переводит систему $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ из любого начального состояния $x(t_0)$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$. Весовые коэффициенты N_{ij}^p , $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$ связаны с параметрами системы следующим аналогичным (13) уравнением:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij}^p \operatorname{sign} [B_j(\tau)]^* \psi^{(i)}(\tau) d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Введем обозначение $\widehat{N}_{ij}^p = N_{ij}^p \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t)$. Число параметров \widehat{N}_{ij}^p может быть больше числа уравнений. Поэтому для i -й фазовой координаты на n интервалах знакопостоянства компонент вектора управления принимаем неизвестными коэффициенты \widehat{N}_{ij}^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, k_j}$, где $\sum_{j=1}^m k_j = n$, а на остальных интервалах полагаем $\widehat{N}_{ij}^{p+1} = -\widehat{N}_{ij}^p$, $p = \overline{k_j, r_j - 1}$. Отсюда $\widehat{N}_{ij}^{p+1} = (-1)^{p-k_j} \widehat{N}_{ij}^{k_j}$, $p = \overline{k_j, r_j - 1}$. В результате получаем n систем, каждая из которых состоит из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных весовых коэффициентов \widehat{N}_{ij}^p :

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{k_j} \widehat{N}_{ij}^p \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) d\tau + \sum_{p=k_j+1}^{r_j} (-1)^{p-k_j} \widehat{N}_{ij}^{k_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) d\tau \right\} + \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Итак, задав произвольно моменты переключений, решаем системы линейных алгебраических уравнений (17) и находим весовые коэффициенты. Финитное управление (16) с учетом принятых обозначений формируется по простому алгоритму

$$u_j(t) = \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (18)$$

На рис. 1 приведена качественная картина формирования двух компонент финитного управления для системы третьего порядка. Каждая компонента вектора управления образуется суммированием трех составляющих $u_j^{(i)}$, $i = \overline{1, 3}$. Каждая из составляющих принимает на интервалах знакопостоянства различные значения, пропорциональные начальному условию соответствующей фазовой координаты.

2.2. Выравнивание величин финитного управления с учетом возмущения F .

Произведем выравнивание величин финитного управления. Это приводит к тому, что для величин финитного управления справедливо выражение $|u_j^\Phi| = \eta M_j$, где η — некоторый искомый параметр. Теперь финитное управление $u^\Phi(t)$, переводящее систему $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ из $x(t_0) = x_0$ в $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$, определяется так: $u_j^\Phi(t) = \eta M_j \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi(t)$. Параметр $\eta > 0$ показывает, насколько следует изменить величины компонент вектора управления, чтобы обеспечить перевод системы $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ из $x(t_0) = x_0$ в $x(t_k) = 0$ не за минимальное, а за заданное время T . Если $\eta \leq 1$, то решение задачи на минимум расхода ресурсов существует.

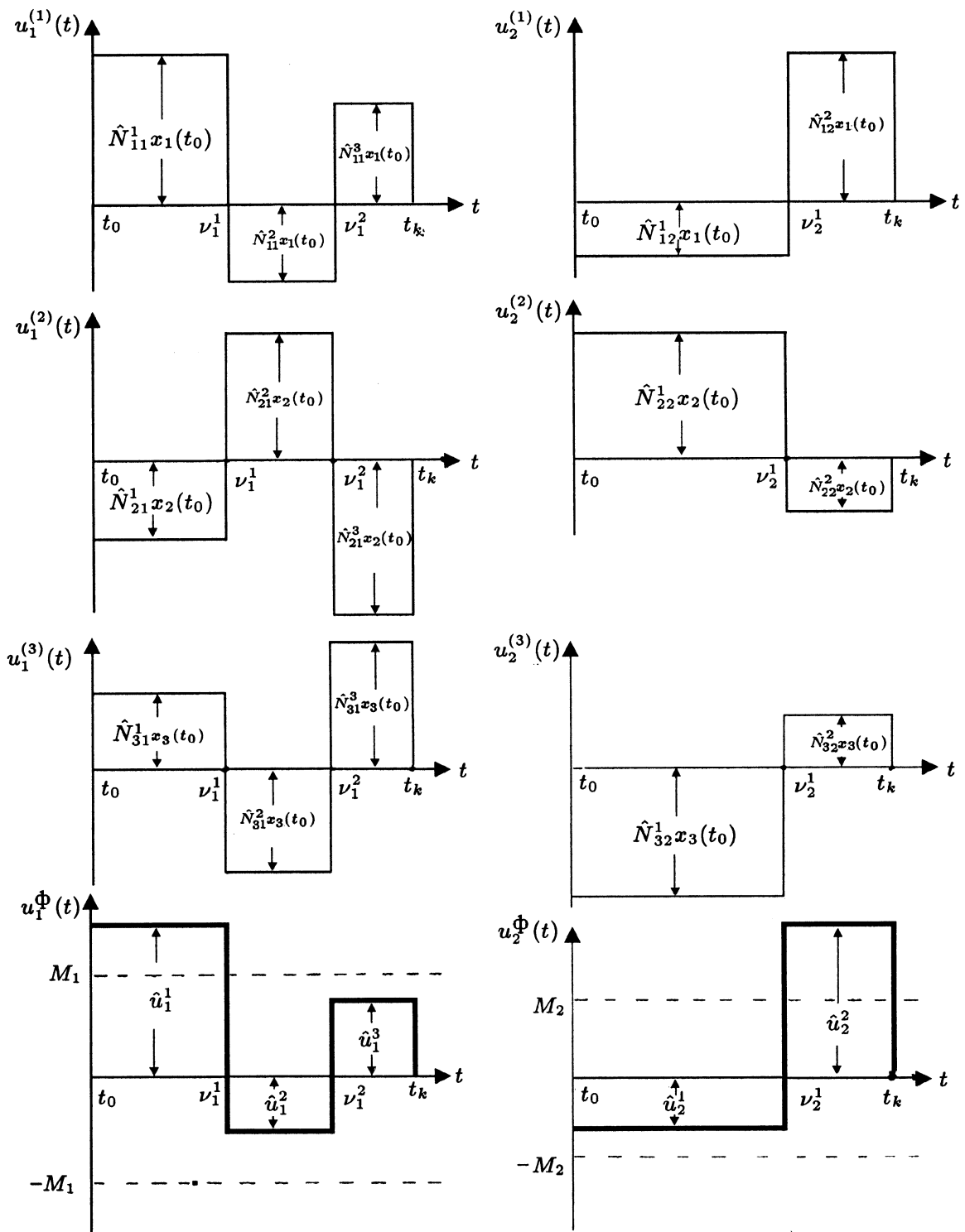


Рис. 1. Формирование финитного управления

При $\eta = 1$ решение задачи на минимум расхода ресурсов совпадает с решением задачи оптимального быстрогодействия и $T = T_0$. Если $\eta > 1$, то решения задачи не существует.

Выравнивание величин финитного управления достигается изменением моментов переключений ν_j^p на соответствующие значения $\Delta\nu_j^p$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$. Изменение моментов переключений на $\Delta\nu_j^p$ вызывает следующие отклонения фазовых координат в конечный момент времени $t = t_k$:

$$\Delta\hat{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1} + \Delta\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p + \Delta\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \eta M_j \text{sign} [B_j(\tau)]^* \Psi(\tau) d\tau, \quad (19)$$

где $\nu_j^0 = t_0$, $\nu_j^{r_j} = t_k$. Так как t_0 и t_k фиксированы, то $\Delta\nu_j^0 = 0$ и $\Delta\nu_j^{r_j} = 0$. Выражение (19) при малых $\Delta\nu_j^p$ можно приближенно записать так, используя обозначение $S_j(p) = \text{sign} [B_j(t)]^* \Psi(t)$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$; $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$:

$$\Delta\hat{x}(t_k) \cong 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) \eta M_j S_j(p) \Delta\nu_j^p. \quad (20)$$

Отклонения управляющих параметров $\Delta u_j(p) = \eta M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0)$ от выравненных значений вызывают следующее отклонение фазовых координат в конечный момент времени $t = t_k$:

$$\Delta\tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \left[\eta M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau. \quad (21)$$

Должно выполняться уравнение баланса отклонений: $\Delta\hat{x}(t_k) + \Delta\tilde{x}(t_k) + \Delta\bar{x}(t_k) = 0$. Здесь $\Delta\bar{x}(t_k) = \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau$ — отклонение фазовых координат, вызванное действием возмущения $F(t)$ на систему (1). Подставив в уравнение баланса отклонений выражения (20) и (21), получим уравнение, связывающее отклонения $\Delta\nu_j^p$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$ и параметр η с параметрами управляемой системы. Число отклонений моментов переключений может быть больше, чем $(n - 1)$. Выше отмечалось, что не все моменты переключений ν_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$ являются независимыми переменными. Выбрав произвольно $(n - 1)$ моментов переключений управления, с помощью сопряженной системы определяем все остальные моменты переключений (если они существуют). Поэтому для оптимального управления (а не просто допустимого управления) необходимо установить связь между отклонениями $\Delta\nu_j^p$ и отклонениями нормированной сопряженной системы. Такая связь была найдена [13]:

$$\Delta\nu_j^p \cong \left\{ \left\{ [B_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) - [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* \right\} [\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0)]^* \hat{\Psi}(t_0) \right\}^{-1} \times \\ \times [B_j(\nu_j^p)]^* [\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0)]^* \Delta\hat{\Psi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \quad (22)$$

Запишем (22) в компактном виде $\Delta\nu_j^p \cong L(\nu_j^p) \Delta\hat{\Psi}(t_0)$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$ и подставим в (20). В результате из уравнения баланса отклонений получим уравнение, связывающее

отклонения начальных условий нормированной сопряженной системы с отклонениями величин управляющих воздействий

$$2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) \eta M_j S_j(p) L(\nu_j^p) \Delta \hat{\Psi}(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \times \\ \times \left[\eta M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau + \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau = 0. \quad (23)$$

Получили систему из n уравнений с n неизвестными, которыми являются $(n-1)$ значений $\Delta \hat{\Psi}_i(t_0)$ и параметр η . Разделим на η обе части уравнения (23) и получим систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных, которыми являются $(n-1)$ значений $\Delta \hat{\Psi}_i(t_0)$ и параметр $1/\eta$:

$$2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) L(\nu_j^p) \Delta \hat{\Psi}(t_0) - \\ - \frac{1}{\eta} \left[\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) d\tau - \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau \right] + \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau = 0. \quad (24)$$

Из-за приближенности выражений (20) и (22) решение системы (24) осуществляется итерационным путем. По формуле (22) находим $\Delta \nu_j^p, j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j - 1}$. Если $\max_{j,p} |\Delta \nu_j^p| \leq \rho(t_k - t_0)$, то находим новые значения моментов переключений $\nu_j^{p,s+1} = \nu_j^{p,s} + \Delta \nu_j^{p,s}$ и новое начальное условие нормированной сопряженной системы $\hat{\Psi}^{s+1}(t_0) = \hat{\Psi}^s(t_0) + \Delta \hat{\Psi}^s(t_0)$, где s — номер итерации, а ρ задано ($0 < \rho < 1$) и характеризует предельно допустимое отклонение, при котором гарантируется сходимость вычислительного процесса. Для новых значений моментов переключений вычисляем, решая (17), новые весовые коэффициенты, вновь формируем финитное управление (18) и снова решаем (24) и т.д. Процесс вычислений заканчивается, когда $\max_{j,p} |\Delta \nu_j^p| \leq \epsilon_0$, где ϵ_0 задано ($0 < \epsilon_0 \ll 1$) и характеризует требуемую точность выравнивания величин финитного управления.

Если $\max_{j,p} |\Delta \nu_j^p| > \rho(t_k - t_0)$, то ограничиваем максимальное отклонение этим предельным значением, т.е. принимаем $\max_{j,p} |\Delta \nu_j^p| = \rho(t_k - t_0)$, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в μ раз, т.е. полагаем $\Delta \tilde{\nu}_j^p = \mu \Delta \nu_j^p, j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j - 1}; \tilde{\Delta} \hat{\Psi}(t_0) = \mu \Delta \hat{\Psi}(t_0)$, где $\mu = \frac{\rho(t_k - t_0)}{\max_{j,p} |\Delta \nu_j^p|}$. Здесь $\Delta \nu_j^p, \Delta \hat{\Psi}(t_0)$ — вычисленные значения из уравнений (22) и (24) соответственно; $\Delta \tilde{\nu}_j^p, \tilde{\Delta} \hat{\Psi}(t_0)$ — значения отклонений, которые принимаются для последующих вычислений в итерационном процессе.

Финитное управление $u_j^\Phi(t) = \eta M_j S_j(p), j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j - 1}; t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$ дает информацию, необходимую для решения задачи на минимум расхода ресурсов:

— получаем последовательность управляющих воздействий, знаки и число (r_j) интервалов знакопостоянства для каждой компоненты. Действительно, при $\eta = 1$, когда $T = T_0$, решение задачи на минимум расхода ресурсов совпадает с решением задачи оптимального быстрогодействия. При $\eta < 1$ ($T > T_0$) появляются участки «выключения» управления, за счет которых и происходит экономия ресурсов. При этом структура финитного управления отличается от оптимального по расходу ресурсов управления, однако последовательность кусочно-постоянных воздействий, знаки и число перемен знаков для каждой компоненты сохраняются;

— моменты переключений финитного управления используются для начального приближенного задания моментов переключений оптимального по расходу ресурсов управления;

— если $\eta > 1$, то решения задачи минимизации расхода ресурсов не существует. Для существования решения необходимо увеличить M_j либо T . Увеличение M_j приводит к существованию решения, если система (1) полностью управляема, т. е. выполняется условие (3). Увеличение T для неустойчивых систем приводит к существованию решения, если только $x_0 \in V$.

2.3. Вычисление оптимального по расходу ресурсов управления. Для нахождения оптимального по расходу ресурсов управления при ограничении (2) образуем функцию Понтрягина $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ и выпишем сопряженную систему $\dot{\psi}(t)$:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = - \sum_{j=1}^m |u_j| + \psi^* A(t)x + \psi^* B(t)u + \psi^* F(t),$$

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi.$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, соответствующей функциям $x(t)$ и $u(t)$, что для любого $t \in [t_0, t_k]$ функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = \sup_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, t).$$

Функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ максимальна, если компоненты вектора управления удовлетворяют следующим условиям:

$$u_j(t) = \begin{cases} M_j & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \geq 1, \\ 0 & \text{при } 1 > [B_j(t)]^* \psi(t) > -1, \\ -M_j & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \leq -1. \end{cases} \quad j = \overline{1, m}. \quad (25)$$

Соотношение (25) можно записать более компактно:

$$u_j(t) = M_j \operatorname{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \operatorname{sign} (1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (26)$$

Оптимальное по расходу ресурсов управление формируется по алгоритму

$$u_j(t) = \pm M_j, \quad t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}], \quad p = \overline{1, r_j},$$

$$u_j(t) \equiv 0, \quad t \in [t_j^{2p-1}, t_j^{2p}], \quad p = \overline{1, r_j - 1},$$

где $t_j^{2r_j-1} = t_k$. На рис. 2 качественно показаны: структура финитного управления $u_j^\Phi(t)$; структура оптимального по расходу ресурсов управления $u_j^{opt}(t)$; функция переключения $[B_j(t)]^*\Psi(t)$.

Пусть t_j^α ($\alpha = \overline{1, l_j}$, $\sum_{j=1}^m l_j = n$; $j = \overline{1, m}$) — α -й момент переключения (включения или выключения) j -й компоненты вектора управления. Задавая произвольно n моментов переключений управления, можно определить начальное условие $\Psi(t_0)$ для сопряженной системы $\dot{\Psi} = -A^*(t)\Psi$, а с помощью решения $\Psi(t)$ найти все моменты переключений компонент вектора управления на заданном интервале $[t_0, t_k]$, соответствующие этим n заданным моментам. Выбор «хорошего» начального приближения улучшает сходимость, а главное, уменьшает время, затрачиваемое на интегрирование, и, следовательно уменьшает время нахождения оптимального управления и вычислительную трудоемкость метода.

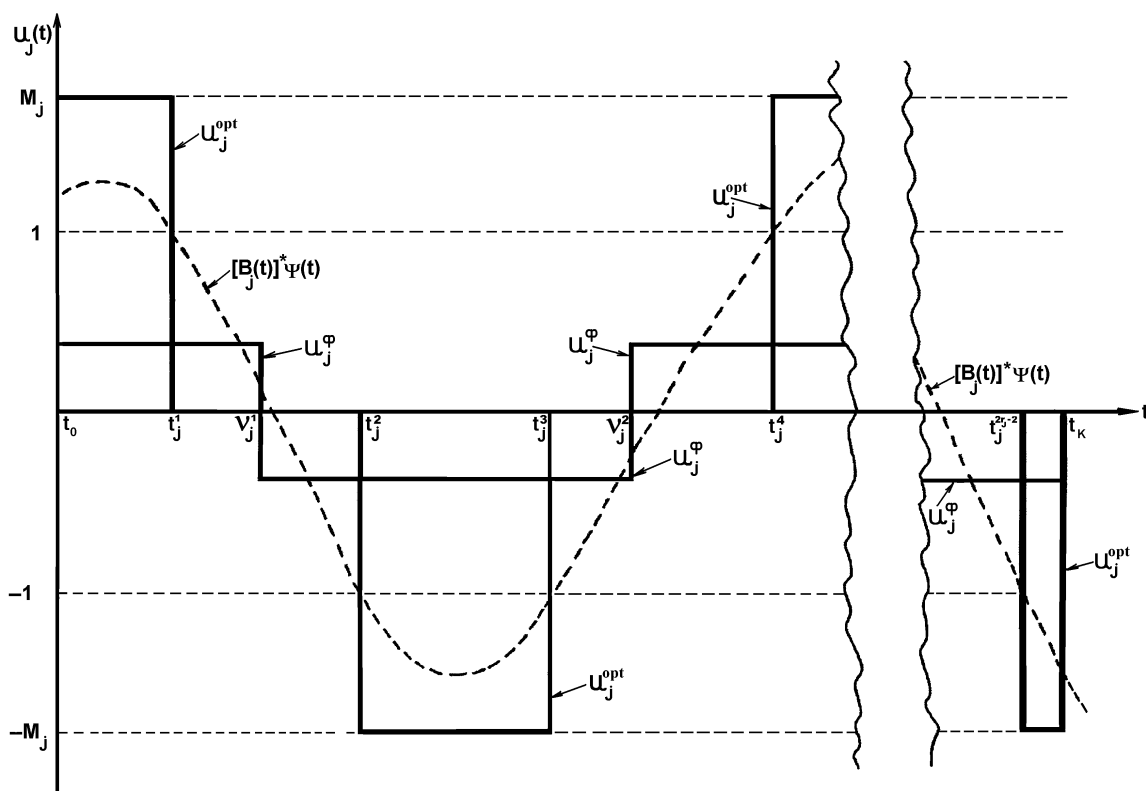


Рис. 2. Структуры финитного и оптимального управлений

Моменты переключений t_j^α ($\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$; $j = \overline{1, m}$) для начального приближения искомого управления на минимум расхода ресурсов целесообразно задавать через моменты переключений v_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$ финитного управления. Первый момент t_j^1 выключения и последний момент $t_j^{2(r_j-1)}$ включения управления зададим по следующим формулам:

$$t_j^1 = \frac{1}{2}(v_j^1 - t_0)\eta(1 + \eta^2) + t_0, \quad t_j^{2(r_j-1)} = t_k - \frac{1}{2}(t_k - v_j^{(r_j-1)})\eta(1 + \eta^2), \quad (27)$$

а остальные моменты переключений зададим так:

$$t_j^{2p-1} = \nu_j^p - \frac{1}{2}(\nu_j^p - \nu_j^{p-1}) \left[1 - \frac{1}{2}\eta(1 + \eta^2) \right], \quad t_j^{2p} = \nu_j^p + \frac{1}{2}(\nu_j^{p+1} - \nu_j^p) \left[1 - \frac{1}{2}\eta(1 + \eta^2) \right],$$

$$p = \overline{1, r_j - 1}.$$

В этом случае, если $\eta = 1$, то финитное управление должно совпадать с оптимальным по расходу ресурсов управлением, что и отражают формулы (27). Если $\eta \rightarrow 0$, то интервалы, на которых управление, минимизирующее расход ресурсов, отлично от нуля, должны стремиться к нулю, что и следует из (27). Параметры p и α связаны соотношением $p = E(\alpha/2 + 1)$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots$, где $E(\cdot)$ — целая часть числа.

При $t = t_j^\alpha$ имеем $[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = \pm 1$. Зная $u^\Phi(t)$, легко определить знаки функции переключения на каждом p -м интервале постоянства через первый интервал

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = (-1)^{p-1} \text{sign } u_j^\Phi(t_0). \quad (28)$$

Запишем решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ так:

$$\psi(t) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^* \psi(t_0). \quad (29)$$

Подставляя (29) и соотношение $p = E(\alpha/2 + 1)$ в (28), получим для вычисления $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ систему из n линейных алгебраических уравнений:

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) - (-1)^{E(\alpha/2+1)-1} \text{sign } u_j^\Phi(t_0) = 0,$$

$$j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, l_j}; \quad \sum_{j=1}^m l_j = n. \quad (30)$$

Зная начальное условие $\psi(t_0)$, с помощью решения на интервале $[t_0, t_k]$ сопряженной системы (29) находим все t_j^α , для которых выполняется (30). Итак, задав n моментов переключений, находим с помощью функции переключений соответствующие им все остальные моменты переключений.

2.4. Отклонение фазовой траектории от начала координат. Пусть заданы все приближенные значения моментов переключений t_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$. Управляемая система (1) переводится в некоторую точку фазового пространства, которая отклоняется от начала координат на величину

$$\Delta \hat{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} d\tau +$$

$$+ \Phi(t_k, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau. \quad (31)$$

Это отклонение должно быть скомпенсировано соответствующим изменением моментов переключений управления.

2.5. Вариация моментов переключений управления. Изменение t_j^α на величину Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ вызывает следующее отклонение фазовых координат в конечный момент времени $t = t_k$ для кусочно-постоянного управления $u_j^p(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени $t = t_j^\alpha$, $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ и принимают значения $u_j^p(t) = M_j \operatorname{sign} u_j^\Phi(t_0)(-1)^{p-1} = M_j S_j(p)$, $t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}]$, $p = \overline{1, r_j}$:

$$\Delta \tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \int_{t_j^\alpha}^{t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) d\tau. \quad (32)$$

Если Δt_j^α достаточно малы (а это, как показано ниже, всегда достижимо), то получаем приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю Δt_j^α :

$$\Delta \tilde{x}(t_k) \cong \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha. \quad (33)$$

2.6. Уравнение баланса отклонений. Отклонения фазовых координат (31), порождаемые неточным заданием моментов переключений и действием возмущения F , должны быть скомпенсированы соответствующим изменением моментов переключений, т. е. должно выполняться уравнение баланса отклонений: $\Delta \tilde{x}(t_k) + \Delta \hat{x}(t_k) = 0$. Подставив в это уравнение выражения (31) и (33), получим систему из n линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha + \Phi(t_k, t_0) x(t_0) + \\ & + \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Число неизвестных Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ в (34) может быть больше числа уравнений, однако только n из них являются независимыми переменными. Выше отмечалось, что с помощью сопряженной системы заданием n моментов переключений однозначно задаются все остальные моменты переключений на интервале $[t_0, t_k]$. Поэтому для нахождения оптимального управления необходимо перейти к определению расположения моментов переключений с помощью сопряженной системы. С этой целью установим связь между отклонениями Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ моментов переключений и отклонениями $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ начальных условий сопряженной системы. Число последних равно n . В результате получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$.

2.7. Связь между отклонениями моментов переключений управления и отклонениями начальных условий сопряженной системы. Для j -й компоненты вектора управления функция переключений принимает значения (± 1) в моменты $t = t_j^\alpha$, т. е. справедливо уравнение (30).

Изменим $\psi(t_0)$ на $\Delta\psi(t_0)$. Это порождает изменение t_j^α на Δt_j^α :

$$[B_j(t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha, t_0)]^* (\psi(t_0) + \Delta\psi(t_0)) - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E(\alpha/2+1)-1} = 0, \\ j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}.$$

Разложим полученное выражение в ряд Тейлора и ограничимся лишь линейными членами:

$$\left[B_j(t_j^\alpha) + \overline{\Delta t_j^\alpha} \frac{dB_j(t_j^\alpha)}{dt} \right]^* \left[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0) + \overline{\Delta t_j^\alpha} \frac{d\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)}{dt} \right]^* (\psi(t_0) + \Delta\psi(t_0)) - \\ - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E(\alpha/2+1)-1} = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \quad (35)$$

Здесь $\overline{\Delta t_j^\alpha}$ — диагональная матрица $(n \times n)$ с элементом Δt_j^α на диагонали. Отметим, что $\Phi^{-1}(t, t_0) = [\widehat{\Phi}(t, t_0)]^*$, где $\widehat{\Phi}(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решения сопряженного уравнения $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$, которая находится из решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\widehat{\Phi}(t, t_0)}{dt} = -A^*(t)\widehat{\Phi}(t, t_0), \quad \widehat{\Phi}(t_0, t_0) = I. \quad (36)$$

Запишем (35), учитывая (36), в следующем виде:

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) + [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - \\ - [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) (\Delta t_j^\alpha)^2 + \\ + [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0) + [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - \\ - [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0) (\Delta t_j^\alpha)^2 - \\ - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E(\alpha/2+1)-1} = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}.$$

Пренебрегая величинами второго и более высокого порядка малости и учитывая (30), получим приближенное уравнение, связывающее Δt_j^α и $\Delta\psi(t_0)$:

$$\left\{ [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) - [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \right\} \Delta t_j^\alpha + \\ + [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \quad (37)$$

Из (37) находим приближенное соотношение, посредством которого каждое Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ выражается через $\Delta\psi(t_0)$:

$$\Delta t_j^\alpha \cong \left\{ \left\{ [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* \right\} [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \right\}^{-1} \times \\ \times [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \quad (38)$$

Запишем соотношение (38) в компактном виде

$$\Delta t_j^\alpha \cong \mathcal{L}(t_j^\alpha) \Delta\psi(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \quad (39)$$

Следует отметить, что, несмотря на кажущуюся сложность, выражение (38) имеет простой вид благодаря матрицам размера $(1 \times n)$ и $(n \times 1)$.

2.8. Основное уравнение. Подставив (39) в (34), получим основную систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $\Delta\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \mathcal{L}(t_j^\alpha) \Delta\psi(t_0) + \Phi(t_k, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau = 0. \quad (40)$$

Решив (40), находим $\Delta\psi(t_0)$. По формуле (38) вычисляем отклонения Δt_j^α , на которые следует изменить каждый из моментов переключений, чтобы уменьшить в конечный момент отклонение от начала координат фазовой траектории движения системы (1). Приближенность выражений (33) и (38) приводит к итерационной процедуре нахождения оптимального управления. Отклонение $\Delta\hat{x}(t_k)$ может быть значительным, и для его компенсации необходимы большие отклонения моментов переключений Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$. В силу линеаризации и приближенности полученных соотношений возможна расходимость вычислительного процесса. Оценить, «малы» или «велики» отклонения $\Delta\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ и гарантируется ли сходимость вычислительного процесса, весьма сложно. Более просто судить о сходимости вычислительного процесса по величине максимального отклонения моментов переключений по сравнению с длительностью соответствующего интервала включения управления. Если $\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha| \leq \gamma (t_j^{2p-1} - t_j^{2(p-1)})$, где γ задано ($0 < \gamma < 1$), то отклонения моментов переключений достаточно малы и гарантируется сходимость вычислительного процесса. В противном случае компенсируем отклонение $\Delta\hat{x}(t_k)$ не сразу полностью, а по частям, беря лишь ξ -ю часть отклонения $\Delta\hat{x}(t_k)$, полагая

$$\xi = \frac{\gamma (t_j^{2p-1} - t_j^{2(p-1)})}{\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha|}. \quad (41)$$

Таким образом, если окажется, что $\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha| > \gamma (t_j^{2p-1} - t_j^{2(p-1)})$, то ограничим максимальное отклонение предельным значением, т. е. принимаем $\max_{j, \alpha} |\Delta \tilde{t}_j^\alpha| = \gamma (t_j^{2p-1} - t_j^{2(p-1)})$, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в ξ раз, т. е. полагаем

$$\Delta \tilde{t}_j^\alpha = \xi \Delta t_j^\alpha, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, \quad \Delta \tilde{\psi}(t_0) = \xi \Delta \psi(t_0). \quad (42)$$

Здесь $\Delta\psi(t_0)$, Δt_j^α — вычисленные значения из уравнений (40) и (38) соответственно; $\Delta \tilde{\psi}(t_0)$, $\Delta \tilde{t}_j^\alpha$ — значения отклонений, которые реально принимаются для последующих расчетов. Такой подход обеспечивает сходимость итерационного вычислительного процесса для любых начальных условий из области управляемости.

§ 3. Итерационный алгоритм вычисления оптимального по расходу ресурсов управления

Шаг 1. Задаем на интервале $t \in [t_0, t_k]$ произвольно $(n - 1)$ моментов переключений для всех компонент вектора управления. Решаем систему линейных алгебраических уравнений (14) и вычисляем нормированное начальное условие $\widehat{\psi}(t_0)$. Находим с помощью функции переключения $[B_j(t)]^*[\Phi^{-1}(t, t_0)]^*\widehat{\psi}(t_0)$ все остальные моменты переключений (всего $r_j - 1$ для j -й компоненты, если они существуют). Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Решаем системы линейных алгебраических уравнений (17) и находим весовые коэффициенты \widehat{N}_{ij}^p , $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j}$. Формируем финитное управление (18). Переходим к шагу 3.

Шаг 3. Решаем систему линейных алгебраических уравнений (24) и находим отклонение $\Delta\widehat{\psi}(t_0)$ начального условия нормированной сопряженной системы и параметр η . Вычисляем по формуле (22) отклонения Δv_j^p , $j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j - 1}$ моментов переключений финитного управления. Проверяем выполнение условия: $\max_{j,p} |\Delta v_j^p| \leq \rho(t_k - t_0)$. Если это условие выполняется, то суммируем отклонения Δv_j^p с моментами переключений Δv_j^p , а отклонение $\Delta\widehat{\psi}(t_0)$ с начальным условием $\widehat{\psi}(t_0)$ нормированной сопряженной системы и переходим к шагу 2. Процесс вычислений заканчивается, когда $\max_{j,p} |\Delta v_j^p| \leq \epsilon_0$. Если $\eta < 1$, переходим к шагу 4. Если $\eta = 1$, то найденное финитное управление совпадает с оптимальным по расходу ресурсов управлением. Процесс вычислений закончен. Если $\eta > 1$, то решения задачи не существует. Останов.

Если $\max_{j,p} |\Delta v_j^p| > \rho(t_k - t_0)$, то ограничиваем максимальное отклонение предельным значением, т. е. принимаем $\max_{j,p} |\Delta v_j^p| = \rho(t_k - t_0)$, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в μ раз, т. е. полагаем $\Delta \widetilde{v}_j^p = \mu \Delta v_j^p$, $j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j - 1}$; $\widetilde{\Delta}\widehat{\psi}(t_0) = \mu \Delta\widehat{\psi}(t_0)$, где $\mu = \frac{\rho(t_k - t_0)}{\max_{j,p} |\Delta v_j^p|}$. Суммируем ограниченные отклонения $\Delta \widetilde{v}_j^p$ с моментами переключений v_j^p , а $\widetilde{\Delta}\widehat{\psi}(t_0)$ с $\widehat{\psi}(t_0)$ и переходим к шагу 1.

Шаг 4. По формулам (27) задаем начальные приближенные значения моментов включения и выключения t_j^α , $j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ оптимального по расходу ресурсов управления. Выбираем n первых значений моментов переключений, решаем систему линейных алгебраических уравнений (30) и находим начальное условие $\psi(t_0)$ сопряженной системы. Решаем уравнение $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ с найденным начальным условием и из уравнений $[B_j(t_j^\alpha)]^*\psi(t_j^\alpha) = \pm 1$ находим все остальные моменты переключений управления, соответствующие этим n выбранным значениям. Переходим к шагу 5.

Шаг 5. Решаем систему линейных алгебраических уравнений (40) и находим отклонение $\Delta\psi(t_0)$ начального условия сопряженной системы. По формуле (38) вычисляем отклонения Δt_j^α , $j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ моментов выключения и включения управления. Если $\max_{j,p} |\Delta t_j^\alpha| \leq \gamma(t_j^{2p-1} - t_j^{2(p-1)})$, находим уточненные значения моментов переключений $t_j^{\alpha,s+1} = t_j^{\alpha,s} + \Delta t_j^{\alpha,s}$. Используя n первых значений моментов переключений и решая систему линейных алгебраических уравнений (30), находим начальное условие $\psi(t_0)$ сопряженной системы. Возвращаемся к шагу 5. Итерационный процесс вычислений заканчивается, если решение $[B_j(t)]^*\psi(t)$ проходит с заданной точностью через все

моменты переключений j -й компоненты управления и $\|\Delta\hat{x}(t_k)\| \leq \epsilon$, где ϵ — заданная погрешность перевода системы (1) в начало координат ($0 < \epsilon \ll 1$).

Если $\max_{j,p} |\Delta t_j^\alpha| > \gamma(t_j^{2p-1} - t_j^{2(p-1)})$, то значения отклонений находим по формулам (42). Суммируем $\Delta\tilde{t}_j^\alpha$ с t_j^α и полученные значения принимаем в качестве новых приближенных моментов включения и выключения управления. Переходим к шагу 4 и решаем систему из n линейных алгебраических уравнений (30).

Заключение

Рассматриваемый метод вычисления оптимального по расходу ресурсов управления основан на оригинальном способе формирования финитного управления из начальных условий управляемой системы. Финитное управление обладает рядом важных свойств, которые используются для нахождения оптимального управления. Во-первых, финитное управление переводит управляемую систему в требуемое конечное состояние (начало координат). Во-вторых, финитное управление формируется с использованием сопряженной системы, т. е. с использованием первого необходимого условия оптимальности в классическом вариационном исчислении (уравнения Эйлера–Лагранжа). Поэтому структура финитного управления позволяет определить структуру искомого оптимального управления: 1) определить знаки и величины управляющих воздействий для каждой компоненты вектора управления на первом и на каждом последующем интервале постоянства; 2) определить число $2(r_j - 1)$ моментов «включения» и «выключения» управления для каждой j -й компоненты; 3) задать «хорошее» начальное приближение $(t_j^{\alpha,0})$, используя моменты переключений (v_j^p) финитного управления, чем достигаются быстрая сходимость и малая вычислительная трудоемкость метода. Следует также отметить, что финитное управление реализуется весьма просто, что обеспечивает малые вычислительные затраты.

В постановке задачи предполагается, что заданное время больше либо равно времени оптимального по быстродействию управления, так как только в этом случае существует решение задачи на минимум расхода ресурсов. Однако на практике заранее не известно, выполнено ли это необходимое условие, так как его выполнение означает, что имеется решение задачи оптимального быстродействия для заданных начальных условий. Формирование финитного управления позволяет и одновременно проверить выполнение этого необходимого условия. Если параметр $\eta > 1$, то решения задачи не существует. Если $\eta \leq 1$, то решение существует.

Основные вычислительные затраты вызваны интегрированием систем дифференциальных уравнений. Поэтому трудоемкость вычислительных методов принято оценивать по затратам на интегрирование (числу решений задач Коши). В рассматриваемом методе нет необходимости в многократном решении задач Коши, которое ведет к большим вычислительным затратам. Достаточно решить задачу Коши один раз и далее интегрировать системы дифференциальных уравнений лишь на перемещения моментов переключений. Затраты на интегрирование в этом случае определяются (при монотонной

сходимости, которая достигается при малых отклонениях) суммарными отклонениями первоначально заданных моментов переключений (начальных приближений) от точных значений моментов переключений и не зависят от количества итераций.

Приложение. Доказательство сходимости итерационного вычислительного процесса

Докажем сходимость итерационного процесса вычислений и сходимость последовательности управлений к оптимальному по расходу ресурсов управлению.

Теорема 2. *Существуют такие значения $\Delta\psi^*$, что если начальное значение $\|\Delta\psi^0(t_0)\| < \|\Delta\psi^*\|$, то $\|\Delta\psi^{s+1}(t_0)\| < \|\Delta\psi^s(t_0)\|$, $s = 0, 1, 2, 3, \dots$ и итерационный процесс вычислений начальных условий сопряженной системы сходится к искомому оптимальному значению $\psi_{\text{опт}}(t_0)$ с любой наперед заданной точностью, т. е. $\|\psi^{s+1}(t_0) - \psi^s(t_0)\| < \epsilon_*$, $s = r, r+1, r+2, \dots$, где $s = r$ — номер итерации, а ϵ_* — сколь угодно малое число ($0 < \epsilon_* \ll 1$). При этом последовательность управлений сходится к оптимальному по расходу ресурсов управлению.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отклонения фазовых координат при вариации моментов переключений определяются выражением (32). Так как подынтегральная функция непрерывна, то на основании теоремы о среднем имеем

$$\Delta\tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha + \mu_j^\alpha \Delta t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha + \mu_j^\alpha \Delta t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha, \quad 0 < \mu_j^\alpha < 1. \quad (\text{П.1})$$

Применив теорему Лагранжа о конечном приращении, выражение (П.1) представим так:

$$\Delta\tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \left[\Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha + \mu_j^\alpha (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \times \right. \\ \left. \times \frac{d\{\Phi(t_k, t_j^\alpha + \Theta_j^\alpha \mu_j^\alpha \Delta t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha + \Theta_j^\alpha \mu_j^\alpha \Delta t_j^\alpha)\}}{dt} (\Delta t_j^\alpha)^2 \right], \quad 0 < \Theta_j^\alpha < 1, \quad 0 < \mu_j^\alpha < 1. \quad (\text{П.2})$$

Введем обозначения

$$\Delta t_j^\alpha = \delta t_j^\alpha + \sigma t_j^\alpha. \quad (\text{П.3})$$

Здесь Δt_j^α — точные (истинные), а δt_j^α — вычисленные значения отклонений; σt_j^α — ошибки (погрешности) вычисления отклонений. Уравнение (33) становится *точным* для вычисленных значений δt_j^α :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \delta t_j^\alpha = \Delta\tilde{x}(t_k). \quad (\text{П.4})$$

Подставив (П.3) в (П.2) и учитывая (П.4), получим уравнение, связывающее погрешности вычисления σt_j^α с точными значениями Δt_j^α :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \sigma t_j^\alpha + \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \mu_j^\alpha (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \times$$

$$\times \frac{d\left\{ \Phi(t_k, t_j^\alpha + \Theta_j^\alpha \mu_j^\alpha \Delta t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha + \Theta_j^\alpha \mu_j^\alpha \Delta t_j^\alpha) \right\}}{dt} (\Delta t_j^\alpha)^2 = 0. \quad (\text{П.5})$$

Для доказательства сходимости вычислительного процесса важно следующее положение: погрешность (ошибка) σt_j^α , полученная на s -й итерации, является точным (истинным) значением отклонения на $(s+1)$ -й итерации, т. е.

$$\sigma t_j^{\alpha, s} = \Delta t_j^{\alpha, s+1}. \quad (\text{П.6})$$

Подставив (П.6) в (П.5), получим выражение, связывающее отклонения Δt_j^α на s -й и $(s+1)$ -й итерациях:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^{\alpha, s}) B_j(t_j^{\alpha, s}) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^{\alpha, s+1} =$$

$$= - \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \mu_j^{\alpha, s} (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \times$$

$$\times \frac{d\left\{ \Phi(t_k, t_j^{\alpha, s} + \Theta_j^{\alpha, s} \mu_j^{\alpha, s} \Delta t_j^{\alpha, s}) B_j(t_j^{\alpha, s} + \Theta_j^{\alpha, s} \mu_j^{\alpha, s} \Delta t_j^{\alpha, s}) \right\}}{dt} (\Delta t_j^{\alpha, s})^2. \quad (\text{П.7})$$

Подставим (38) в (П.7) и получим систему из n уравнений с n неизвестными $\Delta \Psi_i^{s+1}(t_0)$, $i = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^{\alpha, s}) B_j(t_j^{\alpha, s}) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \left\{ \left[B_j(t_j^{\alpha, s}) \right]^* A^*(t_j^{\alpha, s}) - \right.$$

$$\left. - \left[\dot{B}_j(t_j^{\alpha, s}) \right]^* \right\} \left[\Phi^{-1}(t_j^{\alpha, s}, t_0) \right]^* \Psi^s(t_0) \left\}^{-1} \left[B_j(t_j^{\alpha, s}) \right]^* \left[\Phi^{-1}(t_j^{\alpha, s}, t_0) \right]^* \Delta \Psi^{s+1}(t_0) =$$

$$= - \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \mu_j^{\alpha, s} (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \frac{d\left\{ \Phi(t_k, t_j^{\alpha, s} + \Theta_j^{\alpha, s} \mu_j^{\alpha, s} \Delta t_j^{\alpha, s}) B_j(t_j^{\alpha, s} + \Theta_j^{\alpha, s} \mu_j^{\alpha, s} \Delta t_j^{\alpha, s}) \right\}}{dt} \times$$

$$\times \left\{ \left\{ \left[B_j(t_j^{\alpha, s}) \right]^* A^*(t_j^{\alpha, s}) - \left[\dot{B}_j(t_j^{\alpha, s}) \right]^* \right\} \left[\Phi^{-1}(t_j^{\alpha, s}, t_0) \right]^* \Psi^s(t_0) \right\}^{-1} \times$$

$$\times \left[B_j(t_j^{\alpha, s}) \right]^* \left[\Phi^{-1}(t_j^{\alpha, s}, t_0) \right]^* \Delta \Psi^s(t_0) \left\}^2. \quad (\text{П.8})$$

Система (П.8) связывает отклонения $\Delta \Psi(t_0)$ на s -й и $(s+1)$ -й итерациях и может быть представлена в следующем компактном виде:

$$\Delta \Psi^{s+1}(t_0) = D(\cdot) \Delta \vec{\Psi}^s(t_0) \Delta \Psi^s(t_0). \quad (\text{П.9})$$

Здесь $\Delta \vec{\Psi}^s(t_0)$ — диагональная матрица $(n \times n)$ с элементами вектор-столбца $\Delta \Psi^s(t_0)$ на диагонали; $D(\cdot)$ — матрица размера $(n \times n)$, определяемая из (П.8).

Процесс вычислений сходится с любой наперед заданной точностью, если выполняется следующее достаточное условие:

$$\|\Delta \Psi^{s+1}(t_0)\| < \|\Delta \Psi^s(t_0)\|, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{П.10})$$

Из (П.9) непосредственно следует, что в силу *квадратичной* зависимости для любой конечной матрицы $D(\cdot)$ всегда найдутся такие значения $\Delta\psi^*$, что если $\|\Delta\psi^0(t_0)\| < \|\Delta\psi^*\|$, то выполняется условие сходимости вычислительного процесса (П.10). Величины отклонений $\Delta\psi^0(t_0)$ *выбираются* по нашему усмотрению. Действительно, задавая параметр γ и ограничивая максимальное отклонение по условию $\max_{j,\alpha} |\Delta t_j^\alpha| = \gamma(t_j^{2p-1} - t_j^{2(p-1)})$, тем самым ограничиваем максимальное отклонение предельно допустимым значением, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в ξ раз (42), где ξ определяется из выражения (41). Такое ограничение означает, что в уравнении баланса отклонений (34) компенсируется отклонение $\Delta\hat{x}(t_k)$ не сразу полностью, а по *частям*, последовательно беря на каждой итерации лишь ξ часть отклонения, т. е. фактически решаем уравнение $\Delta\tilde{x}(t_k) + \xi\Delta\hat{x}(t_k) = 0$. Если параметр γ задан таким, что $\|\Delta\psi^0(t_0)\| < \|\Delta\psi^*\|$, то выполняется условие сходимости (П.10) и всегда найдется такая итерация $s = r$, начиная с которой нормы отклонений $\|\Delta\psi^s(t_0)\|$, $s = r, r+1, r+2, \dots$ не превышают любого сколь угодно малого наперед заданного числа ϵ_* ($0 < \epsilon_* \ll 1$), т. е. $\|\Delta\psi^s(t_0)\| \leq \epsilon_*$, $s = r, r+1, r+2, \dots$. Из (П.9) непосредственно также следует, что скорость убывания квадратичная. Таким образом, итерационный процесс вычислений начальных условий сопряженной системы сходится к искомому оптимальному значению $\psi_{opt}(t_0)$ с любой наперед заданной точностью, а последовательность управлений сходится к оптимальному по расходу ресурсов управлению. Действительно, вычисленное управление переводит управляемую систему (1) в требуемое конечное состояние и удовлетворяет необходимому условию оптимальности — принципу максимума.

Оптимальное управление может быть единственным и неединственным. Оптимальное управление линейной системой единственно, если: 1) начало координат области управления является ее внутренней точкой; 2) выполнено условие общности положения [12]. При принятых ограничениях (2) на управляющие параметры начало координат области управления является ее внутренней точкой. Первое условие выполнено. Условие общности положения при рассматриваемых параллелепипедных ограничениях (2) адекватно условию покомпонентной полной управляемости. Так, в случае автономной системы для каждой компоненты должно выполняться условие

$$\text{rank} \left[B_j, AB_j, A^2B_j, \dots, A^{n-1}B_j \right] = n \quad \forall j = \overline{1, m}. \quad (\text{П.11})$$

В данной работе предполагается выполнение менее жесткого условия полной управляемости (3), т. е. достаточно выполнения условия управляемости хотя бы для одной компоненты. В случае скалярного управления условия общности положения и полной управляемости совпадают. Тогда в силу единственности оптимального управления следует, что последовательность управлений сходится с заданной точностью к оптимальному по расходу ресурсов управлению. В случае векторного управления, если оптимальное управление неединственно, то последовательность управлений сходится к одному из оптимальных управлений.

Теорема доказана. □

Следствие 1. Из (П.9) непосредственно следует, что локальная сходимость имеет квадратичную скорость сходимости.

Следствие 2. Радиус локальной сходимости равен $R_{cx} = \|\Delta\psi^*\|$.

Следствие 3. Так как согласно (П.6) $\Delta\psi^{s+1}(t_0) = \sigma\psi^s(t_0)$, то из (П.10) следует адекватное ему условие сходимости

$$\|\sigma\psi^s(t_0)\| < \|\Delta\psi^s(t_0)\|, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

т. е. норма ошибки должна быть меньше нормы самого отклонения (его истинного значения).

Список литературы

1. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
2. Flugge-Lotz I., Marbach H. The Optimal Control of Some Attitude Control Systems for Different Performace Criteria // J. Basis Eng. 1963. Vol. 85. P. 165–176.
3. Balakrishnan A. V., Neustadt L. W. Computing Methods in Optimization Problems. N. Y.: Academic Press Ins., 1964.
4. Ragab M. Z. Time Fuel Optimal Deconpling Control Problem // Adv. Model. Simul. 1990. Vol. 22. No. 2. P. 1–16.
5. Redmond J., Silverberg L. Fuel Consumption in Optimal Control // J. Guid. Control Dyn. 1992. Vol. 15. No. 2. P. 424–430.
6. Singh T. Fuel/Time Optimal Control of the Benchmark Problem // J. Guid. Control Dyn. 1995. Vol. 18. No. 6. P. 1225–1231.
7. Sachs G., Dinkelmann M. Reduction of Coolant Fuel Losses in Hypersonic Flight by Optimal Trajectory Control // J. Guid. Control Dyn. 1996. Vol. 19. No. 6. P. 1278–1284.
8. Иванов В. А., Кожневиков С. А. Одна задача синтеза оптимального по «расходу топлива» управления линейными объектами второго порядка с производными управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 4. С. 77–83.
9. Dewell L. D., Speyer J. L. Fuel-Optimal Periodic Control and Regulation in Constrained Hypersonic Flight // J. Guid. Control Dyn. 1997. Vol. 20. No. 5. P. 923–932.
10. Liu S. W., Singh T. Fuel/Time Optimal Control of Spacecraft Maneuvers // J. Guid. Control Dyn. 1997. Vol. 20. No. 2. P. 394–397.
11. Шевченко Г. В. Метод нахождения оптимального по минимуму расхода ресурсов управления для объектов специального вида // Автометрия. 2006. Т. 42, № 2. С. 49–67.
12. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
13. Александров В. М. Численный метод решения задачи линейного быстродействия // Журн. выч. мат. и мат. физ. 1998. Т. 38, № 6. С. 918–931.
14. Александров В. М. Приближенное решение линейной задачи на минимум расхода ресурсов // Журн. выч. мат. и мат. физ. 1999. Т. 39, № 3. С. 418–430.

Адрес автора

АЛЕКСАНДРОВ Владимир Михайлович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: vladalex@math.nsc.ru