УДК 510.643

С. И. Мардаев

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ФОРМУЛ С ДВОЙНЫМИ МОДАЛЬНОСТЯМИ*

В статье изучается определимость неподвижных точек в модальных логиках. Доказана следующая теорема: наименьшая неподвижная точка оператора F_φ в конечной транзитивной модели определяется некоторой итерацией позитивной формулы $\varphi(p, x_1, \dots, x_n)$ с двойными модальностями.

Ключевые слова: модальная логика, определимость, неподвижная точка, двойные модальности, транзитивные модели.

В статье исследуется определимость неподвижных точек в нестандартных логиках. В модальных и временных логиках в тех случаях, когда удается доказать определимость наименьших неподвижных точек, имеется два варианта, как может быть устроена формула, определяющая неподвижную точку. Либо это прямая итерация основной формулы, либо во время итераций происходит модификация основной формулы. Первый вариант идейно проще, но при этом количество итераций может быть очень большим. С практической точки зрения интересно найти случаи, в которых количество итераций было бы сравнительно небольшим. Ранее [1] были рассмотрены Σ-формулы (в них из модальностей использован только ромбик, если считать все отрицания пронесенными внутрь). Для них была доказана определимость наименьших неподвижных точек итерацией основной формулы и дана оценка числа итераций. С точки зрения определимости ромбик гораздо лучше квадратика. Поэтому всегда было желание рассмотреть более сложный случай и каким-то образом вовлечь квадратик в построение формулы. Позднее результат из [1] был обобщен на DS-формулы [2]. В них все квадратики находятся под действием ромбиков. Тем не менее осталось стремление найти хорошие случаи, в котором квадратики могут быть внешними, т. е. не находиться под действием ромбиков. В этой статье мы указываем такой случай. Формулы в данном случае содержат модальности $\Diamond\Box$ и $\Box\Diamond$. Число итераций здесь оценивается сверху как экспонента от числа параметров.

Модальные пропозициональные формулы составляются из пропозициональной константы $\bot$ (ложь) и пропозициональных переменных $p, q, r, \dots$ с помощью бинарных связок $\wedge$, $\vee$ и унарных связок $\neg$, $\Box$ и $\Diamond$.

Шкала Крипке $\langle W, R \rangle$ состоит из непустого множества W и бинарного отношения R на W. *Модель Крипке* $\langle W, R, v \rangle$ состоит из шкалы Крипке $\langle W, R \rangle$ и означивания v.

Означивание v — это функция, которая каждой переменной q ставит в соответствие подмножество $v(q)$ множества W. Значение переменной q_i будем обозначать соответ-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00358) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-335.2008.1).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 55–58

ствующей прописной буквой Q_i. Функция v естественным образом продолжается на формулы: константе $\bot$ всегда соответствует пустое множество, связкам $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$ соответствуют дополнение, пересечение, объединение и следующие операции на множествах:

$$\Box A = \{x \mid \forall y\,(xRy \Rightarrow y \in A)\}, \quad \Diamond A = \{x \mid \exists y\,(xRy \wedge y \in A)\}.$$

Значение формулы $\alpha(q_1, \ldots, q_n)$ будем обозначать $\alpha(Q_1, \ldots, Q_n)$.

Пусть даны формула $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ от переменных $p, q_1, \ldots, q_n$ и модель Крипке $\langle W, R, v \rangle$, в которой заданы значения $Q_1, \ldots, Q_n$ переменных $q_1, \ldots, q_n$, а значение переменной p не задано. Формула φ определяет на модели $\langle W, R, v \rangle$ оператор $F_\varphi(P) = \varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$. Множество P называется неподвижной точкой оператора F, если выполняется $P = F(P)$. Если неподвижная точка P совпадает со значением некоторой формулы $\omega(q_1, \ldots, q_n)$, то формула ω *определяет* неподвижную точку P. Неподвижная точка называется *наименьшей*, если она содержится в любой неподвижной точке. Переменные $q_1, \ldots, q_n$ будем называть параметрами формулы $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$.

Введем обозначения

$$\varphi^0(q_1, \ldots, q_n) = \bot,$$
$$\varphi^{k+1}(q_1, \ldots, q_n) = \varphi\,(\varphi^k(q_1, \ldots, q_n), q_1, \ldots, q_n).$$

Эти формулы будем называть итерациями формулы φ. Кроме того, значения итераций в модели будем обозначать через P^k, т. е. положим $P^k = \varphi^k(Q_1, \ldots, Q_n)$.

Мы рассматриваем *позитивные* операторы, соответствующие формулам, в которые выделенная переменная p входит только положительно. Нетрудно заметить, что в этом случае последовательность множеств P^k возрастает. Если эта последовательность стабилизируется в некоторой модели, то на наименьшей неподвижной точке оператора в этой модели. В этом случае, если $P^{k+1} = P^k$, то $P^{k+2} = P^{k+1}$. Другими словами, если последовательность P^k стабилизировалась, то навсегда.

Модальную формулу назовем формулой *с двойными модальностями*, если в ней участвуют только модальности $\Diamond\Box$ и $\Box\Diamond$. Неформально говоря, ромбик и квадратик всегда ходят парой и образуют единую модальность. Напишем их семантику в явном виде:

$$\Diamond\Box A = \{x \mid \exists y\,(xRy \wedge \forall z\,(yRz \Rightarrow z \in A))\},$$
$$\Box\Diamond A = \{x \mid \forall y\,(xRy \Rightarrow \exists z\,(yRz \wedge z \in A))\}.$$

Итак, мы имеем модальную формулу $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ с двойными модальностями, в которую переменная p входит только положительно, и конечную транзитивную модель $\langle W, R, v \rangle$ и хотим найти определяющую формулу. В данной модели это будет, конечно, некоторая итерация формулы φ. Наша задача — найти верхнюю оценку числа итераций, не зависящую от модели. Докажем, что этой оценкой будет $2^n + 1$, где n — число параметров.

Как легко понять, транзитивная модель распадается на так называемые сгустки. По определению, один иррефлексивный элемент образует *сгусток*. Рассмотрим рефлексивный элемент u и множество элементов $\{v \mid uRvRu\}$. Это множество называется *сгустком*. Ясно, что сгустки не пересекаются, вся модель распадается на сгустки, и сгустки можно частично упорядочить естественным образом. Поэтому можно говорить о максимальных сгустках.

Теорема. *Пусть дана модальная формула $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ с двойными модальностями, в которую переменная p входит только положительно. Тогда формула φ^{2^n+1} определяет наименьшую неподвижную точку оператора F_φ в любой конечной транзитивной модели.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что все отрицания пронесены до переменных, учитывая $\neg\Diamond\Box = \Box\Diamond\neg$, а двойные отрицания уничтожены. Тогда перед вхождениями переменной p нет отрицаний.

Будем действовать так. Сначала рассмотрим модель, состоящую из отдельного сгустка, и посмотрим, как в ней достигается наименьшая неподвижная точка.

Типом элемента сгустка назовем множество переменных из $q_1, \ldots, q_n$ истинных на этом элементе. Элементы с одинаковым типом будем называть элементами *одного типа.* Рассмотрим произвольную формулу $\alpha(q_1, \ldots, q_n)$, не с двойными модальностями, а с обычными.

Лемма 1. *Формула α принимает одно и то же значение на элементах одного типа.*

Доказательство приводить не будем, оно проводится элементарно индукцией по построению формулы.

Таким образом, сгусток распадается не более чем на 2^n частей, состоящих их элементов одного типа. Рассмотрим возрастающую последовательность множеств P^k. Так как эти множества являются значениями формул, то они целиком содержат или не содержат множества элементов одного типа. Поэтому последовательность P^k стабилизируется на шаге, не превышающем 2^n.

Теперь зафиксируем некоторую конечную транзитивную модель. Рассмотрим некоторый элемент x нашей модели и поймем, как значение формулы на x зависит от значений на максимальных сгустках. Рассмотрим произвольную формулу $\alpha(q_1, \ldots, q_n)$.

Лемма 2. *Формула $\Diamond\Box\alpha$ истинна на элементе x тогда и только тогда, когда из x достижим максимальный сгусток, который либо состоит из иррефлексивного элемента, либо на всех элементах сгустка истинна α.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\Diamond\Box\alpha$ истинна на x. Значит из x достижим элемент y, на котором истинна $\Box\alpha$. Рассмотрим любой максимальный сгусток, достижимый из y. На элементах этого сгустка истинна формула $\Box\alpha$. Если сгусток не состоит из одного иррефлексивного элемента, то на всех его элементах истинна α. В другую сторону доказательство очевидно.

Аналогично устанавливается, что формула $\Box\Diamond\alpha$ истинна на элементе x тогда и только тогда, когда все достижимые из x максимальные сгустки не состоят из одного иррефлексивного элемента и все эти сгустки содержат элемент, на котором истинна α.

Итак, значения формул $\Diamond\Box\alpha$ и $\Box\Diamond\alpha$ зависят только от значений α на максимальных сгустках. Рассмотрим последовательность P^k. Она стабилизировалась на максимальных сгустках. Поэтому значения всех подформул формулы φ тоже стабилизировались на максимальных сгустках. Как мы поняли это означает, что значения всех подформул вида $\Diamond\Box\alpha$ и $\Box\Diamond\alpha$ стабилизировались на всей модели. Докажем, что мы достигли наименьшей неподвижной точки. Допустим, что $x \in P^{2^n+2} \setminus P^{2^n+1}$. В формулах φ^{2^n+2} и φ^{2^n+1} модализованные подформулы принимают одни и те же значения. Это означает, что изменение значения формулы произошло за счет подформулы, не содержащей модальностей. А значение подформулы, не содержащей модальности, на элементе x зависит только от значений переменных на x. Элемент x не принадлежит ни P^{2^n}, ни P^{2^n+1}. Но при этом при подставлении P^{2^n} значение формулы оказалось ложным в x, а при подставлении P^{2^n+1} значение оказалось истинным. Противоречие. Значит, не существует элементов в P^{2^n+2}, не принадлежащих P^{2^n+1}. Таким образом, $P^{2^n+2} = P^{2^n+1}$. Это означает, что P^{2^n+1} является неподвижной точкой. Теорема доказана.

Рассмотрим пример. Возьмем формулу φ следующую:

$$q_1 \vee (q_2 \wedge \Box\Diamond(p \wedge q_1)) \vee (q_3 \wedge \Box\Diamond(p \wedge q_2)) \vee \ldots \vee (q_n \wedge \Box\Diamond(p \wedge q_{n-1})).$$

В качестве модели возьмем сгусток, состоящий из элементов $x_1, \ldots, x_n$. Положим, что переменная q_i истинна на элементе x_i. Вычислим наименьшую неподвижную точку с помощью итераций. Сначала подставим значение переменной p, равное пустому множеству. Получим, что значение формулы $\varphi^1(q_1, \ldots, q_n)$ состоит из элемента x_1. Подставим это значение в формулу φ. Получим значение, состоящее из двух элементов $\{x_1, x_2\}$. Продолжая дальше, видим, что наименьшая неподвижная точка, состоящая из всего сгустка, достигается на n-ом шаге. По-видимому, можно придумать более изощренные примеры, в которых количество итераций было бы большим и даже достигало бы границы, указанной в теореме.

Из теоремы следует, что формула $\varphi^{2^n+1} \leftrightarrow \varphi^{2^n+2}$ истинна во всех конечных транзитивных моделях, а значит, общезначима во всех конечных транзитивных шкалах. Известно, что модальная логика **K4** характеризуется классом всех конечных транзитивных шкал. Поэтому из теоремы получаем

Следствие. *Логика* **K4** *содержит формулу* $\varphi^{2^n+1} \leftrightarrow \varphi^{2^n+2}$.

Список литературы

1. *Мардаев С. И.* Неподвижные точки модальных схем // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 5. С. 493–498.

2. *Мардаев С. И.* Неподвижные точки модальных DS-формул // Algebra and Model Theory 6. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 2007. P. 41–44.

Материал поступил в редколлегию 26.10.2008

Адрес автора

МАРДАЕВ Сергей Ильич
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: mardaev@math.nsc.ru