УДК 517.946

А. А. Папин

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХ ВЗАИМОПРОНИКАЮЩИХ ВЯЗКИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Установлена однозначная разрешимость «в малом» по начальным данным однородной начально-краевой задачи для одномерных уравнений фильтрации двух вязких несжимаемых жидкостей.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, взаимопроникающие движения, разрешимость.

Введение

В основе классических математических моделей движения двухфазной жидкости в пористых средах лежит эмпирический закон Дарси, связывающий вектор скорости и градиент давления [1]. В настоящее время все большее применение находят модели, не использующие закон Дарси [2–4].

В данной работе предполагается, что насыщенная двухфазной жидкостью пористая среда является трехфазной системой, состоящей из пористой недеформируемой матрицы, объемная концентрация которой равна $\alpha_3 = 1-\phi$ (ϕ — пористость) и двух взаимопроникающих жидкостей с объемными концентрациями $\alpha_1 = \phi s$ и $\alpha_2 = \phi(1-s)$, где s — фазовая насыщенность первой жидкостью порового пространства ($\sum\limits_{j=1}^{3}\alpha_j = 1$, [3]). Уравнения баланса масс жидких фаз в отсутствие фазовых переходов имеют вид [2; 3]

$$\frac{\partial(\alpha_i\rho_i^o)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i\rho_i^o\vec{v_i}) = 0, \quad i=1,2,$$

где t — время, ρ_i^o — истинная плотность i-й фазы, $\vec{v_i}$ — истинная скорость ее движения, $\operatorname{div}\vec{v_i} = \sum\limits_{k=1}^{3}\frac{\partial v_i^k}{\partial x_k}$, (x_1,x_2,x_3) — декартовы координаты.

Уравнения баланса импульса имеют следующий общий вид [2; 3]:

$$\alpha_i\rho_i^o\Big(\frac{\partial\vec{v_i}}{\partial t} + (\vec{v_i}\cdot\nabla)\vec{v_i}\Big) = \operatorname{div}\sigma_i + \sum_j \vec{P_{ji}} + \alpha_i\rho_i^o\vec{g_i}, \quad i=1,2,$$

где σ_i — истинные фазовые напряжения, $\vec{P_{ji}}$ — интенсивность обмена импульсом между i-й и j-й фазами, $\vec{g_i}$ вектор внешних сил, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ — оператор градиента. Для тензора напряжений σ_i и вектора $\vec{P_{ji}}$ используются зависимости [2]

$$\sigma_i = \alpha_i(-p_i I + \lambda_i \operatorname{div}\vec{v_i}) + 2\alpha_i\mu_i D_i, \quad \sum_j \vec{P_{ji}} = p_i\nabla\alpha_i + \sum_j K_{ji}(\vec{v_j} - \vec{v_i}).$$

Здесь p_i — давление в i-й фазе, I — единичный тензор, λ_i и μ_i — соответственно коэффициенты сдвиговой и динамической вязкости ($\mu_i \ge 0$, $3\lambda_i + 2\mu_i \ge 0$), K_{ji} — коэффициент

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 80–87
© А. А. Папин, 2009

взаимодействия фаз, D_i — тензор скоростей деформации с компонентами $D_i^{kl} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i^k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_i^l}{\partial x_k}), \quad (k,l) \in \{1,2,3\}$.

В широком классе задач используется схема с общим давлением фаз ($p_1 = p_2 = p$) и при равенстве и постоянстве фазовых температур (модель Баклея—Леверетта [1]).

§ 1. Одномерная задача

Далее предполагается, что $\mu_i = \mathrm{const} > 0, \quad \lambda_i = -\frac{2}{3}\mu_i, \quad \rho_i^o = \mathrm{const} > 0, \quad i = 1,2,$ $K_{12} = K_{21} = K(s), \quad \phi = \phi(x)$.

В области $Q_T = \Omega \times (0,T)$ рассматривается одномерное движение двух вязких несжимаемых жидкостей, которое в эйлеровых координатах описывается системой уравнений [2; 3]:

$$\frac{\partial(\rho_i^o \alpha_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i^o \alpha_i v_i) = 0, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

$$\rho_i^o \alpha_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_i\ \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) = -\alpha_i \frac{\partial p}{\partial x} + \varphi_i + \rho_i^o \alpha_i g, \tag{2}$$

$$\alpha_1 = s_1\phi,\ \alpha_2 = s_2\phi,\ s_1 \equiv s,\ s_2 \equiv (1-s), \quad \varphi_1 = K(v_2 - v_1),\ \varphi_2 = -\varphi_1. \tag{3}$$

Здесь (x,t) — эйлеровы координаты, $x \in \Omega = \{x \mid 0 < x < 1\}$, $t \in I = \{t \mid 0 < t < T = \mathrm{const} > 0\}$; коэффициент взаимодействия фаз $K(s)$ и пористость $\phi(x)$ — заданные функции. Искомыми являются функции $(s(x,t), v_i(x,t), p(x,t))$.

Данная система уравнений рассматривается при условиях ($S = \partial\Omega$, $S_T = S \times (0,T)$)

$$v_i \mid_{\partial S_T} = 0, \quad v_i \mid_{t=0} = v_i^o(x), \quad s \mid_{t=0} = s^o(x), \quad \int\limits_0^1 p(x,t)dx = 0. \tag{4}$$

Относительно функций $s^o(x)$, $\phi(x)$ предполагается выполнение неравенств следующего вида:

$$0 < m_o \le s^o(x), \phi(x) \le M_o < 1 \tag{5}$$

для всех $x \in [0,1]$ и при фиксированных постоянных m_o, M_o.

Используемые в работе обозначения пространств $W_p^l(Q_T)$, $L_q(0,T;L_p(\Omega))$, $L_{q,r}(Q_T)$, $C^\alpha(\Omega)$, $C^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$ соответствуют принятым в [5].

Обобщенным решением задачи (1)–(4) называется совокупность функций (s, v_i, p), $i = 1,2$, $\quad s \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $\quad s_t \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$, $\quad v_i \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)) \bigcap L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$, $\quad v_{it}, p_x \in L_2(Q_T)$, удовлетворяющих уравнениям (1)–(3) почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Функции (s, v_i, p) называются классическим решением задачи (1)–(4), если они обладают непрерывными производными, входящими в систему (1)–(3), и удовлетворяют уравнениям, начальным и граничным условиям как непрерывные в $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0,T]$ функции.

Из результатов работы [6] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть данные задачи (1)–(4) удовлетворяют условиям* $K(s) \in C^2(0,1)$, $g \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ *и дополнительно к (5):* $v_i^0(x) \in W_2^1(\Omega)$, $\quad (s^0(x), \frac{d\phi}{dx}) \in W_2^2(\Omega)$, $v_i^0(0) = v_i^0(1) = 0, \quad i = 1,2$.

Тогда существует $t_0 > 0$, $t_0 \in (0,T)$ *такое, что для всех* $t \in (0,t_0)$ *существует единственное обобщенное решение* (s, v_i, p) *задачи и существуют числа* m, M *такие, что*

$$0 < m \le s(x,t) \le M < 1, \quad (x,t) \in \bar{Q}_{t_o} = \bar{\Omega} \times [0,t_o]. \tag{6}$$

Если дополнительно $g(x,t) \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, $\quad (s^0(x), v_i^0(x), \frac{d\phi}{dx}) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ *и выполнены условия согласования начальных и граничных данных, то в* $\bar{Q}_{t_o}$ *существует единственное классическое решение задачи, удовлетворяющее неравенству (6).*

Основной результат данной работы формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1 и дополнительно известно, что* $K = K_o(s)[s(1-s)]^{-\beta}$, $\quad \beta \ge 1$, $\quad K_o(s) \in [k_o^{-1}, k_o]$, $0 < k_o = \mathrm{const} < \infty$, $K_o(s) \in C^1[0,1]$. *Пусть*

$$\max\Big\{ \max_{0\le x\le 1} |\mu_1 v_1^o(x) - \mu_2 v_2^o(x)|, \sup_{0\le t<\infty} \int\limits_0^t \max_{0\le x\le 1} |(\rho_1^o - \rho_2^o) g(x,\tau)|\, d\tau \Big\} \le \Delta$$

и число Δ *настолько мало, что выполняется неравенство* $CT\Delta \le 1$, *в котором постоянная* C *вычисляется по данным задачи и не зависит от* T. *Тогда утверждения теоремы 1 справедливы для всех* $t \in [0,T]$.

Доказательство теоремы 2 основано на получении априорных оценок, постоянные в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения. Тогда локальное решение продолжается на весь промежуток $[0,T]$. Ключевым моментом является доказательство двух следующих утверждений:

1) функция $u(x,t) = \beta_1 v_1(x,t) - \beta_2 v_2(x,t)$, $\beta_1 = \mu_1/\mu$, $\beta_2 = \mu_2/\mu$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$ оценивается через $u(x,0)$ и $g(x,t)$ в норме $C(Q_T)$;

2) если величина $\|u\|_{C(Q_T)}$ достаточно мала, то производная насыщенности s_x ограничена в норме $C(Q_T)$ для всех $t \in [0,T]$.

В работе для краткости рассматривается случай $g = 0$, $\phi = \mathrm{const}$ (если $g(x,t)$ и ϕ — достаточно гладкие функции, то наличие g и ϕ в уравнениях (1)–(3) не является принципиальным). Кроме того, вводя $\phi\rho_i^o$ вместо ρ_i^o, исключаем функцию ϕ из рассмотрения.

Лемма 1. *Для любого* $t \in [0,T]$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^2 \rho_i^o s_i v_i^2\, dx \;+\; 2\int\limits_0^t \int\limits_0^1 \Big[\sum_{i=1}^2 \mu_i s_i v_{ix}^2 + K(v_1 - v_2)^2 \Big]\, dx d\tau \le$$

$$\le \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^2 \rho_i^o s_i^o (v_i^o)^2\, dx \;\equiv\; N_1. \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1) в силу (4) имеем $sv_1 + (1-s)v_2 = 0$. Уравнения (2) умножим соответственно на $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ и полученные равенства сложим. После интегрирования по Q_t и стандартных оценок приходим к (7) [7. С. 120].

Лемма 2. *Для любого $t \in [0,T]$ при $\beta \geq 1$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^1 \Big(\frac{s_x^2}{s(1-s)} + \frac{1}{s^\beta(1-s)^\beta}\Big)\,dx \;\leq\; C_0\Big(\int\limits_0^1 \Big[\frac{(s_x^o(x))^2}{s^o(x)(1-s^o(x))} + s^o(x)(v_1^o(x))^2 + $$
$$+ \big(1-s^o(x)\big)\big(v_2^o(x)\big)^2 + \frac{1}{(s^o(x)(1-s^o(x)))^\beta}\Big]\,dx + N_1\Big) \;\equiv\; N_2, \quad (8)$$

где постоянная C_0 зависит только от β, μ_i, ρ_i^o, m_o, M_o, k_o.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В уравнениях (2) производные v_{ix} заменим из соответствующих уравнений (1). Умножим преобразованные уравнения (2) на s_{ix}/s_i и полученные равенства сложим. Следуя доказательству леммы 1 из работы [7. С. 122], приходим к (8).

Известно [5. С. 50], что существует ограниченная измеримая функция $a(t)$ такая, что $0 \leq a(t) \leq 1$, $\quad s_i(a(t),t) = s_i^o(a(t))$. Поэтому из (8) следует

Лемма 3. *Если $\beta \geq 1$, то для любых $t \in [0,T]$, $x \in [0,1]$ справедливо неравенство (6), в котором $m = m_o e^{-N_2}$, $M = (1-M_o)e^{-N_2}$ при $\beta = 1$. Если $\beta > 1$, то $m = \kappa m_o$, $M = 1-\kappa(1-M_o)$, $\kappa = \Bigg(1 + \frac{1}{2}(\beta-1)N_2 m_o^{\frac{\beta-1}{2}}\Bigg)^{\frac{2}{1-\beta}}$.*

Следствием леммы 3 являются оценки ($\|u(t)\|^2 = \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx$)

$$\int\limits_0^t \Big(\|u_x(\tau)\|^2 + \|u(\tau)\|^2 + \|u(\tau)s_x(\tau)\|^2\Big)\,d\tau + \|u(t)\|^2 + \|s_x(\tau)\|^2 \;\leq\; C_1 N_2, \quad (9)$$

где постоянная C_1 зависит только от $\beta, \mu_i, \rho_i^o, m, M, k_o$.

Исключая из системы (2) давление, приходим к следующему уравнению для $u(x,t)$ ($u\,|_{\partial S_T} = 0, \quad u\,|_{t=0} = \beta_1 v_1^o(x) - \beta_2 v_2^o(x) \equiv u^o(x)$):

$$u_t - \nu(b_o(s)u_x)_x + \nu_1 \frac{b_o(s)}{a_\mu^3(s)a(s)} u s_x^2 + \frac{a_o(s)}{a^{1+\beta}(s)} u = \nu(b_o(s)\frac{a'(s)}{a_\mu^2(s)a(s)} -$$
$$-b_o'(s))u_x s_x - a_2(s)uu_x - a_3(s)u^2 s_x, \quad (10)$$

где $\nu_1 = \nu\beta_1\beta_2 > 0$, $\nu = \mu/\rho^o > 0$, $\rho^o = \rho_1^o + \rho_2^o > 0$, $a(s) = s(1-s)/a_\mu > 0$, $a_\mu = \beta_1(1-s) + \beta_2 s > 0$, $a_o(s) = K_o(s)b_o(s)/\rho^o a_\mu^{2+\beta}(s) > 0$, $b_o(s) = a_\mu(s)/a_\rho(s) > 0$, $a_\rho = \alpha_1(1-s) + \alpha_2 s > 0$, $\alpha_i = \rho_i^o/\rho^o > 0$, $i = 1,2$, $a_2(s) = a_1(s) + b'_o(s)/b_o^2(s)$, $a_3(s) = a_1'(s)/2 + a'(s)b'_o(s)/b_o^2(s)$, $a_1(s) = (\alpha_1(1-s)^2 - \alpha_2 s^2)/a_\mu^2$, $a_1'(s) \equiv da_1/ds$.

Все эти функции являются ограниченными. Поскольку $v_1 = (1-s)u/a_\mu$, то уравнению (1) при $i = 1$ можно придать вид

$$s_t + (a(s)u)_x = 0. \quad (11)$$

Положим

$$C_2 = \min\big\{\nu \min_{0\leq s\leq 1} b_o(s), \nu_1 \min_{0\leq s\leq 1}\frac{b_o(s)}{a_\mu^3(s)}, \min_{0\leq s\leq 1} a_o(s)\big\},$$

$$C_3 = \max\Big\{\max_{0\le s\le 1}|a_2'(s)|,\ \nu\max_{0\le s\le 1} b_o(s)\frac{|a'(s)|}{a_\mu^2(s)},\ \max_{0\le s\le 1} b_o(s),\ \max_{0\le s\le 1}|a_3(s)|\Big\}.$$

Лемма 4. *В условиях леммы 3 для всех $t\in[0,T]$ справедлива оценка*

$$\max_{0\le x\le 1}|u(x,t)| \le \max_{0\le x\le 1}|u^o(x)|\cdot\exp\{2C_1\frac{C_3^2}{C_2}N_2\} \equiv N_3. \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (10) умножим на $u^{2l-1}(x,t)$, $l>1$, и полученное равенство проинтегрируем по $x\in[0,1]$, проводя интегрирование по частям в члене $a_2(s)u^{2l}u_x$. В результате приходим к неравенству

$$\frac{1}{2l\mathrm{C}_2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 u^{2l}\,dx + (2l-1)\int\limits_0^1 u^{2l-2}u_x^2\,dx + \int\limits_0^1\Big[\frac{1}{a(s)}u^{2l}s_x^2 + \frac{1}{a^{1+\beta}(s)}u^{2l}\Big]\,dx \le$$
$$\le \frac{C_3}{C_2}\int\limits_0^1\Big[(1+\frac{1}{a(s)})|u_xs_x| + u^2|s_x|\Big]|u|^{2l-1}\,dx. \tag{13}$$

Выберем число l_o из условия

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{C_3}{C_2}\right)^2\frac{1}{(2l_o-1)}\max_{0\le x\le 1}\left(\frac{1}{a(s(x,t))}\right) \ge \frac{1}{4}.$$

Тогда при всех $l\ge l_o$ из (13) для функции $y(t) = \Big(\int\limits_0^1 u^{2l}\,dx\Big)^{1/2l}$ получим неравенство

$$\frac{dy(t)}{dt} \le \frac{C_3^2}{C_2}\max_{0\le x\le 1} a(s)u^2(x,t)\cdot y(t),$$

из которого с учетом (9) следует (12) [7. С. 125].

Производную $\frac{\partial v_i}{\partial x}$ выразим из уравнения (1) и подставим в уравнение (2). Получим

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial R_i}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\varphi_i}{s_i},\quad R_i\equiv \rho_i^o v_i + \frac{\mu_i}{s_i}\frac{\partial s_i}{\partial x},\quad i=1,2. \tag{14}$$

Введем функцию $R(x,t)$, положив

$$R(x,t) = R_1(x,t) - R_2(x,t) = \frac{\mu}{a(s)}\frac{\partial s}{\partial x} + b(s)u,\quad b(s)\equiv\rho^o\frac{a_\rho}{a_\mu}.$$

Исключая в (14) давление, приходим к следующему уравнению для $R(x,t)$ ($U\equiv a'(s)u$, $\delta=\mu_2\rho_1^o-\mu_1\rho_2^o$):

$$R_t + UR_x - \frac{\beta_1\beta_2}{a_\mu^3}uRs_x = -\frac{\delta}{\mu a_\mu^2}\Big[a(s)uu_x + \frac{\beta_1(1-s)-\beta_2 s}{a_\mu^2}u^2s_x\Big] -$$
$$-\frac{K}{a_\mu^2 a(s)}u \ \equiv\ f_1,\quad R\,|_{t=0} = R^o(x). \tag{15}$$

Положим $\rho(x,t) = a(s)R^2(x,t)$. В силу (11), (15) имеем [7. С. 128]

$$\rho_t + (U\rho)_x = 2a(s)Rf_1 \equiv f_2. \tag{16}$$

Для $\rho(x,t)$ и $f_2(x,t)$ справедливы оценки

$$\|\sqrt{\rho(t)}\|^2 \le C_4N_2,\quad |f_2|\le C_4\left(|Ruu_x| + \rho u^2 + |Ru^3| + |uR|\right),$$

в которых постоянная C_4 зависит только от m, M, μ_i, k_o, ρ_i^o, $i=1,2$.

Лемма 5. *В условиях леммы 4 для всех $t \in [0,T]$ справедливы неравенства*

$$\|s_x(t)u(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2 + \int\limits_0^t \|u_\tau(\tau)\|^2 d\tau \leq$$
$$\leq C_5 \left(\|s_x^o u^o\|^2 + \|u_x^o\|^2 + K_1 N_2\right) \equiv N_4, \tag{17}$$

$$\int\limits_0^t \Big(\int\limits_0^1 |u_{xx}|\, dx\Big)^2 d\tau \leq C_5\big(N_4 + (1 + N_2 + N_3)N_2\big), \tag{18}$$

где постоянная C_5 зависит только от m, M, k_o, μ_i, ρ_i^o, $i = 1, 2$,

$$K_1 = \sum_{i=1}^{4} (N_3)^i + (N_2)^3 + (N_2)^{3/2} + (N_2)^2 + N_2 N_3 + (N_2)^2 N_3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (10) представим в виде

$$\frac{a_\rho}{a_\mu} u_t - \nu u_{xx} - \nu \frac{a'(s)}{a(s)} u_x s_x + \frac{\nu\beta_1\beta_2}{\mu^2 a_\mu^3} u\rho = -\frac{Ku}{\rho^o a(s) a_\mu^2} - \frac{1}{2}\left(a_1(s)u^2\right)_x -$$
$$- \left(\frac{a_\rho}{a_\mu}\right)' u s_t - \frac{\nu\beta_1\beta_2 a(s)}{\mu^2 a_\mu^3}\left(2\rho^o \frac{a_\rho}{a_\mu} uR + (\rho^o \frac{a_\rho}{a_\mu})^2 u^2\right) u \equiv f_3. \tag{19}$$

Умножим уравнение (19) на $a(s)u_t$ и полученное равенство проинтегрируем по $x \in$ $\in [0,1]$. В левой части проведем интегрирование по частям, используя (16). В результате преобразований приходим к равенству ($\nu_2 \equiv \nu\beta_1\beta_2/\mu^2$):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 (\nu a(s)u_x^2 + \nu_2 \frac{a(s)}{a_\mu^3} u^2 \rho)\, dx + \int\limits_0^1 a(s)\frac{a_\rho}{a_\mu} u_t^2\, dx = -\frac{\nu}{2}\int\limits_0^1 a'(s) U s_x u_x^2\, dx -$$
$$-\frac{\nu}{2}\int\limits_0^1 a(s)a'(s)u_x^3\, dx - \frac{\nu_2}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{a(s)}{a_\mu^3}\right)' a(s)u^2\rho u_x\, dx - \nu_2 \int\limits_0^1 \frac{a(s)}{a_\mu^3} U u\rho u_x\, dx +$$
$$+ \frac{\nu_2}{2}\int\limits_0^1 \frac{a(s)}{a_\mu^3} u^2 f_2\, dx + \int\limits_0^1 a(s) f_3 u_t\, dx. \tag{20}$$

Оценка правой части (20) проводится так же, как в лемме 3 работы [7. С. 128]. В результате получим (17). Неравенство (18) следует из (17) и уравнения (19).

Оценки лемм 1–5 являются равномерными по t. Для получения искомой оценки s_x уравнение (15) умножим на функцию $a(s)R^{2p-1}(x,t)$, $p > 1$ и проинтегрируем по $x \in [0,1]$. В левой части тождества проведем интегрирование по частям, используя уравнение (11). Оценивая правую часть полученного равенства с помощью неравенства Гельдера, получим

$$\frac{dy}{dt} \leq C_6 \Big[\Big(\int\limits_0^1 (uR^2)^{2p} dx\Big)^{\frac{1}{2p}} + (\max_{0\leq x\leq 1} |u(x,t)|)^2 y(t) + V_p(t)\Big],$$

$$y(t) = \Big(\int\limits_0^1 a(s)R^{2p} dx\Big)^{\frac{1}{2p}}, \quad V_p = \Big(\int\limits_0^1 (uu_x)^{2p} dx\Big)^{\frac{1}{2p}} + \Big(\int\limits_0^1 u^{6p} dx\Big)^{\frac{1}{2p}},$$

где положительная постоянная C_6 зависит от μ_1, μ_2, ρ_1^o, ρ_2^o,m, M, k_o. Тогда

$$\max_{0\le x\le 1}|R(x,t)| \le C_6\Big[\sup_{0\le t<\infty}\max_{0\le x\le 1}|u(x,t)|\int_0^t\Big(\max_{0\le x\le 1}|R(x,\tau)|\Big)^2 d\tau + \\ + \max_{0\le x\le 1}|R^o(x)| + \int_0^t V_\infty(\tau)d\tau\Big] e^{C_6\int_0^t(\max\limits_{0\le x\le 1}|u(x,\tau)|)^2 d\tau}, \quad (21)$$

$V_\infty(t) = \max\limits_{0\le x\le 1}|u(x,\tau)u_x(x,t)| + (\max\limits_{0\le x\le 1}|u(x,t)|)^3$.

Пусть начальные данные таковы, что $\max\limits_{0\le x\le 1}|u^o(x)| \le \Delta$,

$$\Delta \le \frac{1}{2C_6^2 T}\Big[\max_{0\le x\le 1}|R^o(x)| + \sup_{0\le t<\infty}\int_0^t V_\infty(\tau)\,d\tau\Big]^{-1}, \quad (22)$$

где постоянная C_6 зависит только от данных задачи. В силу леммы 4 имеем $\sup\limits_{0\le t<\infty}\max\limits_{0\le x\le 1}|u(x,t)| \le C_6\Delta$, а из (21), (22) вытекает оценка

$$\max_{0\le x\le 1}|R(x,t)| \ \le\ 2C_6\Big(\max_{0\le x\le 1}|R^o(x)| + \sup_{0\le t<\infty}\int_0^t V_\infty(\tau)d\tau\Big) \ \equiv\ N_7.$$

Таким образом, $\max\limits_{0\le x\le 1}|s_x(x,t)| \le C_7(N_1,N_2,N_3,N_4,N_5,T)$. После этой оценки дальнейшее повышение гладкости решения проводится стандартным образом [6. С. 70]. Свойства давления определяются из уравнения (2) при $i=1$. При доказательстве единственности используется система (10), (11), (15) для (u, s, R). Это замечание завершает доказательство теоремы 2.

Список литературы

1. *Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971.

2. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1.

3. *Ведерников В. В., Николаевский В. Н.* Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1978. № 5. С. 165–169.

4. *Доровский В. Н.* Фильтрация в трещиновато-пористых средах: Препр./ Ин-т геол. и геофиз. СО АН СССР; № 15. Новосибирск, 1990. 8 с.

5. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.

6. *Папин А. А.* Разрешимость «в малом» по времени системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей// Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1999. Вып. 114. С. 71–83.

7. *Папин А. А.* Существование решения в «целом» уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. 1. Постановка задачи и вспомогательные утверждения// Сиб. журн. индустр. мат. 2006. Т. 9, № 2 (26). С. 116–136.

Материал поступил в редколлегию 19.09.2008

Адрес автора

ПАПИН Александр Алексеевич

РОССИЯ, 656049, Барнаул

Алтайский государственный

университет

тел.: (3852) 36-70-67

e-mail: papin@ab.ru