УДК 519.718.4

Т. А. Алдын-оол, А. И. Ерзин

О НАДЕЖНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СЕТЕЙ В РЕШЕТЧАТЫХ ГРАФАХ*

Рассматривается ориентированная прямоугольная решетка с одним источником и одним стоком, дуги которой направлены либо вправо, либо вверх и имеют одинаковую вероятность исправности. Под надежностью сети в работе понимается вероятность существования хотя бы одного исправного пути из источника в сток. В силу NP-трудности задачи вычисления надежности исследуемой решетки, представляет интерес получение полиномиально вычислимых оценок надежности. Данная работа посвящена поиску максимально надежной последовательно-параллельной сети, надежность которой является нижней оценкой надежности решетки.

Ключевые слова: надежность сети, последовательно-параллельные сети.

Введение

Одним из важнейших показателей надежности сети является вероятность связности подмножества вершин (терминалов) при известных вероятностях исправности ребер. При этом предполагается, что вершины графа абсолютно надежны, а состояния ребер (исправность/неисправность) — независимые события. Задача вычисления надежности сети является NP-трудной в общем случае [1], а также когда число терминалов равно двум [2] и когда сеть вкладывается в решетку [3]. При этом соответствующая задача распознавания свойств, в которой задан граф со множеством терминалов, вероятности исправности ребер и число P и спрашивается «действительно ли вероятность связности терминалов не менее P?», даже не принадлежит классу NP [4].

Среди точных способов вычисления надежности сети можно выделить алгоритмы, основанные на рассмотрении остовов или разрезов [5]; методы ветвления (Мура–Шеннона) [6]; подходы, основанные на эквивалентных преобразованиях графа [7]; методы декомпозиции [8]. Среди перечисленных подходов наиболее известен метод ветвления, или алгоритм Мура–Шеннона [6]. В силу формулы полной вероятности [9] надежность (вероятность связности) произвольного графа G можно представить в виде

$$P(G) = p_e P(\overline{G}(e)) + (1 - p_e) P(G \setminus e), \tag{1}$$

где p_e — надежность ребра e, $\overline{G}(e)$ — граф, стянутый по ребру e, а граф $G \setminus e$ получен из G удалением ребра e. Метод Мура–Шеннона заключается в последовательном применении формулы (1), что позволяет разбивать граф на подграфы меньшего размера. Для повышения эффективности используются различные модификации данного алгоритма [10].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-07-91300-ИНД_а).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 3–14
© Т. А. Алдын-оол, А. И. Ерзин, 2009

В силу того что точные методы имеют экспоненциальную трудоемкость и поэтому применяются лишь к графам малой размерности, в литературе рассматриваются различные *оценки* вероятности связности подмножества вершин. Для приближенного вычисления надежности сети часто используют методы Монте-Карло [11]. В самом простом варианте метода случайным образом генерируется некоторое множество графов и среди них подсчитывается доля графов со связным множеством терминалов. Многие оценки получены с помощью преобразований графа или основаны на перечислении подграфов. Впервые верхние и нижние оценки надежности двухтерминальной сети предложили Дж. Эзари и Ф. Прошан [12]. Их нижняя оценка имеет вид

$$P(G) \geq \prod_{k=1}^{N}\Big(1 - \prod_{e\in A_k}(1-p_e)\Big),$$

где A_k — множество ребер, образующих k-ый минимальный разрез, а N — число минимальных разрезов в графе. Но эти и подобные оценки, основанные на полном перечислении всех путей и разрезов, хоть и дают преимущество перед точными методами, все равно остаются экспоненциально вычислимыми. Одну из первых полиномиально вычислимых нижних оценок предложил В. П. Полесский [13]. В его работе рассматривается случай, когда множество терминалов состоит из всех вершин графа, но эта оценка легко адаптируется для случая двух терминалов и имеет вид

$$P(G) \geq 1 - \prod_{i=1}^{c}\Big(1 - \prod_{e\in T_i} p_e\Big), \tag{2}$$

где c — количество ребер в разрезе минимальной мощности, а $T_1, \ldots, T_c$ — множество реберно не пересекающихся путей графа G, связывающих терминалы.

Одним из немногочисленных классов сетей, для которых надежность вычисляется полиномиально, является множество последовательно-параллельных сетей (ППС) [14]. В данной работе вводится понятие *равномерной цепочки* и доказывается, что в квадратной решетке при определенных ограничениях на число дуг она является либо максимально надежной ППС, либо входит в максимально надежную ППС. При этом надежность равномерной цепочки дает нижнюю оценку надежности всей решетки.

§ 1. Постановка задачи

Решеткой G назовем вложенный в прямоугольник $a \times b$ ориентированный граф с источником $s = (0,0)$ и стоком $t = (a,b)$, вершинами которого являются пары (i,j) целых чисел, где $i \in \{0,1,\ldots,a\}$ и $j \in \{0,1,\ldots,b\}$. Две вершины решетки $v_1 = (i_1,j_1)$ и $v_2 = (i_2,j_2)$ связаны дугой (v_1,v_2), если расстояние между ними в метрике L_1 равно единице, т. е. $|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1$. При этом горизонтальные дуги направлены вправо, а вертикальные — вверх, вероятность исправной работы каждой дуги равна $p \in (0,1]$, и состояния дуг — это независимые события.

Подсетью $S \subseteq G$ назовем любой связный подграф с источником s и стоком t.

Надежностью $P(S)$ подсети S назовем вероятность существования хотя бы одного исправного пути из s в t.

Последовательно-параллельную сеть определим рекурсивно следующим образом [15]. Граф, состоящий из двух вершин s_0 и t_0, соединенных дугой, является ППС (с источником s_0 и стоком t_0). Пусть G_1 (с источником s_1 и стоком t_1) и G_2 (с источником s_2 и стоком t_2) две ППС. Тогда граф, полученный последовательным соединением сетей G_1 и G_2, т. е. граф, в котором $t_1 = s_2$, и граф, полученный параллельным соединением сетей G_1 и G_2, т. е. граф, в котором $s_1 = s_2$ и $t_1 = t_2$, являются ППС.

В работе рассматривается задача поиска максимально надежной ППС $S \subseteq G$, число дуг $|S|$ которой не превосходит заданного целого положительного числа N:

$$\begin{cases} P(S) \longrightarrow \max\limits_{S \subseteq G}; \\ |S| \leq N. \end{cases}$$

Обозначим решетку с источником c и стоком d через $G(c, d)$.

Звеном u назовем объединение двух непересекающихся путей в решетке G с общим источником i и с общим стоком j $(i \neq j)$. *Длиной звена* u назовем расстояние от i до j.

Цепочкой C в решетке $G(s,t)$ будем называть объединение $\bigcup\limits_{j=1}^{n} S_j$ звеньев $S_1, S_2, \ldots, S_n$ $(1 \leq n \leq b)$, при котором сток звена S_i совпадает с источником звена S_{i+1} $(1 \leq i \leq n-1)$, а источник звена S_1 совпадает с источником всей цепочки C, и сток звена S_n совпадает со стоком цепочки C.

Равномерной цепочкой в решетке $G(s, t)$ назовем такую цепочку, в которой число звеньев равно b и длины всех звеньев отличаются не более чем на единицу.

Как обычно, пусть $\lfloor w \rfloor$ — наибольшее целое число, не превышающее действительного числа w, а $\lceil w \rceil = -\lfloor -w \rfloor$ есть наименьшее целое число, не меньшее w.

Определение равномерной цепочки эквивалентно тому, что $a - b\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ ее звеньев имеют длину $\lceil \frac{a}{b} \rceil + 1$, а остальные — длину $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor + 1$.

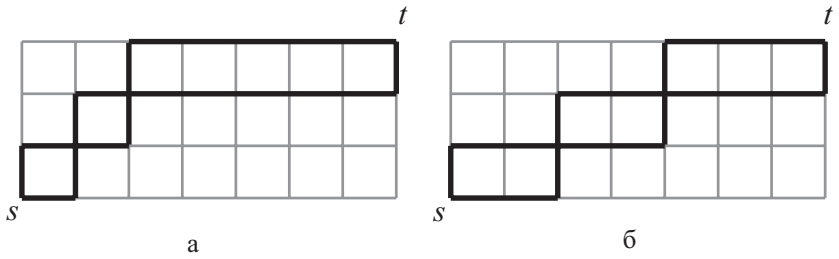

Рис. 1

Очевидно, равномерная цепочка определена с точностью до перестановки звеньев. На рис. 1 приведены примеры цепочек в решетке $G((0, 0), (7, 3))$. Цепочка на рис. 1,*а* не является равномерной, а цепочка на рис. 1,*б* равномерная.

§ 2. Основные результаты

Лемма 1. *Максимально надежной цепочкой является равномерная цепочка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение леммы индукцией по длине пути L из источника в сток.

При $L = 1$ и $L = 2$ утверждение справедливо.

Предположим, что утверждение верно для всех решеток, в которых длина пути из источника в сток не превосходит $L-1$, и докажем его для произвольной решетки $G(s,t)$ с длиной пути из источника в сток, равной L.

Пусть $S = \bigcup\limits_{j=1}^{n} S_j$ $(1 \le n \le b)$ — произвольная цепочка в решетке $G(s,t)$. Покажем, что надежность равномерной цепочки не менее надежности цепочки S. Для этого рассмотрим сначала два случая, когда не удается воспользоваться предположением индукции:

1) $b = 2$. В этом случае сеть S представляет собой либо звено, либо объединение двух звеньев.

2) $a = b = 3$, сеть $S = S_1 \cup S_2$, и вершина $(2,1)$ является одновременно стоком звена S_1 и источником звена S_2.

Несложно показать, что в каждом из этих случаев надежность равномерной цепочки не менее надежности цепочки S.

Пусть $a \ge b \ge 3$. Обозначим через (x_i, y_i) вершину, являющуюся стоком звена S_i и источником звена S_{i+1} $(1 \le i \le n-1)$. При этом $s = (x_0, y_0)$, $t = (x_n, y_n)$. Обозначим $a_i = x_i - x_{i-1}$ и $b_i = y_i - y_{i-1}$ $(1 \le i \le n)$. По предположению индукции для каждого звена S_i имеем $P(S_i) \le P(S_i')$, где S_i' — равномерная цепочка в решетке $G((x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i))$ $(1 \le i \le n)$. Если для некоторого звена S_i $(1 \le i \le n)$ имеет место соотношение $b_i > a_i$, то сеть $S' = \bigcup\limits_{j=1}^{n} S_j'$ содержит менее b звеньев. Используя предположение индукции, можно найти сеть S'', которая содержит b звеньев и для которой выполнено соотношение $P(S'') \ge P(S')$. Из справедливости неравенства $P(S'') \le P(\overline{S})$ следует соотношение $P(S') \le P(\overline{S})$, где $\overline{S}$ — равномерная цепочка в решетке $G(s,t)$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что сеть S' содержит b звеньев.

Применим к сети S' следующую итерационную процедуру, в результате которой длины ее звеньев станут отличаться не более чем на единицу. Пусть $S' = \bigcup\limits_{j=1}^{b} u_j$, где u_i $(1 \le i \le b)$ — звенья. Обозначим через $v_i = (\xi_i, \eta_i)$ вершину, являющуюся стоком звена u_i и источником звена u_{i+1} $(1 \le i \le n-1)$. При этом $v_0 = (\xi_0, \eta_0)$ — источник звена u_0, $v_b = (\xi_b, \eta_b)$ — сток звена u_b. Отметим, что надежность последовательно соединенных сетей равна произведению надежностей этих сетей. Отсюда следует, что надежность цепочки после перестановки звеньев не изменится. Поэтому будем считать, что звено u_b имеет наибольшую длину среди звеньев u_i $(1 \le i \le b)$.

Шаг 0. Для сети $C = \bigcup\limits_{j=1}^{b-1} u_j$ по предположению индукции имеем

$$P(C) \le P(C'), \tag{3}$$

где $C' = \bigcup\limits_{j=1}^{b-1} u_j'$ — равномерная цепочка в решетке $G(s, v_{b-1})$. Положим $u_i = u_i'$ $(1 \le i \le$ $\le b-1)$.

Без ограничения общности будем считать, что u_{b-1} — звено с меньшей длиной в сети C. Нетрудно показать, что

$$P(u_{b-1} \cup u_b) \leq P(u'_{b-1} \cup u'_b), \tag{4}$$

где $\xi'_{b-1} = \xi_{b-1} + 1$.

Шаг 1. Положим $u_{b-1} = u'_{b-1}$, $u_b = u'_b$. Если сеть $\bigcup\limits_{j=1}^{b} u_j$ не является равномерной цепочкой, то повторяем шаг 1.

Из соотношений (3) и (4) следует, что надежность полученной равномерной цепочки не менее надежности цепочки S', а значит, и S. Лемма доказана.

Замечание 1. Если цепочка S не является равномерной и $p \in (0,1)$, то надежность сети S *строго* меньше надежности равномерной цепочки.

Лемма 2. *Пусть дана ППС S, содержащая не более $2L$ дуг. Рассмотрим квадратную решетку $G(0,(\lceil \frac{L}{2} \rceil, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor))$. Утверждается, что в решетке $G(0,(\lceil \frac{L}{2} \rceil, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor))$ существует сеть D, надежность которой равна надежности сети S и число дуг не превосходит $2L$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение леммы индукцией по длине пути L из источника в сток.

При $L = 1$ и $L = 2$ утверждение справедливо.

Предположим, что утверждение верно для всех решеток, в которых длина пути из источника в сток не превосходит $L - 1$, и докажем утверждение для решетки $G(s,t)$ с длиной пути из источника в сток, равной L. Возможны два случая:

1) S есть последовательное соединение двух ППС S_1 и S_2;

2) S — это параллельное соединение двух ППС S_1 и S_2.

Во втором случае сети S_1 и S_2 — это два непересекающихся пути из источника s в сток t. В качестве сети D берем два непересекающихся пути из источника в сток в решетке $G(0,(\lceil \frac{L}{2} \rceil, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor))$.

Рассмотрим первый случай. Пусть число дуг в сети S меньше $2L$. В этом случае сеть S представима в виде последовательного соединения сети S' и дуги, при этом $|S'| \leq \leq 2(L-1)$. По предположению индукции в решетке $G(0,(\lceil \frac{L}{2} \rceil - 1, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor))$ существует сеть $\overline{D}$ такая, что $P(S') = P(\overline{D})$ и $|\overline{D}| \leq 2(L-1)$. В качестве сети D берем последовательное соединение сети $\overline{D}$ и дуги, соединяющей вершину $(\lceil \frac{L}{2} \rceil - 1, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor)$ с вершиной $(\lceil \frac{L}{2} \rceil, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor)$.

Далее будем считать, что число дуг в сети S равно $2L$. Пусть вершина (x,y) является стоком сети S_1 и источником сети S_2 и $l_1 = x + y$, $l_2 = L - l_1$. Возможны два случая:

а) Сеть S представима в виде последовательного соединения сетей S_1 и S_2, $|S_1| = 2l_1$ и $|S_2| = 2l_2$. Рассмотрим решетки $G(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1,2$, $\alpha_1 = s$, $\alpha_2 = (\lceil \frac{l_1}{2} \rceil, \lfloor \frac{l_1}{2} \rfloor)$, $\beta_1 = \alpha_2$, $\beta_2 = (\lceil \frac{L}{2} \rceil, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor)$. По предположению индукции в решетке $G(\alpha_i, \beta_i)$ существует сеть D_i, такая что $P(S_i) = P(D_i)$ и $|D_i| \leq 2l_i$, $i = 1,2$. Берем в качестве сети D последовательное соединение сетей D_i, $i = 1,2$.

б) Сеть S_1 есть параллельное соединение сетей S'_1 и S'_2, а сеть S_2 — это путь из вершины (x,y) в сток t. Пусть $|S_2| = m$. Если $m \geq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor - 1$, то в качестве сети D берем последовательное соединение сети S_1 и пути из вершины (x,y) в вершину $(\lceil \frac{L}{2} \rceil, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor)$.

Пусть $m \leq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor - 2$. Положим $|S'_1| = L - m + m_1$, $|S'_2| = L - m + m_2$, $m_1 + m_2 = m$. Без ограничения общности будем считать, что $m_i > 0$, $i = 1,2$. Сеть S'_i представляет собой

последовательное соединение сетей M_i, $\hat{S}_i$, N_i, где M_i — путь из источника s в вершину ξ_i, N_i — путь из вершины η_i в вершину (x, y), степень исхода вершины ξ_i равна двум, степень захода вершины η_i равна двум, $i = 1, 2$ (рис. 2).

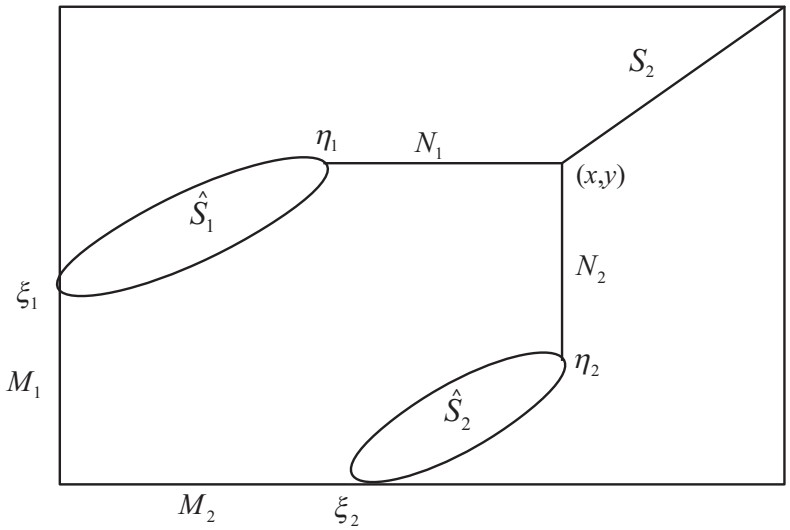

Рис. 2

По предположению индукции существует сеть C, такая что $P(C) = P(S_1)$ и $|C| \leq \leq 2L - m$. При этом сеть C есть параллельное соединение сетей C_i, $i = 1, 2$. Сеть C_i представляет собой последовательное соединение сетей $\overline{M}_i$, $\overline{S}_i$, $\overline{N}_i$, где $\overline{M}_i$ — путь из источника s в вершину γ_i, $\overline{N}_i$ — путь из вершины δ_i в вершину $(\lceil \frac{L-m}{2} \rceil, \lfloor \frac{L-m}{2} \rfloor)$, $i = 1, 2$, $\gamma_1 = (0, \lfloor \frac{L-m}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor)$, $\gamma_2 = (\lceil \frac{L-m}{2} \rceil - \lceil \frac{m_2}{2} \rceil, 0)$, $\delta_1 = (\lceil \frac{m_1}{2} \rceil, \lfloor \frac{L-m}{2} \rfloor)$, $\delta_2 = = (\lceil \frac{L-m}{2} \rceil, \lfloor \frac{m_2}{2} \rfloor)$. Берем в качестве сети D последовательное соединение сети C и пути из вершины $(\lceil \frac{L-m}{2} \rceil, \lfloor \frac{L-m}{2} \rfloor)$ в вершину $(\lceil \frac{L}{2} \rceil, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor)$. Лемма доказана.

Рассмотрим решетку $G(q, r)$, где $q = (0, 0)$, $r = (\lceil \frac{L}{2} \rceil, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor)$.

Утверждение 1. *Если в решетке $G(q, r)$ надежность дуги $p \leq \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0{,}7654$, то максимально надежной ППС, содержащей не более $2L$ дуг, является равномерная цепочка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение индукцией по длине пути L из источника в сток.

При $L = 1$ и $L = 2$ утверждение справедливо.

Предположим, что утверждение верно для всех решеток $G\left(0, \left(\lceil \frac{l}{2} \rceil, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor\right)\right)$, в которых длина пути из источника в сток не превосходит $L - 1$.

Докажем утверждение для решетки $G(q, r)$. Пусть S — произвольная ППС с числом дуг не более $2L$ в такой решетке. Покажем, что надежность равномерной цепочки не менее надежности сети S.

Возможны два случая:

1) S есть последовательное соединение двух ППС S_1 и S_2;

2) S — это параллельное соединение двух ППС S_1 и S_2.

Во втором случае сети S_1 и S_2 — это два непересекающихся пути из источника q в сток r и справедливость утверждения следует из леммы 1.

Рассмотрим первый случай. Если число дуг в сети S меньше $2L$, то справедливость утверждения следует из предположения индукции, леммы 1 и леммы 2. Далее будем считать, что число дуг в сети S равно $2L$. Пусть вершина (x, y) является стоком сети S_1 и источником сети S_2 и $l_1 = x + y$, $l_2 = L - l_1$. Если сеть S представима в виде последовательного соединения сетей S_1 и S_2, $|S_1| = 2l_1$ и $|S_2| = 2l_2$, то справедливость утверждения следует из предположения индукции, леммы 1 и леммы 2. В противном случае сеть S_1 есть параллельное соединение сетей S_1' и S_2', а сеть S_2 — это путь из вершины (x, y) в сток r. Пусть $|S_2| = m$. При этом $|S_1'| = L - m + m_1$, $|S_2'| = L - m + m_2$, $m_1 + m_2 = m$. Рассмотрим случай $m_i > 0$, $i = 1, 2$. Сеть S_i' представляет собой последовательное соединение сетей M_i, $\hat{S}_i$, N_i, где M_i — путь из источника q в вершину $\xi_i = (x_i', y_i')$, N_i — путь из вершины $\eta_i = (x_i'', y_i'')$ в вершину (x, y), степень исхода вершины ξ_i равна двум, степень захода вершины η_i равна двум, $i = 1, 2$ (см. рис. 2).

Надежность сети S равна

$$P(S) = p^m(1 - (1 - P(S_1'))(1 - P(S_2'))).$$

Нетрудно посчитать, что надежность равномерной цепочки C равна

$$P(C) = p^L(2 - p^2)^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor - 1}(2 - p^2 p^{\lceil \frac{L}{2} \rceil - \lfloor \frac{L}{2} \rfloor}).$$

Обозначим $A = (2 - p^2)^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor - 1}(2 - p^2 p^{\lceil \frac{L}{2} \rceil - \lfloor \frac{L}{2} \rfloor})$.

Рассмотрим сеть $\tilde{S}$ — параллельное соединение сетей $\tilde{S}_1$ и $\tilde{S}_2$. Сеть $\tilde{S}_i$ представляет собой последовательное соединение сетей M_i, $\hat{S}_i$, $\hat{N}_i$, где $\hat{N}_i$ — путь из вершины η_i в сток r, $i = 1, 2$. Нетрудно показать, что

$$P(S) < P(\tilde{S}). \tag{5}$$

Из леммы 2 следует, что существует такая сеть $\tilde{C}$, что

$$P(\tilde{S}) = P(\tilde{C}). \tag{6}$$

При этом сеть $\tilde{C}$ есть параллельное соединение сетей $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$. Сеть $\tilde{C}_i$ представляет собой последовательное соединение сетей $\tilde{M}_i$, C_i, $\tilde{N}_i$, где $\tilde{M}_i$ — путь из источника q в вершину γ_i, $\tilde{N}_i$ — путь из вершины δ_i в сток r. При этом $\gamma_1 = (0, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor)$, $\gamma_2 = (\lceil \frac{L}{2} \rceil - \lceil \frac{m_2}{2} \rceil, 0)$, $\delta_1 = (\lceil \frac{m_1}{2} \rceil, \lfloor \frac{L}{2} \rfloor)$, $\delta_2 = (\lceil \frac{L}{2} \rceil, \lfloor \frac{m_2}{2} \rfloor)$.

Рассмотрим сеть $\overline{C}$ — параллельное соединение сетей $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$. Сеть $\overline{C}_i$ представляет собой последовательное соединение сетей $\tilde{M}_i$, $\overline{C}_i$, $\tilde{N}_i$, где $\overline{C}_i$ — равномерная цепочка в решетке $G(\gamma_i, \delta_i)$, $i = 1, 2$.

Надежность сети $\overline{C}$ равна

$$P(\overline{C}) = p^L(A_1 + A_2 - p^L A_1 A_2),$$

где $A_i = (2 - p^2)^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor - 1}(2 - p^2 p^{\lceil \frac{m_i}{2} \rceil - \lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor})$, $i = 1, 2$. Из предположения индукции следует

$$P(\tilde{C}) \leq P(\overline{C}). \tag{7}$$

Неравенство $P(\overline{C}) \leq P(C)$ эквивалентно

$$A_1 + A_2 - p^L A_1 A_2 \leq A. \tag{8}$$

Из соотношения

$$A_1 + A_2 \leq A \tag{9}$$

будет следовать неравенство (8), а с учетом (5), (6), (7) — и доказываемое утверждение. Докажем неравенство (9).

Неравенство (9) эквивалентно

$$\sum_{i=1}^{2}(2-p^2)^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor - 1}(2 - p^2 p^{\lceil \frac{m_i}{2} \rceil - \lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor}) \leq (2-p^2)^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor - 1}(2 - p^2 p^{\lceil \frac{L}{2} \rceil - \lfloor \frac{L}{2} \rfloor}). \tag{10}$$

Нетрудно показать справедливость неравенства

$$\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m_2}{2} \rfloor + 2 \leq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor. \tag{11}$$

Учитывая неравенства

$$(2-p^2)^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor - 1}(2 - p^2 p^{\lceil \frac{m_i}{2} \rceil - \lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor}) \leq (2-p^2)^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor + 1},$$

$$(2-p^2)^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \leq (2-p^2)^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor - 1}(2 - p^2 p^{\lceil \frac{L}{2} \rceil - \lfloor \frac{L}{2} \rfloor})$$

и соотношение (11), выпишем более строгое, чем (10), неравенство

$$\sum_{i=1}^{2}(2-p^2)^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor + 1} \leq (2-p^2)^{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m_2}{2} \rfloor + 2}. \tag{12}$$

Соотношение (12) имеет место, если $(2-p^2)^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor + 1} \geq 2$, $i = 1, 2$. Из справедливости последних соотношений при $p \leq \sqrt{2-\sqrt{2}}$ следует и верность соотношения (10) при данном p.

Рассмотрим случай, когда одно из m_i, $i = 1, 2$, равно 0. Без ограничения общности будем считать $m_2 = 0$, тогда $m_1 = m$. В этом случае неравенство (12) имеет вид

$$(2-p^2)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1} + 1 \leq (2-p^2)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}. \tag{13}$$

Неравенство (13) эквивалентно

$$1 \leq (2-p^2)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}(1-p^2). \tag{14}$$

Если $m \geq 4$, соотношение (14) имеет место. Случаи $m = 2, 3$ легко проверить непосредственно. Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Если в решетке $G(q, r)$ надежность дуги $p \leq \sqrt{2-\sqrt{2}}$, то максимально надежной ППС, содержащей не более $L + K$ дуг, $0 < K < L$, является ППС, представляющая собой последовательное соединение $L - K$ дуг и равномерной цепочки в решетке $G(0, (\lceil \frac{K}{2} \rceil, \lfloor \frac{K}{2} \rfloor))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S — произвольная ППС с числом дуг не более $L+K$, $0<K<L$, в решетке $G(q,r)$. Очевидно, сеть S содержит не менее $L-K$ мостов. Без ограничения общности будем считать, что $S=S'\cup M$, где M — путь из вершины (x,y) в сток r, $x+y=K$. Число дуг в сети S' не превосходит $2K$, откуда по лемме 2 следует, что в решетке $G(0,(\lceil\frac{K}{2}\rceil,\lfloor\frac{K}{2}\rfloor))$ существует сеть C, содержащая не более $2K$ дуг и такая, что

$$P(S')=P(C). \tag{15}$$

Рассмотрим сеть $\overline{C}\cup\overline{M}$, где $\overline{C}$ — равномерная цепочка в решетке $G(0,(\lceil\frac{K}{2}\rceil,\lfloor\frac{K}{2}\rfloor))$, $\overline{M}$ — путь из вершины $(\lceil\frac{K}{2}\rceil,\lfloor\frac{K}{2}\rfloor)$ в сток r. По утверждению 1 имеет место соотношение

$$P(C)\le P(\overline{C}),$$

откуда с учетом неравенства (15) и равенства $P(M)=P(\overline{M})$ следует справедливость утверждения. Утверждение доказано.

Рассмотрим квадратную решетку $G(c,d)$ с длиной пути из c в d, равной $2n$. Определим рекурсивно сеть $S^k_{m_1^k,m_2^k}$ в решетке $G(c,d)$, $k\le\lceil\frac{2n-1}{3}\rceil$, $0\le m_i^k\le n-1$, $i=1,2$. Обозначим через $S^1_{0,0}$ равномерную цепочку в решетке $G(c,d)$. Через $S^k_{m_1^k,m_2^k}$ в решетке $G(c,d)$ будем обозначать параллельное соединение сетей S_1 и S_2. При этом S_i есть последовательное соединение сетей M_i, $S^{k_i}_{m_1^{k_i},m_2^{k_i}}$, N_i, где M_i — путь из источника c в вершину u_i', $|M_i|=m_i^k$, N_i — путь из вершины u_i'' в сток d, $i=1,2$. Решетка $G(u_i',u_i'')$ — квадратная, $k_1+k_2=k$. Длины путей M_i и N_i равны, $i=1,2$. На рис. 3 изображена сеть $S^3_{1,5}=S^2_{3,1}\cup S^1_{0,0}$ в решетке $G(0,(8,8))$.

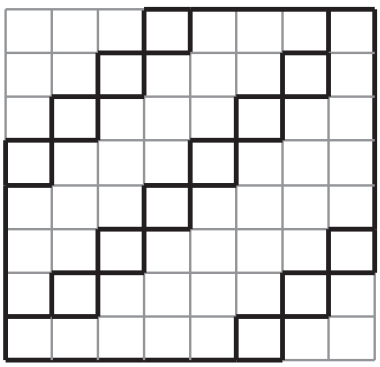

Рис. 3

Обозначим через H_k множество сетей $S^k_{m_1^k,m_2^k}$, $k\le\lceil\frac{2n-1}{3}\rceil$, $0\le m_i^k\le n-1$, $i=1,2$. Рассмотрим квадратную решетку $G(0,(a,a))$.

Утверждение 3. *Если $p\le p_0=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\approx 0{,}618$, то максимально надежной ППС в множестве $\bigcup\limits_k H_k$ является равномерная цепочка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надежность равномерной цепочки в данном случае равна

$$P_1=p^{2a}(2-p^2)^a.$$

Надежность максимально надежной ППС в множестве H_2 равна

$$P_2 = p^{2a}(2-p^2)^{a-1} + p^{2a}(2-p^2)^{a-2} - p^{4a}(2-p^2)^{2a-3}.$$

Рассмотрим разность $P_2 - P_1$:

$$P_2 - P_1 = p^{2a}(2-p^2)^{a-2}((2-p^2) + 1 - (2-p^2)^2 - p^{2a}(2-p^2)^{a-1}).$$

Функция $f(p) = (2-p^2) + 1 - (2-p^2)^2$ монотонно возрастает при $p \in (0,1)$ и имеет единственный корень p_0. Из соотношений

$$p^{2a}(2-p^2)^{a-2} > 0 \quad \text{и} \quad p^{2a}(2-p^2)^{a-1} > 0 \quad \text{при} \quad p \in (0,1)$$

следует, что при $p \le p_0$ надежность равномерной цепочки в квадратной решетке больше надежности любой ППС из множества H_2. Отсюда нетрудно показать, что надежность равномерной цепочки не менее надежности любой ППС из множества $\bigcup\limits_k H_k$. Утверждение доказано.

3. Сравнение надежности ППС и решетки

Надежность максимально надежной ППС $\tilde{S}$ является нижней оценкой надежности решетки G. Из соотношения

$$P(\tilde{S}) \ge P(\overline{S}) \quad \text{при} \quad p \in (0,1],$$

где $\overline{S}$ — равномерная цепочка, следует следующая нижняя оценка надежности решетки $G(s,t)$:

$$P(G) \ge P(\overline{S}) = p^{a+b}(2 - p^{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor + 1})^{b-z}(2 - p^{\lceil \frac{a}{b} \rceil + 1})^{z}, \tag{16}$$

где $z = a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor b$ — число звеньев большей длины.

В случае $a = b$ с учетом утверждения 3 нижняя оценка надежности решетки имеет вид

$$P(G) \ge \overline{P}, \tag{17}$$

где $\overline{P} = P_1$ при $p \le p_0$ и $\overline{P} = \max\{P_1, P_2\}$ при $p > p_0$.

Оценка (2) для решетки G имеет вид

$$P(G) \ge 1 - (1 - p^{a+b})^2. \tag{18}$$

Оценки (16) и (17) при любом $p \in (0,1)$ лучше оценки (18). Так, например, для решетки $G(0,(10,10))$ при $p = 0{,}9$ оценка (17) дает соотношение $P(G) \ge 0{,}786$, а оценка (18) — соотношение $P(G) \ge 0{,}228$.

Заключение

В работе рассматривается задача нахождения максимально надежной последовательно-параллельной сети (ППС) в ориентированном решетчатом графе, в котором вероятность исправного функционирования каждой дуги равна p. Надежность максимально надежной ППС — это нижняя оценка надежности решетки.

Введено понятие равномерной цепочки, которая является частным случаем ППС. Показано, что в квадратной решетке в случае $p \leq \sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0{,}7654$ равномерная цепочка является максимально надежной ППС, содержащей не более $2L$ дуг, где L — длина пути из источника в сток. Более того, в этом случае показано, что максимально надежной ППС, содержащей не более $L+K$ дуг, $0 < K < L$, является ППС, представляющая собой последовательное соединение $L-K$ дуг и равномерной цепочки.

Для квадратной решетки доказано, что в случае $p \leq \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \approx 0{,}618$ максимально надежной ППС во множестве сетей, состоящих из нескольких равномерных цепочек, является равномерная цепочка.

В результате получена нижняя оценка надежности решетки, которая при любом значении $p \in (0,1)$ лучше известной полиномиально вычислимой оценки (2).

Список литературы

1. *Rosenthal A.* Computing Reliability of Complex Systems // Doctoral Thesis, Dept. of Electrical Engineering and Computer Science. Berkeley, Univ. of California, 1974.

2. *Valiant L. G.* The Complexity of Enumeration and Reliability Problems // SIAM J. Comput. 1979. Vol. 8. No. 3. P. 410–421.

3. *Provan J. S.* The Complexity of Reliability Computations in Planar and Acyclic Praphs // SIAM J. Comput. 1986. Vol. 15. No. 3. P. 694–702.

4. *Garey M. R., Johnson D. S.* Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisko: W. H. Freeman, 1979.

5. *Abraham J. A.* An Improved Algorithm for Network Reliability // IEEE Trans. Reliability. 1979. Vol. R–28. No. 1. P. 58–61.

6. *Мур Э., Шеннон К.* Надежные схемы из ненадежных реле // Кибернетический сб. М.: Иностр. лит, 1960. Вып. 1. С. 109–148.

7. *Shooman A. M.* Algorithms for Network Reliability and Connection Availability Analysis // Electro/95 International. Professional Program Proceedings. 1995. P. 309–333.

8. *Rosenthal A.* Computing the Reliability of Complex Networks // SIAM J. Appl. Math. 1977. Vol. 32. No. 2. P. 384–393.

9. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.

10. *Родионова О. К.* Исследование и разработка методов анализа и синтеза оптимально-связных информационных сетей: Дис. ... канд. техн. наук. Новосибирск, 2003.

11. *Luby M. G.* Monte-Carlo Methods for Estimating System Reliability // Tech. Rep. 84/168. Computer Science Division. Berkeley, Univ. of California, 1982.

12. *Райншке К., Ушаков И. А.* Оценка надежности систем с использованием графов. М.: Радио и связь, 1988.

13. *Polesskii V. P.* A Lower Boundary for the Reliability of Information Networks // Prob. Inf. Trans. 1971. Vol. 7. No. 2. P. 165–171.

14. *Misra K. B.* An Algorithm for the Reliability Evaluation of Redundant Networks // IEEE Trans. Reliability. 1970. Vol. R-19. No. 4. P. 146–151.

15. *Дискретная* математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. Т. 1.

Материал поступил в редколлегию 18.11.2008

Адреса авторов

АЛДЫН-ООЛ Татьяна Андреевна
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
ул. Пирогова, 2, Новосибирский
государственный университет
e-mail: aldynoolt@rambler.ru

ЕРЗИН Адиль Ильясович
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: adilerzin@math.nsc.ru