ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том VI, 2006 г. Выпуск 2. С. 76–87

УДК 539.375, 517.977

Выбор оптимальной формы поверхностных трещин в трехмерных телах[1]

Е. М. Рудой

Рассматривается трехмерное тело с поверхностной трещиной. На трещине заданы условия непроникания в виде системы равенств и неравенства. Считается, что тело изготовлено из однородного анизотропного материала, подчиняющегося закону Гука.

Наличие трещины приводит к тому, что область, в которой рассматривается краевая задача становится негладкой, а краевые условия на трещине – нелинейными. Теория решения таких задач была развита в [1–2], где рассматривались вариационные задачи теории упругости для тел с трещинами.

Оптимизация форм упругих тел имеет важное прикладное значение. Классический подход к исследованию таких задач можно найти в [3]. В работах [1–2, 4] рассматривались задачи с односторонними ограничениями на границе.

В настоящей работе анализируются задачи оптимизации формы поверхностной трещины в трехмерном теле и пути ее распространения. При этом целевым функционалом выступает производная функционала энергии по параметру возмущения области, полученная в работе [5]. Знание такой производной в механике разрушения, в соответствии с критерием Гриффитса [6–7], позволят ответить на вопрос: будет ли распространяться имеющаяся в теле трещина? Если производная достигнет некоторой критической величины k, то начнется процесс продвижения трещины и, как следствие, тело начнет разрушаться. Здесь k зависит от плотности поверхностной энергии и площади поверхностной трещины.

Анализ асимптотики функционалов энергии проводился во многих работах как для

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке совместной программы Германской службы академических обменов (DAAD) и Министерства образования и науки РФ (проект 71629), гранта Президента РФ (МК–9627.2006.1), Фонда содействия отечественной науке, Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00209) и при поддержке гранта НШ-7525.2006.1

линейных краевых задач [8–12], так и для задач с условиями типа Синьорини на границе [13–19].

§ 1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с липшицевой границей Γ. Пусть Ω делится поверхностью Σ на две подобласти Ω_1 и Ω_2 такие, что $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \Sigma$. Кроме того, считаем, что границы подобластей Ω_1 и Ω_2 — липшицевы.

Сделаем еще ряд предположений, касающихся поверхности Σ. Пусть ω – односвязная плоская область в $\mathbb{R}^2$. Будем считать, что

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \psi(\bar{\mathbf{x}}),\ \bar{\mathbf{x}} \in \omega\}, \tag{1.1}$$

функция $\psi \in C^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, где $C^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ — пространство локально липшецевых функций, у которых производные первого и второго порядка также локально липшецевы. Здесь и далее через $\mathbf{x}$ или $\mathbf{y}$ будем обозначать трехкомпонентный вектор координат, а через $\bar{\mathbf{x}}$ или $\bar{\mathbf{y}}$ — двухкомпонентный вектор, т. е., например, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$.

Пусть $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — вектор внешней нормали к поверхности Σ. Поверхность Σ задается в виде (1.1), поэтому вектор $\boldsymbol{\nu}$ можно определить как

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{(-\psi_{x_1}(\bar{\mathbf{x}}), -\psi_{x_2}(\bar{\mathbf{x}}), 1)}{\sqrt{1 + \psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2}}, \quad \bar{\mathbf{x}} \in \omega. \tag{1.2}$$

В плоскости, содержащей область ω введем полярную систему координат (r, φ)

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi.$$

Пусть ω_0 — односвязная плоская область с границей $\gamma_0 = \partial\omega_0$, $\omega_0 \subset \omega$. Считаем, что точка $(0,0,0)$ принадлежит ω_0, и в полярных координатах ω_0 имеет вид

$$\omega_0 = \{r < R(\varphi),\ \varphi \in [0, 2\pi],\ R(0) = R(2\pi),\ R > 0,\ R \in C^{0,1}[0, 2\pi]\},$$

где $C^{0,1}[0, 2\pi]$ — пространство липшецевых функций на отрезке $[0, 2\pi]$. Тогда справедливо следующее: $\gamma_0 = \{r = R(\varphi),\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$, $\overline{\omega}_0 = \omega_0 \cup \gamma_0$.

Будем считать, что трещина Γ_0, лежащая строго внутри области Ω, является частью поверхности Σ и задается в следующем виде:

$$\Gamma_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \psi(\bar{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{x}} \in \omega_0\}.$$

Вектор внешней нормали $\boldsymbol{\nu}_0$ к Γ_0 будет задавать формулой (1.2), в которой $\bar{\mathbf{x}} \in \omega_0$. Будем считать, что берег Γ_0^+ соответствует положительному направлению нормали $\boldsymbol{\nu}_0$, Γ_0^- — отрицательному.

Пусть $\Omega_0 = \Omega \backslash \Gamma_0$, т. е. Ω_0 — трехмерная область с границей $\Gamma \cup \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$.

Введем вектор перемещений точек тела $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$. Будем считать, что тело изготовлено из однородного анизотропного материала. Кроме того, справедлив закон Гука, связывающий между собой тензора деформаций $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^3$ и напряжений $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^3$:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{U}) = c_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\mathbf{U}), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i,j = 1,2,3,$$

где $\{c_{ijkl}\}$ — симметричный и положительно определенный тензор коэффициентов упругости, который удовлетворяет следующим соотношениям:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}, \quad c_{ijkl} = const, \quad i,j,k,l = 1,2,3,$$

$$c_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0\xi_{ij}\xi_{ij}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \ \xi_{ij} = \xi_{ji}, \, c_0 = const > 0.$$

Здесь и далее будем считать, что по повторяющимся индексам происходит суммирование. При этом, если индекс — латинская буква, то суммирование происходит от 1 до 3; если индекс — α или β, то суммирование происходит от 1 до 2. Нижние индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующим координатам, например, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ и т. д.

Сформулируем задачу об определении напряженно-деформированного состояния тела, содержащего трещину. Пусть $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in C^1(\overline{\Omega})$ — заданный вектор внешних сил. В в области Ω_0 ищется функция $\mathbf{U}_0$, удовлетворяющая уравнениям равновесия и краевым условиям

$$-\sigma_{ij,j}(\mathbf{U}_0) = f_i, \quad i = 1,2,3, \ \text{ в } \ \Omega_0, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{U}_0 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{1.4}$$

$$[\mathbf{U}_0]\boldsymbol{\nu}_0 \geq 0, \ \ \sigma_{\nu_0}(\mathbf{U}_0) \leq 0, \ \ \boldsymbol{\sigma}_{\tau_0}(\mathbf{U}_0) = 0,$$

$$\sigma_{\nu_0}(\mathbf{U}_0) \cdot [\mathbf{U}_0]\boldsymbol{\nu}_0 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \tag{1.5}$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок функции на берегах трещины, т. е. $[\mathbf{U}] = \mathbf{U}\big|_{\Gamma_0^+} - \mathbf{U}\big|_{\Gamma_0^-}$;

$$\{\sigma_{ij}(\mathbf{U})\nu_{0j}\} = \sigma_{\nu_0}(\mathbf{U}) \cdot \boldsymbol{\nu}_0 + \boldsymbol{\sigma}_{\tau_0}, \quad \sigma_{\nu_0}(\mathbf{U}) = \sigma_{ij}(\mathbf{U})\nu_{0j}\nu_{0i}.$$

Известно, что задача (1.3)–(1.5) однозначно разрешима и допускает вариационную формулировку [1].

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_0)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_0)$ состоит из функций, обращающихся в ноль на Γ. Обозначим через $H(\Omega_0)$ декартово произведение трех таких подпространств, т. е. $H(\Omega_0) = H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$. Отметим, что функции из $H(\Omega_0)$ могут принимать различные значения на берегах трещины Γ_0^+ и Γ_0^-.

Рассмотрим замкнутое и выпуклое множество

$$K_0(\Omega_0) = \{\mathbf{U} \in H(\Omega_0) \mid [\mathbf{U}]\boldsymbol{\nu}_0 \geq 0 \text{ п.в. на } \Gamma_0\}$$

и функционал энергии тела, занимаемого область Ω_0,

$$\Pi(\Omega_0; \mathbf{U}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\mathbf{U}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) - \int\limits_{\Omega_0} \mathbf{f} \mathbf{U}.$$

Тогда задача (1.3)–(1.5) эквивалентна задачи минимизации функционала энергии $\Pi(\Omega_0; \mathbf{U})$ на множестве допустимых смещений $K_0(\Omega_0)$: найти функцию $\mathbf{U}_0 \in K_0(\Omega_0)$ такую, что

$$\Pi(\Omega_0; \mathbf{U}_0) = \inf_{\mathbf{U} \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; \mathbf{U}) \tag{1.6}$$

и может быть переписана в виде вариационного неравенства [1]

$$\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\mathbf{U}_0) \varepsilon_{ij}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0) \geq \int\limits_{\Omega_0} \mathbf{f}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0), \quad \forall\, \mathbf{U} \in K_0(\Omega_0).$$

На ряду с невозмущенной задачей (1.6) рассмотрим возмущенную задачу. Для этого возмутим фронт трещины $\psi(\gamma_0)$ следующим образом. Зададим функцию $h(\varphi) \in C^1([0, 2\pi])$ такую, что $h \geq 0$, $h(0) = h(2\pi)$, $h'(0) = h'(2\pi)$, и область $\omega_\delta = \{r < R(\varphi) + \delta h(\varphi),\, \varphi \in [0, 2\pi]\}$, $\omega_\delta \subset \mathbb{R}^2$, ограниченную контуром γ_δ, $\gamma_\delta = \{r = R(\phi) + \delta h(\phi),\, \phi \in [0, 2\pi]\}$, при этом $\overline{\omega}_\delta = \omega_\delta \cup \gamma_\delta$. Тогда возмущенная трещина Γ_δ будет имеет вид:

$$\Gamma_\delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \psi(\bar{\mathbf{x}}),\, \bar{\mathbf{x}} \in \omega_\delta\}.$$

В силу гладкости функции ψ и сделанных предположений на область ω_δ, существует такое малое δ_0, что для всех $\delta < \delta_0$ трещины Γ_δ лежат строго внутри области Ω, то есть $\overline{\Gamma}_\delta \subset \Omega$ и, кроме того, $\overline{\omega}_\delta \subset \omega$. Семейство $\{\Gamma_\delta\}$ характеризует возмущение трещины Γ_0 вдоль поверхности Σ.

Обозначим через $\Omega_\delta = \Omega \backslash \overline{\Gamma}_\delta$ область с трещиной Γ_δ. Определим функционал потенциальной энергии тела, занимающего область Ω_δ, по формуле

$$\Pi(\Omega_\delta; \mathbf{U}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(\mathbf{U}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) - \int\limits_{\Omega_\delta} \mathbf{f} \mathbf{U}.$$

Аналогично пространству $H(\Omega_0)$, рассмотрим пространство $H(\Omega_\delta)$ и введем множество допустимых смещений $K_\delta(\Omega_\delta)$,

$$K_\delta(\Omega_\delta) = \{\mathbf{U} \in H(\Omega_\delta) \mid [\mathbf{U}] \boldsymbol{\nu}^\delta \geq 0 \text{ п.в. на } \Gamma_\delta\}.$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}^\delta(\bar{\mathbf{x}})$ — единичный вектор нормали к Γ_δ,

$$\boldsymbol{\nu}^\delta(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{(-\psi_{x_1}(\bar{\mathbf{x}}), -\psi_{x_2}(\bar{\mathbf{x}}), 1)}{\sqrt{1 + \psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2}}, \quad \bar{\mathbf{x}} \in \omega_\delta.$$

Задача об определении напряженно-деформированного состояния тела, занимаемого область Ω_δ, формулируется как задача минимизации функционала энергии $\Pi(\Omega_\delta; \mathbf{U})$ на множестве допустимых смещений $K_\delta(\Omega_\delta)$:

$$\Pi(\Omega_\delta; \mathbf{U}^\delta) = \inf_{\mathbf{U} \in K_\delta(\Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta; \mathbf{U}). \tag{1.7}$$

Существует единственное решение $\mathbf{U}^\delta \in K_\delta(\Omega_\delta)$ задачи (1.7), которое удовлетворяет вариационному неравенству [1]

$$\int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(\mathbf{U}^\delta)\varepsilon_{ij}(\mathbf{U}-\mathbf{U}^\delta) \geq \int\limits_{\Omega_\delta} f(\mathbf{U}-\mathbf{U}^\delta), \quad \forall\, \mathbf{U} \in K_\delta(\Omega_\delta).$$

В работе [5] выведена формула для производной функционала энергии по параметру возмущения δ, соответствующему квазистатическому росту трещины вдоль заданной поверхности, а именно

$$\mathcal{R} = \frac{d\Pi(\Omega_\delta;\mathbf{U}^\delta)}{d\delta}\bigg|_{\delta=0} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} (h\theta_k)_{,k}\sigma_{ij}(\mathbf{U}_0)\varepsilon_{ij}(\mathbf{U}_0) -$$
$$- \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\mathbf{U}_0)E_{ij}(\mathbf{U}_0) - \int\limits_{\Omega_0} h(\theta_i f_j)_{,i}u_{0j} + \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\mathbf{U}_0)\varepsilon_{ij}(\mathbf{Q}_0) - \int\limits_{\Omega_0} \mathbf{f}\mathbf{Q}_0. \quad (1.8)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\theta_l = \frac{\eta x_l}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \quad l=1,2; \qquad \theta_3 = \theta_1\psi_{,1} + \theta_2\psi_{,2};$$

η — гладкая срезающая функция такая, что $\overline{\operatorname{supp}\eta} \subset \Omega\backslash\{0\}$, $\eta = 1$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}_\psi$ фронта невозмущенной трещины Γ_0;

$$\mathbf{Q}_0 = (0,0,h\theta_\beta\psi_{,\alpha\beta}u_{0\alpha})\,; \qquad E_{ij}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\left((h\theta_k)_{,j}\frac{\partial u_i}{\partial y_k} + (h\theta_k)_{,i}\frac{\partial u_j}{\partial y_k}\right).$$

Напомним, что по α, β производится суммирование от 1 до 2, по i, j, k — от 1 до 3.

Для вывода формулы (1.8) строилось взаимно однозначное отображение $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x},\delta)$ возмущенной области Ω_δ на невозмущенную Ω_0. Здесь и далее будем считать, что координаты $\mathbf{y}$ определены для невозмущенной области Ω_0, а $\mathbf{x}$ — для возмущенной области Ω_δ. При такой замене координат множество допустимых смещений $K_\delta(\Omega_\delta)$ перейдет взаимно однозначно во множество $K_\delta(\Omega_0)$,

$$K_\delta(\Omega_0) = \{\mathbf{U} \in H(\Omega_0) \mid [\mathbf{U}]\boldsymbol{\nu}_\delta \geq 0 \text{ п.в. на } \Gamma_0\},$$

которое, вообще говоря, не совпадает со множеством $K_0(\Omega_0)$ (в случае плоской трещины данные множества совпадают). Здесь $\boldsymbol{\nu}_\delta$ — преобразованный вектор нормали $\boldsymbol{\nu}^\delta$, т. е. $\boldsymbol{\nu}_\delta(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\nu}^\delta(\mathbf{x}(\mathbf{y},\delta))$, $\mathbf{y} \in \Omega_0$, $\mathbf{x} \in \Omega_\delta$.

В [5] показано, что от срезающей функции η значение производной (1.8) не зависит, т. е. для любых двух функций η_1 и η_2 значения (1.8) будут совпадать. Кроме того, известно, что производная функционала энергии по параметру возмущения, характеризующего квазистатический рост трещины, всегда неположительна.

§ 2. Выбор оптимальной формы трещины

Будем считать, что область ω_0 и функция h (функция, задающая возмущение фронта трещины) — фиксированы, а функция ψ будет функцией управления. Рассмотрим производную функционала энергии (1.8) как функционал от ψ, т. е. $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\psi)$.

Пусть заданы ограниченное и слабо замкнутое множество $\Psi \subset H^5(\omega)$ и $k \in \mathbb{R}$, $k < 0$. Величину k будем считать константой, так как h фиксировано. Будем считать, что каждая поверхность, описываемая графиком функции $\psi \in \Psi$ лежит строго внутри области Ω.

Рассмотрим задачу оптимального управления: найти функцию $\psi_0 \in \Psi$ такую, что

$$J(\psi_0) = \inf_{\psi \in \Psi} J(\psi), \tag{2.1}$$

где $J(\psi) = \mathcal{R}(\psi) - k$.

Задача (2.1) поставлена корректно в том, смысле, что формула производной функционала энергии (1.8) выведена для трещин, обладающих $C^{2,1}$-гладкостью. В силу теорем вложения Соболева, пространство $H^5(\omega)$ вложено в $C^3(\overline{\omega})$. Кроме того, оператор вложения является вполне непрерывным. В свою очередь $C^3(\overline{\omega}) \subset C^{2,1}(\overline{\omega})$. Таким образом, мы можем рассматривать задачу (2.1) для функций $\psi \in H^5(\omega)$.

Задача (2.1) имеет простой физический смысл: найти такую форму трещины, при которой значение производной функционала энергии как можно меньше отличается от критической величины k. Если же окажется, что $J(\psi_0) > 0$, то все возможные формы трещин из множества Ψ являются безопасными. Задача (2.1) может возникнуть при проектировании изделий, в которых предусмотрены технологические разрезы, в строительстве, при анализе прочности конструкций с уже существующими трещинами и т.п.

Стоит отметить, что наличие константы k в задаче (2.1) не вносит никаких дополнительных трудностей в исследования. Тем не менее, мы оставляем k, т.к. в этом случае задача имеет физический смысл и представляет собой практический интерес.

Сделаем еще одно замечание. В работах [22–23] анализировались аналогичные задачи, но рассматриваемые в них трещины либо прямолинейные (плоские), либо накладывалось дополнительное условие существования взаимно однозначного отображения возмущенной области на невозмущенную, при котором множество допустимых смещений $K_\delta(\Omega_\delta)$ отображается так же взаимно однозначно на $K_0(\Omega_0)$. В [5, 21] выведены формулы производных функционалов энергии по параметру возмущения криволинейных или поверхностных трещин без каких-либо ограничений, кроме гладкости трещины.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Существует решение задачи* (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\psi^n\} \subset \Psi$ — минимизирующая последовательность в задаче (2.1). В силу того, что множество Ψ ограничено и слабо замкнуто, а пространство

$H^5(\omega)$ — рефлексивно, то существуют подпоследовательность, без ограничения общности, обозначаемая ψ^n, и функция $\psi \in \Psi$ такие, что

$$\psi^n \to \psi \quad \text{слабо в} \quad H^5(\omega). \tag{2.2}$$

Пространство $H^5(\omega)$ компактно вложено в $C^3(\overline{\omega})$, поэтому из (2.2) следует, что

$$\psi^n \to \psi \quad \text{сильно в} \quad C^3(\overline{\omega}). \tag{2.3}$$

Пусть Γ_0^ψ трещина, задаваемая графиком функции $y_3 = \psi(\bar{\mathbf{y}})$, $\bar{\mathbf{y}} \in \omega_0$, а область $\Omega_0^\psi = \Omega \backslash \overline{\Gamma}_0^\psi$ — область с трещиной Γ_0^ψ. Определим замкнутое выпуклое множество

$$K_0^\psi = \{\mathbf{U} \in H(\Omega_0^\psi) \mid [\mathbf{U}]\boldsymbol{\nu}^\psi \geq 0 \text{ на } \Gamma_0^\psi\},$$

где $\boldsymbol{\nu}^\psi$ — единичная нормаль к Γ_0^ψ. Аналогично для каждого n определим $\Gamma_0^{\psi^n}, \Omega_0^{\psi^n}$ и $K_0^{\psi^n}$.

Для любого натурального n можно найти решение $\mathbf{U}^n \in K_0^{\psi^n}$ следующей вариационной задачи:

$$\mathbf{U}^n \in K_0^{\psi^n}: \quad \int\limits_{\Omega_0^{\psi^n}} \sigma_{ij}(\mathbf{U}^n)\varepsilon_{ij}(\mathbf{U} - \mathbf{U}^n) \geq \int\limits_{\Omega_0^{\psi^n}} \mathbf{f}(\mathbf{U} - \mathbf{U}^n) \quad \forall \mathbf{U} \in K_0^{\psi^n}. \tag{2.4}$$

Решение задачи (2.4) равномерно ограничено по n [1], т. е. существует константа c_1 такая, что

$$\|\mathbf{U}^n\|_{H(\Omega_0^{\psi^n})} \leq c_1. \tag{2.5}$$

Рассмотрим преобразование координат, отображающее область $\Omega_0^{\psi^n}$ на область Ω_0^ψ:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3 + \xi(\mathbf{x})(\psi(\bar{\mathbf{x}}) - \psi^n(\bar{\mathbf{x}})), \tag{2.6}$$

где $\mathbf{y} \in \Omega_0^\psi$, $\mathbf{x} \in \Omega_0^{\psi^n}$. Срезающая функция ξ такая, что $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\xi = 1$ в некоторой окрестности трещины Γ_0^ψ.

При такой замене координат производные преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{x_1} &= \tilde{u}_{y_1} + \tilde{u}_{y_3}(\xi\lambda_n)_{x_1} \\ u_{x_2} &= \tilde{u}_{y_2} + \tilde{u}_{y_3}(\xi\lambda_n)_{x_2} \\ u_{x_3} &= \tilde{u}_{y_3} + \tilde{u}_{y_3}\lambda_n\xi_{x_3}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in \Omega_0^{\psi^n}$, $\mathbf{y} \in \Omega_0^\psi$, $\lambda_n = \psi - \psi^n$. Якобиан J_n преобразования (2.6) задается формулой $J_n = 1 + \lambda_n\xi_{x_3}$ и при $n \to \infty$

$$J_n^{-1} \to 1 \quad \text{сильно в} \quad L^\infty(\Omega) \tag{2.8}$$

В (2.4) сделаем замену координат (2.6) и воспользуемся формулами (2.7). В результате получим следующее вариационное неравенство, эквивалентное (2.4), $\mathbf{U}_n \in K_{0n}^\psi$

$$\int\limits_{\Omega_0^\psi} J_n^{-1}\sigma_{ij}(\mathbf{U}_n)\varepsilon_{ij}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_n) + \Phi(\mathbf{U}_{ny_i}\mathbf{U}_{ny_j}, \mathbf{U}_{ny_i}\mathbf{U}_{y_j}, (\lambda_n\xi)_{\mathbf{x}}) \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega_0^\psi} J_n^{-1}\mathbf{f}_n(\mathbf{U}-\mathbf{U}_n) \quad \forall \mathbf{U} \in K_{0n}^\psi, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{U}_n(\mathbf{y}) = \mathbf{U}^n(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}_n(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega_0^{\psi^n}$, $\mathbf{y} \in \Omega_0^\psi$. Множество $K_0^{\psi^n}$ преобразуется в K_{0n}^ψ,

$$K_{0n}^\psi = \{\mathbf{U} \in H(\Omega_0^\psi) \mid [\mathbf{U}]\boldsymbol{\nu}_{\psi_n} \geq 0 \text{ на } \Gamma_0^\psi\},$$

где $\boldsymbol{\nu}_{\psi^n}$ — преобразованный вектор нормали $\boldsymbol{\nu}^{\psi^n}$, т. е. $\boldsymbol{\nu}_{\psi^n}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\nu}^{\psi^n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{y} \in \Gamma_0^\psi$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0^{\psi^n}$. Функционал Φ линейно зависит от $\mathbf{U}_{ny_i}\mathbf{U}_{ny_j}$ и $\mathbf{U}_{ny_i}\mathbf{U}_{y_j}$. Кроме того, если $\mathbf{U}_n$ и $\mathbf{U}$ равномерно ограничены по n, то $\Phi(\mathbf{U}_{ny_i}\mathbf{U}_{ny_j}, \mathbf{U}_{ny_i}\mathbf{U}_{y_j}, (\lambda_n\xi)_{\mathbf{x}}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Из (2.5) следует, что существует такая константа c_2, не зависящая от n, что

$$\|\mathbf{U}_n\|_{H(\Omega_0^\psi)} \leq c_2.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Для любой функции* $\mathbf{W} \in K_0^\psi$ *существует последовательность функций* $\{\mathbf{W}_n\}$ *такая, что* $\mathbf{W}_n \in K_{0n}^\psi$ *и*

$$\mathbf{W}_n \to \mathbf{W} \quad \textit{сильно в} \quad H(\Omega_0^\psi).$$

Доказательство данной леммы можно найти в [1].

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{U}_n$ *— решение задач* (2.9), $\mathbf{U}_0$ *— решение задачи*

$$\mathbf{U}_0 \in K_0^\psi: \quad \int\limits_{\Omega_0^\psi} \sigma_{ij}(\mathbf{U}_0)\varepsilon_{ij}(\mathbf{U}-\mathbf{U}_0) \geq \int\limits_{\Omega_0^\psi} \mathbf{f}(\mathbf{U}-\mathbf{U}_0) \quad \forall \mathbf{U} \in K_0^\psi, \tag{2.10}$$

тогда при $n \to \infty$

$$\mathbf{U}_n \to \mathbf{U}_0 \quad \textit{сильно в} \quad H(\Omega_0^\psi). \tag{2.11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как последовательность $\{\mathbf{U}_n\}$ ограничена в пространстве $H(\Omega_0^\psi)$, то существует подпоследовательность, без ограничения общности, обозначаемая так же $\{\mathbf{U}_n\}$ и функция $\mathbf{U}_0$ такая, что

$$\mathbf{U}_n \to \mathbf{U}_0 \quad \text{слабо в} \quad H(\Omega_0^\psi). \tag{2.12}$$

Покажем, что $\mathbf{U}_0$ удовлетворяет (2.10).

В силу леммы 1, для любой функции функции $\mathbf{U} \in K_0^\psi$ существует такая последовательность функций $\{\mathbf{W}_n\}$, принадлежащих пространству $H(\Omega_0^\psi)$, что $\mathbf{W}_n \to \mathbf{U}_0$ сильно в $H(\Omega_0^\psi)$ при $n \to \infty$ и $\mathbf{W}_n \in K_{0n}^\psi$.

Подставим функцию $\mathbf{W}_n$ в (2.9) в качестве пробной функции и перейдем к пределу, воспользовавшись (2.8). В результате получим вариационное неравенство (2.10). Это означает, что $\mathbf{U}_0$ является решением задачи (2.10).

Теперь покажем, что на самом деле вместо слабой сходимости (2.12) справедлива сильная сходимость (2.11). Для функции $\mathbf{U}_0$ построим последовательность функций

$\{\mathbf{U}_{0n}\}$ такую, что $\mathbf{U}_{0n} \to 0$ сильно в $H(\Omega_0^\psi)$ и $\mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_{0n} \in K_{0n}^\psi$ (Мы можем взять указанную выше последовательность $\mathbf{W}_n$ и положить $\mathbf{U}_{0n} = \mathbf{W}_n - \mathbf{U}_0$). Подставим $\mathbf{U}_0+\mathbf{U}_{0n}$ в качестве пробных функций $\mathbf{U}$ в вариационное неравенство (2.9). В результате получим

$$\int\limits_{\Omega_0^\psi} J_n^{-1}\sigma_{ij}(\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_0)\varepsilon_{ij}(\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_0) \le \int\limits_{\Omega_0^\psi} J_n^{-1}\sigma_{ij}(\mathbf{U}_0)\varepsilon_{ij}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_{0n} - \mathbf{U}_n) +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_0^\psi} J_n^{-1}\sigma_{ij}(\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_0)\varepsilon_{ij}(\mathbf{U}_{0n}) +$$
$$+ \Phi(\mathbf{U}_{ny_i}\mathbf{U}_{ny_j}, \mathbf{U}_{ny_i}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_{0n})_{y_j}, (\lambda_n\xi)_{\mathbf{y}}) + \int\limits_{\Omega_0^\psi} J_n^{-1}\mathbf{f}_n(\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_{0n}).$$

В силу (2.8), равномерной ограниченности последовательностей $\{\mathbf{U}_n\}$, $\{\mathbf{U}_{0n}\}$, после перехода к пределу, будем иметь

$$\|\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_0\|_{H(\Omega_0^\psi)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Лемма 2 доказана.

Мы можем найти производную функционала энергии по параметру возмущения δ как для тела с трещиной $\Gamma_0^{\psi^n}$, так и для тела с трещиной Γ_0^ψ. При этом, в силу равномерной сходимости (2.3) срезающие функции η, входящие в формулы для производных, соответствующих трещинам ψ^n и ψ, начиная с достаточно большого n, можно выбирать одинаковыми. Таким образом, имеем

$$\mathcal{R}(\psi^n) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^{\psi^n}} (h\theta_k^n)_{,k}\sigma_{ij}(\mathbf{U}^n)\varepsilon_{ij}(\mathbf{U}^n) - \int\limits_{\Omega_0^{\psi^n}} \sigma_{ij}(\mathbf{U}^n)E_{ij}^n(\mathbf{U}^n) -$$
$$- \int\limits_{\Omega_0^{\psi^n}} h(\theta_i^n f_j)_{,i}u_j^n + \int\limits_{\Omega_0^{\psi^n}} \sigma_{ij}(\mathbf{U}^n)\varepsilon_{ij}(\mathbf{Q}_0^n) - \int\limits_{\Omega_0} \mathbf{f}\mathbf{Q}_0^n. \quad (2.13)$$

Индекс n в формуле (2.13) указывает на то, что вместо функции ψ в формулах (1.8) стоит функция ψ^n.

Кроме того, мы можем найти производную функционала энергии и для тела с трещиной ψ, т. е. существует $\mathcal{R}(\psi)$.

Далее, покажем, что при $n \to \infty$ выполнено

$$J(\psi^n) \to J(\psi). \quad (2.14)$$

Действительно, в (2.13) сделаем замену переменных (2.7). Тогда в силу Леммы 2, гладкости функций η, h, сходимостей (2.8) и (2.3) будет следовать (2.14).

Т.к. функция $\psi \in \Psi$, а функция $\mathbf{U}_0$ является решением задачи равновесия с трещиной ψ, то ψ — решение задачи (2.1).

Теорема 1 доказана.

§ 3. Задача оптимального управления фронтом трещины

В этом параграфе будем считать, что ω_0 и ψ фиксированы, а функция h, задающая возмущения фронта трещины, является функцией управления. Будем рассматривать производную функционала энергии (1.8) как функционал от h, т. е. $\mathcal{R} = \mathcal{R}(h)$.

Введем в рассмотрение ограниченное и слабо замкнутое множество $G \subset H^2(0, 2\pi)$ такое, что $\forall h \in G$, $h \geq 0$ на $[0, 2\pi]$. Заметим, что требование неотрицательности h необходимо лишь с физической точки зрения, т.к. процесс роста трещин необратим. С математической же точки зрения можно рассматривать знакопеременные функции h.

Для любой фиксированной функции $h \in G$ можно вычислить производную функционала энергии (1.8). Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: найти функцию $h_0 \in G$ такую, что

$$I(h_0) = \inf_{h\in G} I(h), \tag{3.1}$$

где

$$I(h) = \mathcal{R}(h) + 2\gamma \int\limits_{\partial\Gamma_0} h(s)ds,$$

а γ — плотность поверхностной энергии, $\gamma > 0$. Последнее слагаемое в $I(h)$ учитывает приращение поверхностной энергии при продвижении трещины.

Решение задачи (3.1) будет наиболее опасным возможным фронтом распространения трещины.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Существует решение задачи* (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{h^n\}$ — минимизирующая последовательность. Т.к. множество G ограничено и слабо замкнуто, то существует функция $h \in G$ такая, что

$$h^n \to h_0 \quad \text{слабо в} \quad H^2(0, 2\pi). \tag{3.2}$$

Пространство $H^2(0, 2\pi)$ компактно вложено в $C^1[0, 2\pi]$, поэтому из (3.2) следует, что

$$h^n \to h_0 \quad \text{сильно в} \quad C^1[0, 2\pi]. \tag{3.3}$$

Для каждой функции h^n мы можем найти производную функционала энергии $\mathcal{R}(h_n)$,

$$\mathcal{R}(h^n) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} (h^n\theta_k)_{,k}\sigma_{ij}(\mathbf{U}_0)\varepsilon_{ij}(\mathbf{U}_0) - \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\mathbf{U}_0)E^n_{ij}(\eta; \mathbf{U}_0) -$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} h^n(\theta_i f_j)_{,i}u_{0j} + \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\mathbf{U}_0)\varepsilon_{ij}(\mathbf{Q}^n_0) - \int\limits_{\Omega_0} \mathbf{f}\mathbf{Q}^n_0.$$

Индекс n в формуле указывает на то, что вместо функции h в формулах (1.8) стоит функция h^n.

Так как функционал $I(h)$ линейно зависит от h и имеет место сходимость (3.3), то

$$I(h^n) \to I(h_0) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, мы показали, что функция h_0, принадлежащая множеству G, доставляет минимум функционалу $I(h)$. Терема 2 доказана.

В заключение отметим, что вместо задач минимизации (2.1) и (3.1) можно рассматривать задачи максимизации соответствующих функционалов. При этом аналогичными рассуждениями доказываются теоремы существования таких задач.

Автор выражает благодарность профессору Ф. Трёльчу (F. Troeltzsch, Берлинский технический университет, Германия), во время визита к которому была написана данная статья.

Литература

[1] *A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko*, Analysis of cracks in solids, Southampton; Boston, WIT-Press, 2000.

[2] *A. M. Khludnev, J. Sokolowski*, Modelling and control in solid mechanics, Birkhauser, Basel, 1997.

[3] *Н. В. Баничук*, Оптимизация форм упругих тел, М., Наука, 1980.

[4] *А. М. Хлуднев*, Об экстремальных формах разрезов в пластине, Изв. РАН., МТТ, № 1 (1992), 170–176.

[5] *Е. М. Рудой*, Дифференцирование функционалов энергии в трехмерной теории упругости для тел, содержащих поверхностные трещины, Сиб. журн. индустр. математики., **8**, № 1 (2005), 106–116.

[6] *В. З. Партон, Е. М. Морозов*, Механика упруго-пластического разрушения, М., Наука, 1974.

[7] *Г. П. Черепанов*, Механика хрупкого разрушения, М., Наука, 1974.

[8] *V. A. Kovtunenko*, Shape sensitivity of a plane crack front, Math. Meth. Appl. Sci., **26** (2003), 359–374.

[9] *K. Ohtsuka*, Mathematics of brittle fracture, Theoretical Studies on Fracture Mechanics in Japan, 1997, 99–172.

[10] *В. Г. Мазья, С. А. Назаров*, Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях вблизи угловых и конических точек, Тр. Моск. мат. о-ва, **50** (1987), 79–129.

[11] *S. Garreau, P. Guillaume, M. Masmoudi*, The topological asymptotic for PDE system: the elasticity case, SIAM J. Control Optim., **39**, No. 6 (2001), 1756–1778.

[12] *J. Sokolowski, A. Zochowski*, On the topological derivative in shape optimization, SIAM J. Control Optim., **37**, No. 4 (1999), 1251–1272.

[13] *A. M. Khludnev, J. Sokolowski*, The Griffith formula and the Rice-Cherepanov integral for crack problems with unilateral conditions in nonsmooth domains, Euro. J. Appl. Math., **10**, No. 4 (1999), 379–394.

[14] *В. А. Ковтуненко*, Инвариантные интегралы энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов, ПММ., **67**, Вып. 1 (2003), 109–123.

[15] *Я. Соколовский, А. М. Хлуднев*, О дифференцировании функционалов энергии в теории трещин с возможным контактом берегов, Докл. РАН, **374**, № 6 (2000), 776–779.

[16] *Е. М. Рудой*, Формула Гриффитса для пластины с трещиной, Сиб. журн. индустр. мат., **5**, № 3 (2002), 155–161.

[17] *V. A. Kovtunenko*, Shape sensitivity of curvilinear cracks on interface to non-linear perturbations, Z. angew. Math. Phys., **54**, 2003, 410–423.

[18] *V. A. Kovtunenko*, Sensitivity of interfacial cracks to non-linear crack front perturbations, Z. angew. Math. Mech., **82**, 2002, 387–398.

[19] *A. M. Khludnev, K. Ohtsuka, J. Sokolowski*, On derivative of energy functional for elastic bodies with cracks and unilateral conditions, Quart. Appl. Math., **60**, 2002, 99–109.

[20] *Е. М. Рудой*, Инвариантные интегралы для задачи равновесия пластины с трещиной, Сиб. мат. журн., **45**, № 2 (2004), 466–477.

[21] *Е. М. Рудой*, Дифференцирование функционалов энергии в двумерной теории упругости для тел, содержащих криволинейные трещины, ПМТФ, **45**, № 6 (2004), 83–94.

[22] *A. Khludnev, A. Leontiev, J. Herskovits*, Nonsmooth domain optimization for elliptic equations with unilateral conditions, J. Math. Pures Appl., **83**, 2003, 197–212.

[23] *D. Hoemberg, A. M Khludnev*, On safe crack shapes in elastic bodies, Eur. J. Mech. A/Solids, **21**, 2002, 991–998.