ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том VI, 2006 г. Выпуск 3. С. 59–61

УДК 517.9

Решения системы уравнений Максвелла с нулевыми инвариантами[1]

М. В. Нещадим

В работе рассматривается система уравнений Максвелла

$$\operatorname{div}\overline{E}=0,\qquad \operatorname{div}\overline{B}=0,$$
$$\operatorname{rot}\overline{E}+\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}=0,\qquad \operatorname{rot}\overline{H}=\frac{\partial\overline{E}}{\partial t},\tag{1}$$

где $\overline{E}=(E_1,E_2,E_3)$, $\overline{H}=(H_1,H_2,H_3)$ — вектора электрической и магнитной напряженности, причем $E_i=E_i(t,x,y,z)$, $H_i=H_i(t,x,y,z)$, $i=1,2,3$, t, x, y, z — переменные. Операторы div и rot определены стандартным способом [1, с. 439]. Все функции, рассматриваемые в работе, предполагаются достаточно гладкими.

В статье [2] приведено описание решений системы (1) в предположении, что величины

$$I=\langle\overline{E},\overline{E}\rangle-\langle\overline{H},\overline{H}\rangle,\quad J=\langle\overline{E},\overline{H}\rangle\tag{2}$$

не равны нулю. (Хорошо известно, что I, J являются инвариантами преобразований Лоренца). Здесь значок $\langle,\rangle$ соответствует стандартному скалярному произведению векторов. В данной работе получено описание решений системы (1) при условии, что

$$I=J=0.\tag{3}$$

Введем комплексный вектор

$$\overline{M}=\overline{H}+i\overline{E},\tag{4}$$

где i — мнимая единица. Тогда система (1) может быть переписана в виде

$$\operatorname{div}\overline{M}=0,\quad \operatorname{rot}\overline{M}+i\frac{\partial\overline{M}}{\partial t}=0,\tag{5}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант №06–01–00439, интеграционного гранта СО РАН №48–2006.

а условие (3)

$$\langle \overline{M}, \overline{M} \rangle = 0. \tag{6}$$

Исходя из равенства (6), вектор $\overline{M}$ можно представить в виде

$$\overline{M} = (q\cos p, q\sin p, iq), \tag{7}$$

где p, q — некоторые комплекснозначные функции от переменных t, x, y, z. Сделав подстановку (7) в систему (5), получим систему дифференциальных уравнений на функции p, q, которую удобно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} i\sin p & \cos p & -i & 0 \\ i\cos p & -\sin p & 0 & i \\ 0 & i & \cos p & \sin p \\ -1 & 0 & \sin p & -\cos p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_t \\ \lambda_z \\ \lambda_x \\ \lambda_y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -i\cos p & \sin p & 0 & 0 \\ i\sin p & -\cos p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin p & -\cos p \\ 0 & 0 & -\cos p & -\sin p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_t \\ p_z \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

где $\lambda = \ln q$. Домножив это равенство слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i\cos p & i\sin p & 1 & 0 \\ -i\sin p & -i\cos p & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

получим

$$\begin{pmatrix} i\sin p & \cos p & -i & 0 \\ i\cos p & -\sin p & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_t \\ \lambda_z \\ \lambda_x \\ \lambda_y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -i\cos p & \sin p & 0 & 0 \\ i\sin p & -\cos p & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sin p & -\cos p \\ 0 & -i & -\cos p & -\sin p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_t \\ p_z \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} \tag{8}$$

Из последних двух равенств получаем, что функция p — неявное решение уравнения

$$p = P(\xi, \eta),$$

где $\xi = t + x\sin p - y\cos p$, $\eta = iz + x\cos p + y\sin p$, для некоторой функции P от двух аргументов. А функция λ определяется из первых двух уравнений, как

$$\lambda = x(P_\xi \cos p - P_\eta \sin p) + y(P_\xi \sin p - P_\eta \cos p) + \Lambda(\xi, \eta),$$

где Λ — произвольная функция от двух аргументов. Итак, доказана

Теорема. *Решение системы (5), (6)*

$$\operatorname{div} \overline{M} = 0, \ \ \operatorname{rot} \overline{M} + i\frac{\partial \overline{M}}{\partial t} = 0, \ \ \langle \overline{M}, \overline{M} \rangle = 0$$

представимо в виде

$$\overline{M} = (q\cos p, q\sin p, iq),$$

где функция p — неявное решение уравнения

$$p = P(\xi, \eta),$$

для некоторой функции P от двух аргументов. А функция q определяется равенством

$$q = Q(\xi, \eta)\exp\left(x(P_\xi \cos p - P_\eta \sin p) + y(P_\xi \sin p - P_\eta \cos p)\right).$$

Здесь $\xi = t + x\sin p - y\cos p$, $\eta = iz + x\cos p + y\sin p$, Q — произвольная функция от двух аргументов.

Литература

[1] *М. М. Постников*, Лекции по геометрии, Семестр III, Гладкие многообразия, М.: Наука, 1987.

[2] *М. С. Шнеерсон*, Дифф. уравн., **4**, № 4 (1968), 743–758.