УДК 517.956.4

М. С. Туласынов

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ С ПОЛНОЙ МАТРИЦЕЙ УСЛОВИЙ СКЛЕИВАНИЯ*

В этой статье исследуется корректность разрешимости краевой задачи для одного параболического уравнения с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склеивания. Результатом настоящей работы является и явное описание условий разрешимости поставленной краевой задачи.

Ключевые слова: параболическое уравнение с меняющимся направлением времени, пространство Гельдера, неоднородное уравнение Фредгольма, сингулярное интегральное уравнение.

В области $Q = (-\infty, \infty) \times (0, T)$ рассматривается параболическое уравнение с меняющимся направлением времени

$$u_t \operatorname{sign} x = u_{xx}. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) ищется из пространства Гельдера $H^{2l+\gamma, l+\frac{\gamma}{2}}(Q)$ $(l \in N, \gamma \in (0,1))$ [1. С. 25], которое удовлетворяет начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad x > 0, \quad u(x,T) = \varphi_2(x), \quad x < 0, \tag{2}$$

общим условиям склеивания

$$\begin{pmatrix} u(-0,t) \\ u_x(-0,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(+0,t) \\ u_x(+0,t) \end{pmatrix}, \quad 0 < t < T, \tag{3}$$

где a_{ij} — заданные постоянные.

Предполагается, что матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ является невырожденной, т. е.

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0. \tag{4}$$

В противном случае поставленная задача распадется на две независимые подзадачи. Действительно, вырожденность матрицы A влечет за собой существование связи между $u(-0,t)$ и $u_x(-0,t)$, и тогда в области $Q^- = (-\infty, 0) \times (0, T)$ возникает независимая подзадача.

Аналогичная краевая задача (1)–(3) для единичной матрицы A рассматривалась в монографии С. А. Терсенова [2].

*Работа поддержана грантом «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» и Советом программы (Протокол АХ-23/11пр от 12 декабря 2008 г.).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 57–68

Для удобства вместо уравнения (1) будем рассматривать систему уравнений

$$\begin{cases} u_{1t} = u_{1xx}, \\ -u_{2t} = u_{2xx}, \end{cases} \tag{5}$$

в области $Q^+ = (0,\infty) \times (0,T)$. Тогда поставленная задача (1)–(3) для системы (5) переформулируется следующим образом: найти ограниченные решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, системы (5) в области Q^+ из пространства $H^{2l+\gamma,l+\frac{\gamma}{2}}(Q^+)$, которые удовлетворяют начальным условиям

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u(x,T) = \varphi_2(-x), \quad x > 0 \tag{6}$$

и условиям склеивания

$$\begin{pmatrix} u_2(0,t) \\ -u_{2x}(0,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(0,t) \\ u_{1x}(0,t) \end{pmatrix}, \quad 0 < t < T. \tag{7}$$

§ 1. Единственность решения

Пусть поставленная краевая задача (5)–(7) имеет два отличных друг от друга решения (u_1,u_2) и $(\tilde{u_1},\tilde{u_2})$. Тогда функции $\nu_1 = u_1 - \tilde{u_1}$ и $\nu_2 = u_2 - \tilde{u_2}$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \nu_{1t} &= \nu_{1xx}, \\ -\nu_{2t} &= \nu_{2xx}, \end{cases} \tag{8}$$

начальным условиям

$$\nu_1(x,0) = \nu_2(x,T) = 0, \quad x > 0 \tag{9}$$

и условиям склеивания

$$\begin{pmatrix} \nu_2(0,t) \\ -\nu_{2x}(0,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(0,t) \\ \nu_{1x}(0,t) \end{pmatrix}, \quad 0 < t < T. \tag{10}$$

Тогда, интегрируя тождества

$$\begin{cases} \nu_1\left(\nu_{1t} - \nu_{1xx}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \nu_1^2}{\partial t} + \nu_{1x}^2 - \frac{\partial(\nu_1\cdot\nu_{1x})}{\partial x} = 0, \\ \nu_2\left(-\nu_{2t} - \nu_{2xx}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial \nu_2^2}{\partial t} + \nu_{2x}^2 - \frac{\partial(\nu_2\cdot\nu_{2x})}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

по области Q^+ и применяя начальные условия (9), получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty \nu_1^2(x,T)dx + \iint_{Q^+} \nu_{1x}^2 dxdt + \int_0^T \nu_1(0,t)\cdot\nu_{1x}(0,t)dt = 0, \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty \nu_2^2(x,0)dx + \iint_{Q^+} \nu_{2x}^2 dxdt + \int_0^T \nu_2(0,t)\cdot\nu_{2x}(0,t)dt = 0. \end{cases} \tag{11}$$

В силу условий склеивания (10) из системы уравнений (11) получим

$$(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty \nu_1^2(x,T)dx + \iint_{Q^+} \nu_{1x}^2 dxdt\right) + \frac{1}{2}\int_0^\infty \nu_2^2(x,0)dx +$$

$$+\iint\limits_{Q^+}\nu_{2x}^2dxdt-a_{11}a_{21}\int\limits_0^T\nu_2^2(0,t)dt-a_{12}a_{22}\int\limits_0^T\nu_{2x}^2(0,t)dt=0.$$

Откуда при выполнении условий

$$a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}>0,\quad a_{11}a_{21}\le 0,\quad a_{12}a_{22}\le 0, \tag{12}$$

получаем, что $\nu_i\equiv 0,\quad i=1,2.$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Если выполнены условия* (12), *то краевая задача* (1)–(3) *может иметь не более одного решения.*

§ 2. Существование решения

Будем считать, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(-x)$ принадлежат пространству $H^{2l+\gamma}(0,\infty)$. Без ограничения общности будем считать, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(-x)$ продолжены на значения $x<0$ с сохранением пространству $H^{2l+\gamma}(-\infty,\infty)$ [2; 3]. Решения u_1 и u_2 системы (5) будем искать в виде потенциалов простого слоя

$$\begin{gathered}
u_1(x,t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}(t-\tau)^{-\frac12}\nu(\tau)d\tau+w_1(x,t),\\
u_2(x,t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_t^T e^{-\frac{x^2}{4(\tau-t)}}(\tau-t)^{-\frac12}\mu(\tau)d\tau+w_2(x,t),\\
w_1(x,t)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4t}}\varphi_1(\zeta)d\zeta,\\
w_2(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(T-t)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4(T-t)}}\varphi_2(\zeta)d\zeta.
\end{gathered} \tag{13}$$

Тогда функции, представленные формулами (13), удовлетворяют системе уравнений (5) и начальным условиям (6) соответственно.

Функции $\psi_1(t)=u_1(0,t)$ и $\psi_2(t)=u_2(0,t)$ удовлетворяют условиям

$$\psi_1^{(s)}(t)=\varphi_1^{(2s)}(0),\quad \psi_2^{(s)}(t)=\varphi_2^{(2s+1)}(0),\quad s=0,1,\dots,l-1. \tag{14}$$

Легко проверить, что условия (14) эквивалентны следующим условиям согласования:

$$\nu^{(s)}(0)=\mu^{(s)}(T)=0,\quad s=0,1,\dots,l-1. \tag{15}$$

Таким образом, нужно найти функции $\nu(t)$ и $\mu(t)$ из пространства $H^{l-1+\frac{\gamma+1}{2}}(0,T)$, которые удовлетворяют условиям (15)

Если функции, представленные формулами (13), удовлетворить условиям склеивания (7), то получим

$$\begin{cases} a_{12}\nu(t) - \dfrac{a_{11}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^t \dfrac{\nu(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_t^T \dfrac{\mu(\tau)}{(\tau-t)^{1/2}}d\tau = \Phi_0(t), \\ \mu(t) = -a_{22}\nu(t) + \dfrac{a_{21}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^t \dfrac{\nu(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau + \Phi_1(t), \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\Phi_0(t) = -a_{11}\omega_1(0,t) - a_{12}\omega_{1x}(0,t) + \omega_2(0,t),$$
$$\Phi_1(t) = -\omega_{2x}(0,t) - a_{21}\omega_1(0,t) - a_{22}\omega_{1x}(0,t).$$

Тогда функции $\Phi_0(t)$ и $\Phi_1(t)$ принадлежат пространствам $H^{l+\frac{\gamma}{2}}(0,T)$ и $H^{l-1+\frac{\gamma+1}{2}}(0,T)$ соответственно, если $a_{12} = 0$, иначе принадлежат пространству $H^{l-1+\frac{\gamma+1}{2}}(0,T)$.

Предположим, что функции $\nu(t)$ и $\mu(t)$ принадлежат пространству $H^{l-1+\frac{\gamma+1}{2}}(0,T)$. Тогда в силу (15) из системы (16) следует, что

$$\begin{cases} a_{12}\nu(T) - \dfrac{a_{11}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^T \dfrac{\nu(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau = \Phi_0(T), \\ -a_{22}\nu(T) - \dfrac{a_{21}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^T \dfrac{\nu(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau + \Phi_1(T) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

При выполнении условий (17) систему (16) можно переписать так:

$$\begin{cases} a_{12}\left(\nu(t)-\nu(T)\right) - \dfrac{a_{11}}{\sqrt{\pi}}\left(\displaystyle\int\limits_0^t \dfrac{\nu(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau - \displaystyle\int\limits_0^T \dfrac{\nu(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau\right) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_t^T \dfrac{\mu(\tau)}{(\tau-t)^{1/2}}d\tau = \Phi_0(t) - \Phi_0(T), \\ \mu(t) = -a_{22}\left(\nu(t)-\nu(T)\right) + \dfrac{a_{21}}{\sqrt{\pi}}\left(\displaystyle\int\limits_0^t \dfrac{\nu(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau - \displaystyle\int\limits_0^T \dfrac{\nu(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau\right) + \\ \qquad\qquad + \Phi_1(t) - \Phi_1(T), \end{cases} \tag{18}$$

Далее, если $l > 1$, то, требуя выполнения условия

$$\mu(0) = \Phi_1(0), \tag{19}$$

возьмем первую производную в системе уравнений (18):

$$\begin{cases} a_{12}\nu'(t) - \dfrac{a_{11}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^t \dfrac{\nu'(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_t^T \dfrac{\mu'(\tau)}{(\tau-t)^{1/2}}d\tau = \Phi_0'(t), \\ \mu'(t) = -a_{22}\nu'(t) + \dfrac{a_{21}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^t \dfrac{\nu'(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau + \Phi_1'(t). \end{cases} \tag{20}$$

Из системы (20) следует, что

$$\begin{cases} a_{12}\nu'(T) - \dfrac{a_{11}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^T \dfrac{\nu'(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau = \Phi_0^{(l)}(t), \\ -a_{22}\nu'(T) + \dfrac{a_{21}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^T \dfrac{\nu'(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau + \Phi_1^{(l)}(t) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

При выполнении условий (21) систему (20) можно переписать так:

$$\begin{cases} a_{12}\left(\nu'(t) - \nu'(T)\right) - \dfrac{a_{11}}{\sqrt{\pi}}\left(\displaystyle\int_0^t \dfrac{\nu'(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau - \int_0^T \dfrac{\nu'(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau\right) + \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_t^T \dfrac{\mu'(\tau)}{(\tau-t)^{1/2}}d\tau = \Phi_0'(t) - \Phi_0'(T), \\ \mu'(t) = -a_{22}\left(\nu'(t) - \nu'(T)\right) + \dfrac{a_{21}}{\sqrt{\pi}}\left(\displaystyle\int_0^t \dfrac{\nu'(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau - \int_0^T \dfrac{\nu'(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau\right) + \\ \qquad + \Phi_1'(t) - \Phi_1'(T), \end{cases} \tag{22}$$

Таким образом, получили систему уравнений (22), имеющую аналогичный вид, что и система уравнений (18). Следовательно, при выполнении условий

$$\begin{cases} a_{12}\nu^{(s)}(T) - \dfrac{a_{11}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^T \dfrac{\nu^{(s)}(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau = \Phi_0^{(s)}(T), \\ -a_{22}\nu^{(s)}(T) + \dfrac{a_{21}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^T \dfrac{\nu^{(s)}(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau + \Phi_1^{(s)}(T) = 0, \\ \mu^{(s-1)}(0) = \Phi_1^{(s-1)}(0), \quad s = 2, 3, \ldots, l-1, \end{cases} \tag{23}$$

мы придем к системе уравнений

$$\begin{cases} a_{12}\left(\nu^{(l-1)}(t) - \nu^{(l-1)}(T)\right) - \dfrac{a_{11}}{\sqrt{\pi}}\left(\displaystyle\int_0^t \dfrac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau - \int_0^T \dfrac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau\right) + \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_t^T \dfrac{\mu^{(l-1)}(\tau)}{(\tau-t)^{1/2}}d\tau = \Phi_0^{(l-1)}(t) - \Phi_0^{(l-1)}(T), \\ \mu^{(l-1)}(t) = -a_{22}\left(\nu^{(l-1)}(t) - \nu^{(l-1)}(T)\right) + \dfrac{a_{21}}{\sqrt{\pi}}\left(\displaystyle\int_0^t \dfrac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau - \right. \\ \qquad \left. - \displaystyle\int_0^T \dfrac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau\right) + \Phi_1^{(l-1)}(t) - \Phi_1^{(l-1)}(T), \end{cases} \tag{24}$$

где функции $\nu^{(l-1)}(t)$ и $\mu^{(l-1)}(\tau)$ ищем из пространства $H^{\frac{1+\gamma}{2}}(0, T)$.

Отметим, что условия $\mu^{(s)}(0) = \Phi_1^{(s)}(0), s = 0, 1, \ldots, l-2$ эквивалентны условиям $\nu^{(s)}(0) = 0$.

Вводя новую искомую функцию $\tilde{\nu}^{(l-1)}(t) = \nu^{(l-1)}(t) - \nu^{(l-1)}(T)\frac{t}{T}$, из системы (24) имеем

$$\begin{cases} a_{12}\left(\nu^{(l-1)}(t) - \nu^{(l-1)}(T)\dfrac{T-t}{T}\right) - \dfrac{a_{11}}{\sqrt{\pi}}\left(\displaystyle\int_0^t \dfrac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau - \int_0^T \dfrac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau\right) + \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_t^T \dfrac{\mu^{(l-1)}(\tau)}{(\tau-t)^{1/2}}d\tau = \Phi_0^{(l-1)}(t) - \Phi_0^{(l-1)}(T) - \dfrac{4\nu^{(l-1)}(T)a_{11}}{3T\sqrt{\pi}}\left(T^{3/2} - t^{3/2}\right), \\ \mu^{(l-1)}(t) = -a_{22}\left(\nu^{(l-1)}(t) - \nu^{(l-1)}(T)\dfrac{T-t}{T}\right) + \dfrac{a_{21}}{\sqrt{\pi}}\left(\displaystyle\int_0^t \dfrac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau - \right. \\ \qquad \left. - \displaystyle\int_0^T \dfrac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}d\tau\right) + \Phi_1^{(l-1)}(t) - \Phi_1^{(l-1)}(T) - \dfrac{4\nu^{(l-1)}(T)a_{21}}{3T\sqrt{\pi}}\left(T^{3/2} - t^{3/2}\right). \end{cases} \tag{25}$$

Исключив функцию $\mu^{(l-1)}(\tau)$ из системы уравнений (25), получим

$$\begin{aligned} a_{12}\tilde{\nu}^{(l-1)}(t) + \int_0^t \Bigg(&-\frac{a_{11}}{\sqrt{\pi}(t-\tau)^{1/2}} + \frac{a_{11}}{\sqrt{\pi}(T-\tau)^{1/2}} + \\ &+ \frac{2a_{21}}{\pi}\ln\frac{(T-\tau)^{1/2} + (T-t)^{1/2}}{(t-\tau)^{1/2}} - \frac{2a_{21}(T-t)^{1/2}}{\pi(T-\tau)^{1/2}}\Bigg)\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)\,d\tau + \\ &+ \int_t^T \Bigg(-\frac{a_{22}}{\sqrt{\pi}(t-\tau)^{1/2}} + \frac{a_{11}}{\sqrt{\pi}(T-\tau)^{1/2}} + \\ &+ \frac{2a_{21}}{\pi}\ln\frac{(T-\tau)^{1/2} + (T-t)^{1/2}}{(\tau-t)^{1/2}} - \frac{2a_{21}(T-t)^{1/2}}{\pi(T-\tau)^{1/2}}\Bigg)\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)\,d\tau = R(t), \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned} R(t) = \Phi_0^{(l-1)}(t) - \Phi_0^{(l-1)}(T) - \frac{4\nu^{(l-1)}(T)}{3T\sqrt{\pi}}\left(T^{3/2} - t^{3/2} + a_{22}(T-t)^{3/2}\right) + \\ + \frac{\nu^{(l-1)}(T)a_{21}}{T\pi}\left((2T-t)T^{1/2}(T-t)^{1/2} - t^2\ln\frac{T^{1/2} + (T-t)^{1/2}}{t^{1/2}}\right) + \\ + a_{12}\nu^{(l-1)}(T)\frac{T-t}{T} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^T \frac{\Phi_1^{(l-1)}(T) - \Phi_1^{(l-1)}(\tau)}{(\tau-t)^{1/2}}\,d\tau. \end{aligned}$$

Уравнение (26) представим следующим образом:

$$a_{12}\tilde{\nu}^{(l-1)}(t) + \int_0^T \frac{M(t,\tau)\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{|\tau - t|^{1/2}}\,d\tau = R(t), \tag{27}$$

где

$$M(t,\tau)=\begin{cases} -\dfrac{a_{11}}{\sqrt{\pi}}+\dfrac{a_{11}(t-\tau)^{1/2}}{\sqrt{\pi}(T-\tau)^{1/2}}-\dfrac{2a_{21}(t-\tau)^{1/2}(T-t)^{1/2}}{\pi(T-\tau)^{1/2}}+ \\ \qquad +\dfrac{2a_{21}}{\pi}\ln\left(\dfrac{(T-t)^{1/2}+(T-\tau)^{1/2}}{(t-\tau)^{1/2}}\right)^{(t-\tau)^{1/2}}, & 0<\tau<t, \\ -\dfrac{a_{22}}{\sqrt{\pi}}+\dfrac{a_{11}(\tau-t)^{1/2}}{\sqrt{\pi}(T-\tau)^{1/2}}-\dfrac{2a_{21}(\tau-t)^{1/2}(T-t)^{1/2}}{\pi(T-\tau)^{1/2}}+ \\ \qquad +\dfrac{2a_{21}}{\pi}\ln\left(\dfrac{(T-t)^{1/2}+(T-\tau)^{1/2}}{(\tau-t)^{1/2}}\right)^{(\tau-t)^{1/2}}, & t<\tau<T, \end{cases}$$

причем $M(t,t-0)=-\frac{a_{11}}{\sqrt{\pi}}$, $M(t,t+0)=-\frac{a_{22}}{\sqrt{\pi}}$.

Уравнение (27) при $a_{12}=0$ является сингулярным (особым) интегральным уравнением, иначе — неоднородным уравнением Фредгольма. Мы должны показать, что решения данного уравнения принадлежат пространству $H^{\frac{\gamma+1}{2}}(0,T)$ и являются неограниченными при $t=T$ (но допускающие при $t=T$ особенность порядка меньше единицы) и ограниченными при $t=0$.

Поэтому далее будем рассматривать два случая.

Случай 1. Пусть $a_{12}=0$ и выполнены условия (12), т.е. $a_{11}a_{22}>0$, $a_{11}a_{21}\le 0$. Тогда уравнение (27) представим в виде

$$\int\limits_0^T \frac{M(t,t)\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{|t-\tau|^{1/2}}d\tau=R(t)-\int\limits_0^T k(t,\tau)\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)d\tau, \tag{28}$$

где $k(t,\tau)=\frac{M(t,\tau)-M(t,t)}{|t-\tau|^{1/2}}$.

Из формулы (28) следует, что регулярная часть $k(t,\tau)$ непрерывна всюду на интервале $(0,T)$, кроме точки $\tau=t$, где для нее справедлива оценка $|k(t,\tau)|=\frac{A}{|t-\tau|^{1/2}}$.

Далее воспользуемся известными формулами обращения оператора Абеля [1; 2]:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left(\int\limits_t^T(\tau-t)^{\alpha-1}d\tau\int\limits_0^\tau\frac{\varphi(\tau_1)d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^\alpha}\right)=\pi\operatorname{ctg}\pi\alpha\varphi(t)+\int\limits_0^T\left(\frac{T-\tau}{T-t}\right)^{1-\alpha}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau, \\ \frac{d}{dt}\left(\int\limits_t^T(\tau-t)^{\alpha-1}d\tau\int\limits_t^T\frac{\varphi(\tau_1)d\tau_1}{(\tau_1-\tau)^\alpha}\right)=-\frac{\pi\varphi(t)}{\sin\pi\alpha}, \quad 0<\alpha<1. \end{gathered} \tag{29}$$

Если уравнение (28) обратить при помощи формул (29) к эквивалентному сингулярному уравнению, то получим

$$a_{22}\nu^{(l-1)}(t)-\frac{a_{11}}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{T-\tau}{T-t}\right)^{1/2}\frac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}d\tau=-\frac{1}{\pi}\Big(2R'(T)\,(T-t)^{1/2}-\pi Q_0(t)\Big), \tag{30}$$

где

$$Q_0(t)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_t^T\frac{R'(\tau)-R'(T)}{(\tau-t)^{1/2}}\,d\tau.$$

При $t = T$ уравнение (30) примет вид

$$\int\limits_0^T \frac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}\, d\tau = 0. \tag{31}$$

Заметим, что уравнение (31) выполнено. Действительно, учитывая предыдущие предположения, уравнение эквивалентно следующему:

$$\int\limits_0^T \frac{\nu^{(l-2)}(\tau)}{(T-\tau)^{1/2}}\, d\tau = 0. \tag{32}$$

Следовательно, из (32) следует, что $\nu^{(l-2)}(T) = 0$.

Тогда систему (30), используя условие (31), перепишем следующим образом:

$$a_{22}\nu^{(l-1)}(t) - \frac{a_{11}}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{T-t}{T-\tau}\right)^{1/2} \frac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = -\frac{1}{\pi}\left(2R'(T)\,(T-t)^{1/2} - \pi Q(t)\right). \tag{33}$$

Так как функции $\nu^{(l-1)}(t), Q(t)$ принадлежат пространству $H^{\frac{\gamma+1}{2}}(0,T)$ и вблизи точки $t = T$ ведут себя как $O\left((T-t)^{\frac{\gamma+1}{2}}\right)$, то должно выполняться

$$a_{11}\int\limits_0^T \frac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(T-\tau)^{3/2}}\, d\tau = -2R'(T). \tag{34}$$

Тогда при выполнении (34) уравнение (33) примет вид

$$\begin{aligned} &a_{22}\nu_0(t) - \frac{a_{11}}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\nu_0(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = Q(t)\,(T-t)^{-3/2}, \\ &\nu_0(t) = \nu^{(l-1)}(t)\,(T-t)^{-3/2}\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Тогда каноническая функция $\chi(z) = (z-T)^{-1+\theta} \cdot z^{1-\theta}$, $\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a_{22}}{a_{11}}$, а индекс $k = 0$. Уравнение (35) в этом классе решений однозначно, безусловно разрешимо, и решение дается формулой [4; 5]

$$\nu^{(l-1)}(t) = \frac{a_{22}}{a_{11}^2 + a_{22}^2}R(t) - \frac{a_{11}}{a_{11}^2 + a_{22}^2}\,(T-t)^{1/2+\theta} \cdot t^{1-\theta}\int\limits_0^T \frac{R(\tau)\, d\tau}{(T-\tau)^{1/2+\theta}\,\tau^{1-\theta}(\tau - t)}. \tag{36}$$

Полученное решение (36) при заданной функции $Q(t)$ из пространства $H^{\frac{\gamma+1}{2}}(0,T)$ будет, очевидно, удовлетворять условиям Гельдера с показателем $\frac{\gamma+1}{2}$ во всех точках контура $(0,T)$, отличных от концов [5. С. 58]. Рассмотрим его поведение на концах. Согласно формуле поведения интеграла Коши на концах контура интегрирования [Там же. С. 76], легко видеть, что выполняется $\tilde{\nu}^{(l-1)}(0) = \tilde{\nu}^{(l-1)}(T) = 0$.

Для дальнейшего исследования поведения их на концах воспользуемся следующей теоремой [2; 5].

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем λ вблизи точки C, включая C (C обозначает 0 или T), $0 < \gamma < 1$. Тогда, для точек контура $(0, T)$, интеграл типа Коши*

$$\psi(t) = (t - C)^{\gamma} \int\limits_{0}^{T} \frac{\varphi(t)\, d\tau}{(\tau - C)^{\gamma}\, (\tau - t)}$$

удовлетворяет условию Гельдера вблизи точки C, включая C, с показателем $\min\{\lambda, \gamma\}$ при $\lambda \neq \gamma$ и условию Гельдера с показателем $\lambda - \epsilon$ при $\lambda = \gamma$, где ϵ является сколь угодно малой положительной постоянной.

Тогда в силу вышеуказанной теоремы 2 получаем, что если $\frac{a_{22}}{a_{11}} \geq 1 \left(\frac{a_{22}}{a_{11}} \leq 1\right)$, то в формуле (36) функция удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma+1}{2}$ при $0 < \gamma < 1 - 2\theta$ $(0 < \gamma < 2\theta)$, условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2} + \theta(1 - \theta)$ при $1 - 2\theta < \gamma < 1$ $(2\theta < \gamma < 1)$ и условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma+1}{2} - \epsilon$ при $\gamma = 1 - 2\theta$ $(\gamma = 2\theta)$.

Таким образом, при выполнении условий (15), (17), (19), (21), (23) и (34), которые имеют вид

$$\begin{cases} \nu^{(s)}(T) = \dfrac{a_{11}\Phi_1^{(s)}(T) - a_{21}\Phi_0^{(s)}(T)}{a_{11}a_{22}}, \\ \int\limits_{0}^{T} \dfrac{\nu^{(s)}(\tau)}{(T - \tau)^{1/2}}\, d\tau = -\dfrac{\Phi_0^{(s)}(T)\sqrt{\pi}}{a_{11}}, \quad s = 0, 1, \ldots, l - 1, \end{cases} \tag{37}$$

$$\mu^{(s_1)}(0) = \Phi_1^{(s_1)}(0), \ s_1 = 0, 1, \ldots, l - 2, \tag{38}$$

мы получили функцию $\nu(t)$ из искомого класса $H^{l-1+\frac{\gamma+1}{2}}(0, T)$, $0 < \gamma < 2\theta$ $(0 < \gamma < 1 - 2\theta)$, при $\frac{a_{22}}{a_{11}} \geq 1 \left(\frac{a_{22}}{a_{11}} \leq 1\right)$, удовлетворяющую условиям

$$\nu^{(l-1)}(0) = 0, \quad \nu^{(s)}(T) = \frac{a_{11}\Phi_1^{(s)}(T) - a_{21}\Phi_0^{(s)}(T)}{a_{11}a_{22}}, \quad s = 0, 1, \ldots, l - 1.$$

Значения $\nu^{(s)}(t)$ определяем по формуле Тейлора

$$\nu^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{a_{11}\Phi_1^{(s)}(T) - a_{21}\Phi_0^{(s)}(T)}{a_{11}a_{22}\,(k - s)!}\, (T - t)^{k-s} +$$

$$- \frac{1}{(l - 2 - s)!} \int\limits_{t}^{T} (t - \tau)^{l-2-s}\, \nu^{(l-1)}(\tau)\, d\tau, \quad s = 0, 1, \ldots, l - 2.$$

Тогда для выполнения условий $\nu^{(s)}(0) = 0, \ s = 0, 1, \ldots, l - 2$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=s}^{l-2} \frac{a_{11}\Phi_1^{(s)}(T) - a_{21}\Phi_0^{(s)}(T)}{a_{11}a_{22}\,(k - s)!} T^{k-s} +$$

$$+ \frac{(-1)^{l-1-s}}{(l - 2 - s)!} \int\limits_{0}^{T} \tau^{l-2-s}\nu^{(l-1)}(\tau)\, d\tau = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, l - 2. \tag{39}$$

Подставив найденные значения функций $\nu^{(s)}(t)$ во второе уравнение системы (37), получим

$$-\sum_{k=s}^{l-2} \frac{a_{11}\Phi_1^{(s)}(T) - a_{21}\Phi_0^{(s)}(T)}{a_{11}a_{22}\,(k-s)!\,\left(k-s+\frac{1}{2}\right)}\,(T-t)^{k-s+\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{1}{(l-2-s)!}\int\limits_0^T \frac{d\tau}{(T-t)^{1/2}}\int\limits_\tau^T (\tau-\tau_1)^{l-2-s}\,\nu^{(s)}(\tau_1)\,d\tau_1 =$$

$$= -\frac{\Phi_0^{(s)}(T)\sqrt{\pi}}{a_{11}}, \quad s = 0, 1, \ldots, l-2. \quad (40)$$

При $s = l-1$ условия (37) можно представить в следующем виде:

$$\frac{a_{11}\Phi_1^{(l-2)}(T) - a_{21}\Phi_0^{(l-2)}(T)}{a_{11}a_{22}\sqrt{T}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \frac{\nu^{(l-2)}(\tau) - \nu^{(l-2)}(T)}{(T-\tau)^{3/2}}\,d\tau = -\frac{\Phi_0^{(l-2)}(T)\sqrt{\pi}}{a_{11}}, \quad (41)$$

где $\nu^{(l-2)}(T) = \frac{a_{11}\Phi_1^{(l-2)}(T) - a_{21}\Phi_0^{(l-2)}(T)}{|A|}$.

Отметим, что значение функции $\nu^{(l-1)}(t)$ дано формулой (36). Итак, доказана следующая

Лемма 1. *Пусть*

1) *функции* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(-x)$ *принадлежат пространству* $H^{2l+\gamma}(0,\infty)(l \in N, \gamma \in (0,1))$;

2) $a_{12} = 0$ *и выполнены условия* (12), *т. е.* $a_{11}a_{22} > 0, a_{11}a_{21} \le 0$;

3) $0 < \gamma < \min(1-2\theta, 2\theta)$, *где* $\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a_{11}}{a_{22}}$.

Тогда при выполнении $2l$ *условий* (34), (39), (40) *и* (41) *существует единственное решение краевой задачи (5)–(6) из пространства* $H^{2l+\gamma, l+\frac{\gamma}{2}}(Q^+)$.

Случай 2. Пусть $a_{12} \neq 0$ и выполнены условия (12), т. е. $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} > 0$, $a_{11}a_{21} \le 0, a_{12}a_{22} \le 0$. Перепишем уравнение (27) в следующем в виде:

$$a_{12}\tilde{\nu}^{(l-1)}(t) + \int\limits_0^T K(t,\tau)\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)\,d\tau = R(t), \quad (42)$$

где $K(t,\tau) = \frac{M(t,\tau)}{|\tau-t|^{1/2}}$.

Уравнение Фредгольма (42) имеет единственное решение. В самом деле, если однородное уравнение (42) имеет нетривиальное решение $\nu^{l-1}(t)$, то функция $\nu^{l-1}(t)$ будет нетривиальным решением однородной системы (24), причем $\nu^{l-1}(t)$ вблизи точки $t = 0$ будет вести себя как $O\left(t^{\frac{\gamma+1}{2}}\right)$, если выполняется условие

$$\mu^{(l-1)}(0) = \Phi_1^{(l-1)}(0). \quad (43)$$

Тогда функция $\nu^{(l-1)}(t)t^{-1/2}$ будет нетривиальным решением однородного уравнения (42). Нетрудно видеть, что $\nu^{(l-1)}(t)$ и $\nu^{(l-1)}(t)t^{-1/2}$ будут нетривиальными решениями однородной системы (24). Тогда, в силу единственности решения краевой задачи (5)–(6), имеем $\nu^{(l-1)}(t) = 0$. Согласно общей теории [4; 5], следует, что неоднородное уравнение Фредгольма (42) имеет решение.

Подставив найденное решение по формуле Тейлора, значение функции

$$\nu^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{a_{11}\Phi_1^{(s)}(T) - a_{21}\Phi_0^{(s)}(T)}{|A|\,(k-s)!}\,(T-t)^{k-s} - \\ - \frac{1}{(l-1-s)!}\int\limits_t^T (t-\tau)^{l-2-s}\,\nu^{(s)}(\tau)\,d\tau, \quad s = 0,1,\ldots,l-2,$$

в (37), получим условия (40). Потребовав выполнения условий $\nu^{(s)}(0) = 0$, $s = 0,1,\ldots$ $\ldots, l-2$, получим условия (39). При $s = l-1$ из системы (37) получим условие (41).

Итак, доказана следующая

Лемма 2. *Пусть*

1) *функции* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(-x)$ *принадлежат пространству* $H^{2l+\gamma}(0,\infty)(l \in N, \gamma \in (0,1))$;

2) $a_{12} \neq 0$ *и выполнены условия* (12), *т. е.* $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} > 0$, $a_{11}a_{21} \leq 0$, $a_{12}a_{22} \leq 0$.

Тогда при выполнении $2l$ *условий* (39), (40), (41) *и* (43) *существует единственное решение краевой задачи* (5)–(6) *из пространства* $H^{2l+\gamma, l+\frac{\gamma}{2}}(Q^+)$.

Обозначим найденные условия ортогональности в обоих случаях как

$$L_s\left(\varphi_1(x), \varphi_2(x)\right) = 0, \quad s = 1,2,\ldots,2l. \tag{44}$$

Тогда основной результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть*

1) $\varphi_1(x) \in H^{2l+\gamma}(0,+\infty)$ *и* $\varphi_2(x) \in H^{2l+\gamma}(-\infty,0)$ $(l \in N, 0 < \gamma < 1)$;

2) *при* $a_{12} = 0$ *выполнены условия* $a_{11}a_{22} > 0$, $a_{11}a_{21} \leq 0$, *и* $0 < \gamma < \beta$,

$$\beta = \min\left(1-2\theta, 2\theta\right) < \gamma < 1, \quad \theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a_{22}}{a_{11}};$$

3) *при* $a_{12} \neq 0$ *выполнены условия* $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} > 0$, $a_{11}a_{21} \leq 0$, $a_{12}a_{22} \leq 0$.

Тогда при выполнении $2l$ *условий* (44) *существует единственное решение краевой задачи* (1)–(3) *из пространства* $H^{2l+\gamma, l+\frac{\gamma}{2}}(Q)$.

Замечание 1. Приведенные в случае 1 рассуждения показывают, что найденное в теореме 3 решение краевой задачи (1)–(3) при $a_{12} = 0$ будет принадлежать пространству

1) $H^{2l+\beta, l+\frac{\beta}{2}}(Q)$, если $\beta < \gamma < 1$;

2) $H^{2l+\gamma-2\epsilon, l+\frac{\gamma}{2}-\epsilon}(Q)$ (ϵ — сколь угодно малая положительная постоянная).

Список литературы

1. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Сиб. отд-ние АН СССР, Ин-т математики, 1982.

2. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.

3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уравльцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Материал поступил в редколлегию 08.11.2006

Адрес автора

ТУЛАСЫНОВ Михаил Станиславович

РОССИЯ, 678170, Республика Саха (Якутия)

г. Мирный, ул. Тихонова, 5/1

Политехнический институт (филиал)

Якутского государственного университета

им. М. К. Аммосова

e-mail: sakhaneo@mail.ru