ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том VI, 2006 г. Выпуск 3. С. 49–58

УДК 510.64

Алгоритмы распознавания табличности и предтабличности в расширениях интуиционистского исчисления[1]

Л. Л. Максимова, П. А. Шрайнер

Наше исследование будет посвящено описанию алгоритмов автоматического распознавания свойств табличности и предтабличности у суперинтуиционистских и позитивных пропозициональных исчислений, а также программ, реализующих эти алгоритмы.

Данная работа продолжает работу [1], которая посвящена автоматическому распознаванию интерполяционного свойства в суперинтуиционистских пропозициональных логиках.

Табличные логики, т.е. логики, характеризующиеся конечными моделями, особо выделяются среди всех неклассических логик. Они самые простые по способу семантического задания. Кроме того, все суперинтуиционистские табличные логики конечно аксиоматизируемы. Среди остальных логик можно выделить так называемые предтабличные логики, которые являются максимальными во множестве нетабличных логик.

Введем необходимые определения.

Под *суперинтуиционистской логикой* мы будем понимать множество формул, содержащее аксиомы интуиционистской логики и замкнутое относительно правил подстановки и модус поненс.

Интуиционистская шкала Крипке — это пара $\langle W, \leq \rangle$, где W — это непустое множество миров, а $\leq$ — частичный порядок на множестве W.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (проект N 03-06-80178), грантом INTAS (проект N 04-77-7080) и грантом Минобразования России на проведение молодыми учеными научных исследований в ведущих научно-педагогических коллективах вузов и научных организаций (проект N PD02-1.1-460) и грантом Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект N НШ-2069.2003.1)

Интуиционистская модель Крипке — это тройка $\langle W, \le, \models\rangle$, где $\langle W, \le\rangle$ — интуиционистская шкала Крипке, а символом $\models$ обозначено отношение истинности на мирах, удовлетворяющее *условию монотонности*: $v \models P$, $v \le w \Rightarrow w \models P$ для любой пропозициональной переменной P.

Отношение истинности на формулах выражается так:

$w \models A \wedge B \equiv w \models A$ и $w \models B$;

$w \models A \vee B \equiv w \models A$ или $w \models B$;

$w \models A \to B \equiv$ (для всех $v \ge w$) ($v \models A$ влечет $v \models B$);

$w \models \neg A \equiv$ (для всех $v \ge w$)($v \not\models A$);

Имеет место **лемма о монотонности**. *Если $w \le v$, A — произвольная формула, то $w \models A$ влечет $v \models A$.*

Формулу A называют *истинной в модели* $\langle W, \le, \models\rangle$, если $w \models A$ для всех $w \in W$. Формула A *истинна в шкале* $\langle W, \le\rangle$, если A истинна в любой модели, основанной на шкале W. Формула A *опровергается* в шкале (или модели), если она не является истинной в этой шкале (модели).

Логика L *характеризуется* классом шкал Крипке $\boldsymbol{K}$, если все формулы из логики L истинны на всех шкалах Крипке из класса $\boldsymbol{K}$, а любая формула, не принадлежащая логике L, опровергается на некоторой шкале Крипке из класса $\boldsymbol{K}$.

Табличной мы будем называть логику, которая может быть характеризована конечным числом конечных шкал.

Предтабличная логика — это логика, максимальная среди нетабличных логик.

Начнем с описания алгоритма, позволяющего проверить для произвольной суперинтуиционистской пропозициональной логики, полученной добавлением конечного числа новых схем аксиом к интуиционистскому пропозициональному исчислению, имеет ли логика свойство предтабличности. Вместо конечного числа новых схем аксиом можно взять их конъюнкцию.

Разрешимость предтабличности в суперинтуиционистских логиках была доказана в [2]. Аналогичный результат для позитивных логик вытекает из результатов статьи [3]. Оценки сложности приведены в [4] и [5].

Алгоритм основан на результате Л. Л. Максимовой [6], утверждающем, что предтабличных суперинтуиционистских пропозициональных логик ровно три: линейная логика Даммета LC, логика второго слоя LP_2, а также логика, которую Хосой в [7] обозначил через LQ_3. Заметим, что предтабличности логики LC была доказана в [8], а предтабличность логик LP_2 и LQ_3 — в [9].

Из вышеописанного результата Максимовой следует, что для того, чтобы проверить, является ли суперинтуиционистская логика предтабличной, достаточно выяснить, совпадает ли она с одной из вышеупомянутых трех логик.

Однако одна и та же логика допускает бесконечно много аксиоматизаций. Известно, что в общем случае проблема аксиоматизации неразрешима. Поэтому мы будем рассматривать только те логики, которые получаются из интуиционистской логики добавлением конечного числа аксиом.

Семантическая характеризация предтабличных суперинтуиционистских логик строится в [6] с помощью шкал Крипке.

Будем называть *веером* шкалу, у которой один элемент наименьший, а остальные — максимальные; *юлой* — шкалу, у которой один элемент наименьший, один — наибольший, а остальные — несравнимы.

Будем обозначать через $\mathbf{S}_n$ линейную шкалу, имеющую n элементов; $\mathbf{V}_n$ — веер, имеющий n максимальных элементов; $\mathbf{U}_n$ — юлу, имеющую n несравнимых элементов.

Логика LC характеризуется цепями S_n, $n \geq 1$; логика LP_2 — веерами V_n, $n \geq 1$; логика LQ_3 — юлами U_n, $n \geq 1$.

Пусть W, W' — две частично упорядоченных шкалы. Отображение Θ из W в W' называется *p-морфизмом*, если выполнены два условия:

(1) $x \leq y \;\Rightarrow\; \Theta(x) \leq \Theta(y)$
(2) $\Theta(x) \leq z \;\Rightarrow\; \exists y\,(x \leq y \wedge \Theta(y) = z)$

Заметим, что для любых m и n таких, что $m < n$ легко построить р морфизмы S_n на S_m, V_n на V_m, U_n на U_m.

Для проверки предтабличности суперинтуиционистской логики $L = Int{+}\{A_1, .., A_n\}$, заданной схемами аксиом $A_1, \ldots, A_n$, надо проверить включение $L \subseteq L_0$ и $L \supseteq L_0$ для $L_0 = LC, LP_2$ и LQ_3. Включение $L \subseteq L_0$ равносильно выводимости $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ в L_0 или, эквивалентно, общезначимости формулы A во всех шкалах из соответствующей последовательности.

Следующие леммы позволяют ограничить число элементов шкалы и сократить проверку. Хорошо известна

Лемма 1. *Пусть $\Theta : W \to W'$ является p-морфизмом и для любого $x \in W$ и любой переменной p_i, $i = 1, \ldots n$, означивания переменных на W и W' удовлетворяют условию: $x \models p_i \Leftrightarrow \Theta(x) \models' p_i$. Тогда для любой формулы $A(p_1, \ldots, p_n)$ выполнено $x \models A(p_1, \ldots, p_n) \Leftrightarrow \Theta(x) \models' A(p_1, \ldots, p_n)$.*

Доказательство этой леммы проводится индукцией по длине формулы A.

С использованием этой леммы доказывается

Лемма 2. *Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_N)$, r — общее число вхождений импликаций и отрицаний в формулу A. Тогда*

(1) *$LC \vdash A \Leftrightarrow A$ общезначима в S_{N+1};*
(2) *$LP_2 \vdash A \Leftrightarrow A$ общезначима в V_m, где $m = \min(2^N, r + 1)$;*

(3) $LQ_3 \vdash A \Leftrightarrow A$ *общезначима в* U_m, *где* $m = \min(2^N, r+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

(1) Пусть $LC \nvdash A$. Тогда формула A опровергается в некоторой шкале S_n при некотором означивании $\models$. Каждому $x \in S_n$ поставим в соответствие множество $T(x) = \{p_i \mid x \models p_i\}$ и считаем $x \sim y \Leftrightarrow T(x) = T(y)$. Обозначим $[x] = \{y \mid T(x) = T(y)\}$, $W' = \{[x] \mid x \in W\}$, $[x] \leq' [y] \Leftrightarrow x \leq y$, $[x] \models' p_i \Leftrightarrow x \models p_i$. Тогда $\Theta(x) = [x]$ есть p-морфизм и формула A опровергается в W' по лемме 1.

Так как S_n — линейно упорядоченная, то W' тоже линейно упорядоченная. Поскольку $[x] \leq [y] \Rightarrow T(x) \subseteq T(y)$, получаем $W' \leq N+1$. В этом случае существует p-морфизм из S_{N+1} на W', а значит, формула A опровергается в S_{N+1}.

(2) Пусть $LP_2 \nvdash A$. Тогда формула A опровергается в некоторой шкале V_n для некоторого $n \geq 1$. Опять максимальные элементы x, y такие, что $T(x) \sim T(y)$, и положим $[x] \models' p_i \Leftrightarrow x \models p_i$. Получим p-морфизм шкалы V_n на $W' = \{0\} \cup \{[x] | x$ максимальный в $V_n\}$, причем число максимальных элементов шкалы $W' \leq 2^N$ и формула A опровергается в W' при означивании $\models'$. Далее, для любой подформулы вида $B \to C$ такой, что $0 \nvDash B \to C$, существует $y \in W'$ такой, что $y \models' B$ и $y \nvDash' C$. Также для любой подформулы вида $\neg B$ такой, что $0 \nvDash' \neg B$ существует $y \in W'$ такой, что $y \models' B$. Оставим по одному y для любой подформулы вида $B \to C$ или $\neg B$; добавим наименьший элемент 0 и получим шкалу W'', изоморфную вееру V_k для некоторого $k \leq \min(2^N, r+1) = m$.

Индукцией по длине формулы легко показать, что формула A опровергается в шкале W'' при том же означивании $\models'$. Но тогда формула A опровергается в W_m.

(3) Доказывается аналогично второму пункту.

Для проверки обратного включения $L \supseteq L_0$ для $L = Int + A$ и $L_0 = LC, LP_2, LQ_3$ используется следующая лемма, которая вытекает, например, из результатов статьи [10].

Лемма 3. (1) $Int + A \supseteq LC \Leftrightarrow V_2 \nvDash A$ *и* $U_2 \nvDash A$;

(2) $Int + A \supseteq LP_2 \Leftrightarrow S_3 \nvDash A$;

(3) $Int + A \supseteq LQ_3 \Leftrightarrow S_4 \nvDash A$ *и* $V_2 \nvDash A$.

Из лемм 2 и 3 вытекает следующее утверждение, которое поможет нам автоматизировать проверку свойства предтабличности.

Предложение 1. *Пусть логика* L, *получена добавлением конечного числа новых схем аксиом* $A_1, \ldots, A_k$ *к интуиционистской пропозициональной логике;* $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$; N *— количество переменных формулы* A; r *— общее число вхождений импликаций и отрицаний в формулу* A. *Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) *Логика* L *совпадает с логикой* LC, *если формула* A *истинна на линейно упорядоченной шкале высоты* $N+1$ *и опровергается на трехэлементном веере и четырехэлементной юле.*

(2) *Логика L совпадает с логикой LP_2, если формула A истинна на веере, имеющем $min(2^N, r+1)$ максимальных элементов, и опровергается на трехэлементной линейно упорядоченной шкале.*

(3) *Логика L совпадает с логикой LQ_3, если формула A истинна на юле, имеющей $min(2^N, r+1)$ несравнимых элементов, и опровергается на трехэлементном веере и четырехэлементной линейно упорядоченной шкале.*

Описание программы, распознающей свойство предтабличности в суперинтуиционистских логиках

Работа с программой начинается с ввода формулы, добавляемой к интуиционистской логике Int, в качестве новой схемы аксиом. Так как на стандартной клавиатуре нет символов, соответствующих логическим связкам, мы ввели для них следующие обозначения. Конъюнкция обозначается символом **&**, дизъюнкция — #, отрицание — ~, импликация — двумя символами **->**, эквивалентность — тремя символами **<->**.

После того как формула, введенная пользователем, будет проверена на отсутствие синтаксических ошибок, она преобразуется к некоторому «внутреннему» формату. В дальнейшем работа в программе ведется с формулой, представленной в виде структуры, имеющей в качестве функтора название логической связки, в качестве аргументов — подформулы. Например, введенная пользователем формула $(X \to Y)\sharp(X \wedge \sim Y)$ будет представлена в виде: **diz(impl(vsk("X"),vsk("Y")),kon(vsk("X"), neg(vsk("Y"))))**.

В частности, на этапе перевода формулы из строкового представления в структуру будут добавлены недостающие скобки.

После этого последовательно проверяется совпадение логики, полученной добавлением к интуиционистской логике формулы, введенной пользователем, с логиками LC, LP_2 и LQ_3.

Проверка тождественности состоит из двух этапов.

(1) Проверяется истинность данной формулы при всевозможных означиваниях переменных на следующих шкалах Крипке:

Логика	**Шкала**
LP_2	веер, имеющий $\min(2^N, r+1)$ максимальных элементов
LC	линейно упорядоченная шкала высоты $N+1$
LQ_3	юла, имеющая $\min(2^N, r+1)$ несравнимых элементов

Каждая шкала Крипке имеет внутреннее представление в виде набора пар, состоящих из имени мира и списка имен миров, достижимых из этого мира. В программе заложен механизм, реализующий транзитивность отношения достижимости на мирах.

При проверке истинности формулы на шкале Крипке последовательно перебираются все возможные значения переменных, входящих в формулу, с проверкой выполнения условия монотонности (переменная, принявшая значение 1 («истина») на каком-нибудь мире, не может получить значение 0 («ложь») ни на одном мире, достижимом из данного мира). Для каждого значения переменных вычисляется значение проверяемой формулы. При этом вычисляются значения всех подформул, входящих в данную формулу.

В программе реализована интуиционистская истинность формул, т.е. при проверке истинности формулы, содержащей импликацию или отрицание, на некотором мире, учитывается истинность ее подформул на мирах, достижимых из данного мира.

Если найдется означивание переменных, при которых формула опровергается на данной шкале, то это означает, что проверяемая логика не совпадает с соответствующей предтабличной логикой. И, значит, нужно переходить к проверке совпадения со следующей предтабличной логикой.

Если же опровергнуть формулу на данной шкале не удалось, это означает, что формула выводима в данной предтабличной логике. И, следовательно, проверяемая логика содержится в логике, имеющей свойство предтабличности. Для того чтобы они совпали, нужно проверить, что предтабличная логика, в свою очередь, содержится в логике, которую мы проверяем. Переходим ко второму этапу.

(2) Проверяется ложность данной формулы при некотором означивании переменных на следующих шкалах Крипке.

Логика	**Шкала**
LP_2	трехэлементная линейно упорядоченная шкала
LC	трехэлементный веер и четырехэлементная шкала с наименьшим и наибольшим элементом и двумя несравнимыми
LQ_3	трехэлементный веер и четырехэлементная линейно упорядоченная шкала

Если не удалось опровергнуть формулу в соответствующих шкалах, то это означает, что проверяемая логика не совпадает с соответствующей предтабличной логикой.

В этом случае осуществляется переход к проверке совпадения данной логики со следующей предтабличной логикой. Если получить совпадение ни с одной из трех логик, имеющих свойство предтабличности, не удалось, выдается сообщение о том, что исследуемая логика не имеет свойства предтабличности (см. рис. 1).

В противном случае получаем, что логика, расширяющая интуиционистскую ло-

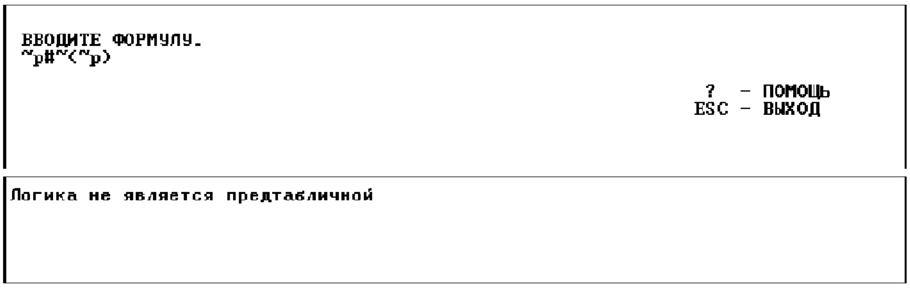

Рис. 1. Логика не имеет свойства предтабличности

гику, совпадает с логикой, имеющей свойство предтабличности и, следовательно, сама обладает предтабличным свойством. В этом случае программа выдает соответствующее сообщение (см. рис. 2).

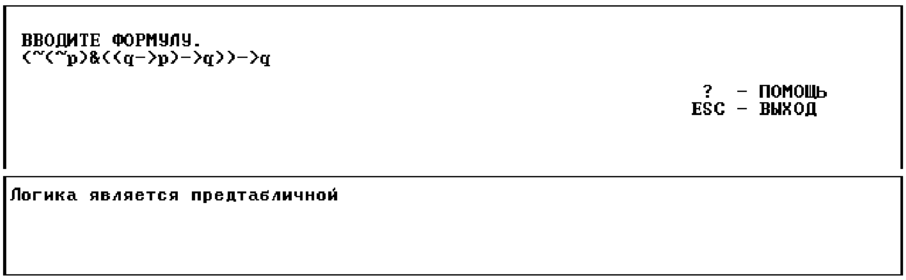

Рис. 2. Логика имеет свойство предтабличности

Протокол работы программы записывается в текстовой файл.

Алгоритм распознавания свойства табличности для суперинтуиционистских логик

Кузнецовым в [11] доказано, что любая нетабличная суперинтуиционистская логика содержится в некоторой предтабличной логике. Отсюда следует, что для того, чтобы логика была табличной, она не должна содержаться ни в одной из трех предтабличных логик. Из этого результата и леммы 2 получается следующее

Предложение 2. *Пусть логика L, получена добавлением конечного числа новых схем аксиом $A_1, \ldots, A_k$ к интуиционистской пропозициональной логике; $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$; N — количество переменных формулы A; r — общее число вхождений импликаций и отрицаний в формулу A. Тогда имеют место следующие утверждения:*

Логика L является табличной тогда и только тогда когда формула A опровергается на трех шкалах:

(1) *линейно упорядоченной шкале высоты $N + 1$;*

(2) *веере, имеющем* $min(2^N, r+1)$ *максимальных элементов;*
(3) *юле, имеющей* $min(2^N, r+1)$ *несравнимых элементов.*

Нами создана программа, которая последовательно проверяет опровержимость введенной пользователем формулы на каждой из вышеупомянутых трех шкалах. В случае если формула оказалась истинна на одной из шкал, пользователь получает соответствующее сообщение о том, что логика не является табличной.

В противном случае логика является табличной. Сообщение об этом выводится на экран.

Работа программ, автоматически проверяющих свойства табличности и предтабличности в суперинтуиционистских пропозициональных логиках, сравнивались нами на одинаковых наборах входных формул, с реализациями наших алгоритмов средствами SAT-решателей, верификаторами конечных моделей SMV и теоретико-игровых семантик (Н. В. Шилов, Ю. В. Гребнева и Seung-Hwang O). Все четыре реализации принимали одинаковые решения относительно наличия свойств табличности и предтабличности.

Стоит также заметить, что в отдельных случаях результата работы программы приходится ожидать довольно долго. Так, например, при проверке формулы $(\neg p \vee \neg(\neg p)) \wedge ((\neg(\neg p) \wedge ((q- > p) \to (r \to q)) \wedge ((r \to q) \to r)) \to r)$ приходится ожидать несколько часов. Связано это с тем, что в данном случае, при проверке только на юлах требуется провести 1.073.741.824 означиваний.

Алгоритмы распознавания свойств предтабличности и табличности в позитивных логиках

Позитивная логика — это множество формул, содержащее аксиомы позитивного фрагмента интуиционистского исчисления высказываний и замкнутое относительно правил подстановки и модус поненс.

Формулы позитивной логики строятся из пропозициональных переменных с помощью конъюнкции, дизъюнкции и импликации. Аксиоматику позитивного исчисления можно найти, например, в [12]. Позитивный фрагмент логики L будем обозначать L^+.

М. И. Верхозиной в [13] было доказано, что предтабличных позитивных пропозициональных логик ровно две: LC^+ и LP_2^+. Поэтому для того чтобы проверить, будет ли предтабличной позитивная пропозициональная логика, полученная добавлением новой схемы аксиом к позитивному фрагменту интуиционистской логики, нам достаточно выяснить, будет ли она совпадать с одной из вышеупомянутых двух логик.

Выяснить тождественность логик нам позволит следующее утверждение, аналогичное утверждению для суперинтуиционистских логик и вытекающее из результатов работ [3] и [5].

Предложение 3. *Пусть логика L, получена добавлением конечного числа новых схем* *аксиом $A_1, \ldots, A_k$ к позитивному фрагменту интуиционистской логики; $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$; N — количество переменных формулы A; r — число вхождений импликаций в формулу A. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) *Логика L совпадает с логикой LC^+, если формула A истинна на линейно упорядоченной шкале высоты $N+1$ и опровергается на трехэлементном веере и четырехэлементной юле.*

(2) *Логика L совпадает с логикой LP_2^+, если формула A истинна на веере, имеющем $\min(2^N, r+1)$ максимальных элементов, и опровергается на трехэлементной линейно упорядоченной шкале.*

Так же, как и для суперинтуиционистских логик, из результатов Кузнецова, Верхозиной и леммы 2 получается следующее

Предложение 4. *Пусть логика L, получена добавлением конечного числа новых схем аксиом $A_1, \ldots, A_k$ к позитивному фрагменту интуиционистской пропозициональной логики; $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$; N — количество переменных формулы A; r — число вхождений импликаций в формулу A. Тогда имеют место следующие утверждения:*

Логика L является табличной тогда и только тогда когда формула A опровергается на двух шкалах:

(1) *линейно упорядоченной шкале высоты $N+1$;*

(2) *веере, имеющем $\min(2^N, r+1)$ максимальных элементов;*

Нами созданы программы, реализующие вышеописанные алгоритмы. Программы получены из соответствующих программ для суперинтуиционистских логик элиминацией отрицания из языка и логики LQ_3^+ из рассмотрения.

В дальнейшем планируется распространить результаты данной работы на другие категории неклассических логик. Например, на расширения модальной логики $S4$. Основой для этого нам послужат работы [14] и [15], в которых независимо получено полное описание предтабличных расширений логики $S4$. Таких логик оказалось всего пять.

При этом нам понадобится добавить интерпретацию модальных связок («необходимо» и «возможно»), модифицировать реализацию отношения достижимости (отношение достижимости в произвольных модальных логиках не обязано быть частичным порядком) и интерпретацию логических связок (таких как отрицание и импликация).

Литература

[1] *П. А. Шрайнер*, Автоматическое распознавание интерполяционного свойства у некоторых суперинтуиционистских пропозициональных логик, Вестник НГУ, **3**, № 4 (2003), 85–92.

[2] *Л. Л. Максимова*, Разрешимые свойства суперинтуиционистских и модальных логик, Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Новосибирск, 1983.

[3] *Л. Л. Максимова*, Неявная определимость и позитивные логики, Алгебра и логика, **42**, № 1 (2003), 65–93.

[4] *L. Maksimova, A. Voronkov*, Complexity of Some Problems in Modal and Intuitionistic Calculi, Computer Science Logic, Springer, 2003, 397–412.

[5] *L. Maksimova*, Complexity of interpolation and related problems in positive calculi, The Journal of Symbolic Logic, **67**, No. 1 (2002), 28–55.

[6] *Л. Л. Максимова*, Предтабличные суперинтуиционистские логики, Алгебра и логика, **11**, № 5 (1972), 643–681.

[7] *T. Hosoi*, On intermediate logics, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, No. 14 (1967), 293–312.

[8] *J. M. Dunn, R. K, Meyer*, Algebraic completeness results for Dummets *LC* and its extensions, Zeitschr. math. Log. und Grundl. Math., No. 17, 1971, 225–230.

[9] *T. Hosoi, H. Ono*, The intermediate logics of the second slice, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, No. 17, 1970, 457–461.

[10] *Л. Л. Максимова*, Теорема Крэйга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр, Алгебра и логика, **16**, № 6 (1977), 643–681.

[11] *А. В. Кузнецов*, Некоторые свойства структуры многообразий псевдобулевых алгебр, Всесоюзный алгебраический коллоквиум, Кишинев, 1971, 258–259.

[12] *Х. Расева, Р. Сикорский*, Математика метаматематики, М., Наука, 1972.

[13] *М. И. Верхозина*, Промежуточные позитивные логики, в сб. «Алгоритмические вопросы алгебраических систем», Иркутск, 1978, 13–25.

[14] *Л. Л. Максимова*, Предтабличные расширения логики $S4$ Льюиса, Алгебра и логика, **14**, № 1 (1975), 28–55.

[15] *L. L. Esakia, V. Yu. Meskhi*, Five critical systems, Theoria, **40**, 1977, 52–60.

Поступило 3 ноября 2004 г.

Адреса авторов:

МАКСИМОВА Лариса Львовна,
РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск,
просп. Академика Коптюга, 4
Институт математики СО РАН,
e-mail: lmaksi@math.nsc.ru

ШРАЙНЕР Павел Александрович,
РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск,
просп. Академика Коптюга, 4
Институт математики СО РАН,
e-mail: schr@ngs.ru