ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том VI, 2006 г. Выпуск 2. С. 57–66

УДК 517.958.532

Стационарные задачи тепловой двухфазной фильтрации[1]

В. Н. Монахов

Введение

Поддержание пластового давления в нефтяных коллекторах путем закачки в них жидкости или газа с температурой, отличной от пластовой, является существенно неизотермическим процессом, в котором необходимо учитывать тепловое воздействие на физическое состояние всей системы — вытесняющей жидкости, нефти и порового пространства.

Для описания этого процесса В. Н. Монаховым и О. Б. Бочаровым [1, 2] была предложена математическая модель (МЛТ модель), основанная на изотермической модели Маскета – Леверетта [3] и учитывающая тепловые эффекты через известные зависимости от температуры вязкостей и капиллярных свойств компонент двухфазной жидкости.

В отличие от используемых ранее тепловых моделей двухфазной фильтрации [4], МЛТ модель, во-первых, технологична в том смысле, что в ней употребляются только экспериментально определяемые функциональные параметры и, во-вторых, уравнение энергии в ней является следствием законов сохранения энергии компонент жидкости и пористой среды.

Математическая теория теплового воздействия на фильтрацию двухфазной жидкости в пористой среде в рамках МЛТ-модели была построена в работах В. Н. Монахова, О. Б. Бочарова [1, 2] и В. Н. Монахова, Р. Юинга [5].

Случай изотермической фильтрации (МЛ модель) изучался С. Н. Антоцевым и В. Н. Монаховым [3], Н. В. Хуснутдиновой [7] доказано существование автомодельных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00131) и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (№ НШ — 7225.2006.1 и НШ-7525.2006.1)

решений, А. В. Кажиховым [8] предложен сходящийся численный алгоритм их построения, реализованный им на ЭВМ.

§ 1. Тепловая модель фильтрации Маскета – Леверетта (МЛТ модель)

Основными характеристиками движущихся жидкостей являются s_i, $\rho_i = \mathrm{const}$, p_i, $\mu_i(\theta)$ и $\vec{v}_i$ $(i = 1, 2)$ — фазовые насыщенности (концентрации, $s_1 + s_2 = 1$), плотности, давления, вязкости и скорости (расходы), а также $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ — скорость фильтрации смеси. Неоднородная анизотропная пористая среда характеризуется пористостью $m(x)$ (отношением объема пор к общему объему), тензором $K(x)$ абсолютной проницаемости, относительными фазовыми проницаемостями $k_i(s_i)$, $i = 1, 2$.

Уравнения МЛТ модели имеют вид

$$\begin{aligned} m\frac{\partial}{\partial t}(s_i\rho_i) + \nabla\cdot(\rho_i\vec{v}_i) = 0;\\ -\vec{v}_i = K\frac{k_i}{\mu_i}(\nabla p_i + \rho_i\vec{g});\\ p_1 - p_2 = q(x, s, \theta);\\ \frac{\partial\theta}{\partial t} = \nabla\cdot(\lambda\nabla\theta - \vec{v}\theta), \quad s = s_1, \quad s_2 = 1 - s. \end{aligned} \tag{МЛТ}$$

Обозначения: $q = q(x, s, \theta)$ — капиллярное давление, $\lambda = \lambda(x, s, \theta)$ — обобщенный коэффициент температуропроводности (q и λ — заданные функции), θ — равновесная температура.

Введем среднее давление смеси p [3]:

$$p = p_2 - \int\limits_s^1 b(\xi,\theta)q_\xi(x,\xi,\theta)\,d\xi, \quad b = \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}, \quad \bar{k}_i = \frac{k_i}{\mu_i},$$

и интегральное распределение $u(s)$ насыщенности s:

$$u(s) = \int\limits_0^s a(\xi)\,d\xi, \quad a = \delta k_1 k_2, \quad u(1) = 1 \ \ (\delta = \mathrm{const}),$$

где $a(0) = a(1) = b(0, \theta) = 0$, $b(1, \theta) = 1$.

Тогда в стационарном случае уравнения (МЛТ) преобразуются в следующую систему для искомого вектора $\vec{u} = (u, p, \theta) \equiv (u_1, u_2, u_3)$ [5]:

$$\operatorname{div}\vec{V}_i = 0, \quad \vec{V}_i \equiv (K_i\nabla u_i + A_i\nabla\theta - b_i\vec{v} + \vec{f}_i), \quad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Здесь, $K_1 = Kq_s a_0$, $a_0(u, \theta) = \delta(\mu_2 k_1 + \mu_1 k_2)^{-2}$, $K_2 = K(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)$, $\vec{f}_1 = Kaa_0\nabla q - \vec{v}b$, $\vec{f}_2 = \vec{f}_2(x, u, \theta)$, $c = -K_1 q_\theta - \int_s^1 (bq_s)_\theta ds$, $\vec{f}_1 \big|_{u=0,1} = 0$, $K_3 = \lambda$, $f_3 = 0$. Отметим, что $-\vec{V}_1 = \vec{v}_1, -\vec{V}_2 = \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Согласно физическому смыслу функциональных параметров МЛТ-модели вектор $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}(x,u,\theta)$ коэффициентов системы уравнений (1) удовлетворяет следующим условиям:

(i) $K_i\vec{\xi}\vec{\xi} \geq \gamma|\vec{\xi}|^2$, $i = 1,2,3$, при $(x,u,\theta) \in \bar{R}$, $R = \Omega \times (0,1) \times [\theta_*, \theta^*]$ (эллиптичность системы (1));

(ii) $\vec{\Phi} = (K_1, K_2, a, a_0, b, c, \lambda, \nabla q, q_s, q_\theta, \vec{f_2}) \in C(\bar{R})$.

Замечание. Если первое уравнение (1) рассматривать относительно $s(x)$, то оно будет вырождающимся, поскольку $\nabla u = a(s)\nabla s$, где $a(0) = a(1) = 0$. Но $s = s(u)$, $u \in [0,1]$, однозначно определяется, так как $u_s = a(s) > 0$, $s \in (0,1)$.

Для системы уравнений (1) изучается первая краевая задача в конечной области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\,\Omega$:

$$(\vec{u} - \vec{u}_0)\,\big|_{\partial\,\Omega} = 0. \tag{2}$$

Вектор $\vec{u}_0(x) = (u_0, p_0, \theta_0)$ задан в $\bar{\Omega}$ и подчиняется условиям:

(iii) $0 \leq u_0(x) \leq 1$, $\theta_* \leq \theta_0(x) \leq \theta^*$, $x \in \partial\,\Omega$, причем $\vec{u}_0, \vec{u}_{0x} \in L_\infty(\Omega)$, $\vec{u}_{0x} = (\nabla u_0, \nabla p_0, \nabla \theta_0)$.

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1), (2) назовем вектор-функцию $\vec{u}(x) = (u,p,\theta)$, $(\vec{u} - \vec{u}_0) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $u,\theta \in L_\infty(\Omega)$, удовлетворяющую следующим интегральным тождествам для произвольной $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ [4]:

$$L_i(\omega_i, \varphi_i) \equiv (K_i\nabla\omega_i + F_i, \nabla\varphi_i) = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{3}$$

Здесь $\vec{\omega} = (\vec{u} - \vec{u}_0) \equiv (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\vec{F_1} = \vec{f_1} + K_1\nabla u_0 - \vec{v}u_0$, $\vec{F_2} = \vec{f_2} + K_2\nabla p_0 + c\nabla\theta_0$, $\vec{F_3} = \lambda\nabla\theta_0 - \vec{v}\theta_0$; $(f,g) = (f,g)_\Omega = \int_\Omega f(x)g(x)dx$. Нами используются общепринятые обозначения норм и пространств [3, 6].

§ 2. Принципы максимума

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\nabla\cdot(A\nabla u - \vec{v}u + \vec{f}) + \vec{a}\,\nabla u - F = 0; \quad \nabla\cdot\vec{v} = 0; \quad (u - u_0)\,\big|_{\partial\,\Omega} = 0. \tag{4}$$

Теорема 1 (принцип максимума). *Пусть* $\vec{f} = 0$, $F(x,u) \in L_2(\Omega)$ *при* $|u| < \infty$, $F \cdot \operatorname{sgn} u \geq 0$ *и выполняются предположения*

$$\begin{gathered} A\vec{\xi}\vec{\xi} \geq \gamma|\vec{\xi}|^2, \quad \gamma > 0; \quad \sup_\Omega(|A(x)| + |\vec{a}(x)|) = \mu < \infty; \\ \vec{v}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega); \quad u_0(x) \in W_2^2(\Omega). \end{gathered} \tag{a}$$

Тогда для обобщенных решений $u(x)$, $(u-u_0) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, *задачи* (4) *выполняются неравенства*

$$m_0 = \inf_{\partial\Omega} u_0(x) \le u(x) \le \sup_{\partial\Omega} u_0(x) = M_0. \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что

$$M = \sup_{\Omega} u(x) > M_0 = \sup_{\partial\Omega} u_0(x)$$

(для определенности $M_0 \ge 0$), и введем срезающую функцию

$$\bar{u} = \sup(u-k, 0), \quad k = \text{const}, \quad M_0 < k < M.$$

Положим

$$\Omega_k = \{x \mid u(x) > k\}, \quad \Omega_k^0 = \{x \mid u(x) = k\}$$

и отметим, что

$$\|\bar{u}\|_{\Omega_k} = \|u-k\|_{\Omega_k}, \quad \|\nabla\bar{u}\|_{\Omega_k} = \|\nabla u\|_{\Omega_k}, \quad \bar{u}\big|_{\Omega_k^0} = \nabla\bar{u}\big|_{\Omega_k^0} = 0.$$

Умножим скалярно (4) на $\bar{u}$, обозначая $E_k = \Omega_k \setminus \Omega_M^0$. Учитывая, что $(F, \bar{u})_{\Omega_k} \ge 0$ $(\bar{u} = u - k \ge 0)$ и $(\vec{v}, \nabla(\bar{u})^2)_{E_k} = 0$, получим

$$\gamma\|\nabla\bar{u}\|_{E_k}^2 \le (A\nabla\bar{u}, \nabla\bar{u})_{E_k} = (\vec{a}+\vec{v}, u\nabla\bar{u})_{E_k} - (F, \bar{u})_{\Omega_k} \le \mu(|\bar{u}|, |\nabla\bar{u}|)_{E_k}.$$

Пользуясь неравенством Пуанкаре [6, с. 71]

$$\|\bar{u}\|_{E_k} \le C(E_k)\|\nabla\bar{u}\|_{E_k}, \quad \bar{u}\big|_{\partial E_k} = 0,$$

приходим к неравенству

$$\gamma\|\nabla\bar{u}\|_{E_k}^2 \le \mu C(E_k)\|\nabla\bar{u}\|_{E_k}^2.$$

Поскольку $\operatorname{mes} E_k \to 0$ при $k \to M$ и при этом $C(E_k) \to 0$, то при k, достаточно близком к M, из полученного неравенства следует, что $\nabla\bar{u} = 0$, $x \in E_k$, и тем самым $\sup\limits_{\Omega} u(x) = k < M$, что противоречит исходному предположению $\sup\limits_{\Omega} u(x) = M$ [6, с. 101–114]. Аналогично доказывается нижняя оценка (5).

Теорема 2 (обобщенный принцип максимума). *Пусть дополнительно к предположениям* (а) *теоремы 1 выполняются условия:*

$$\begin{gathered} (F(x,u), \vec{f}(x,u)) \in L_2(\Omega) \text{ при } u \in [u_*, u^*], \\ F = \vec{f} = 0 \text{ при } u \notin (u_*, u^*), \end{gathered} \tag{б}$$

причем

$$m_0 = \inf_{\partial\Omega} u_0(x) \ge u_*, \quad M_0 = \sup_{\partial\Omega} u_0(x) \le u^*.$$

Тогда для обобщенных решений $u(x)$, $(u-u_0) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, *справедливы оценки*

$$u_* \le u(x) \le u^*, \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $M = \max\limits_{\Omega} u(x) > u^*(\geq 0)$ и выберем число k, $u^* < k < M$. Умножим (4) скалярно на $\bar{u} = \sup\limits_{\Omega}(u - k, 0)$ и учтем, что $F = \vec{f} = 0$ при $x \notin \Omega_k$. В результате приходим к равенству

$$(A\nabla\bar{u}, \nabla\bar{u})_{E_k} = (\vec{a}\nabla\bar{u}, \bar{u})_{E_k}, \quad E_k = \Omega_k \setminus \Omega^0_M,$$

из которого, как и при доказательстве теоремы 1, при $(M - k) \ll 1$ следует неравенство $\sup\limits_{\Omega} u(x) = k < M$, противоречащее исходному предположению. Аналогично устанавливается и нижняя оценка (6).

Теорема 3 (об априорных оценках). *Для обобщенных решений* $\vec{u}(x)$, $(\vec{u} - \vec{u}_0) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $(u, \theta) \in L_\infty(\Omega)$, *задачи* (1), (2) *выполняются следующие априорные оценки:*

$$0 \leq u(x) \leq 1; \quad \theta_* \leq \theta(x) \leq \theta^*, \quad x \in \bar{\Omega}; \tag{7}$$

$$(\|\vec{u}_x\|, \|\vec{v}\|) \leq C\|\vec{u}_{0x}\|, \tag{8}$$

где $\vec{u}_x = (\nabla u, \nabla p, \nabla\theta)$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки (7) получаются непосредственным применением к первому уравнению (1) теоремы 2 и к третьему — теоремы 1. Подставим в интегральные тождества (3) $\varphi_i = \omega_i$:

$$L_i(\omega_i, \omega_i) = 0; \quad i = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Последовательно из (9) находим

$$\|\nabla\bar{\theta}\|^2 \leq \varepsilon\|\vec{v}\|^2 + M_2\|\nabla\theta_0\|^2;$$

$$\gamma\|\nabla\bar{p}\|^2 \leq (K_2\nabla\bar{p}, \nabla\bar{p}) = -(c\nabla\bar{\theta} + \vec{f}_2, \nabla\bar{p}) \leq \frac{\gamma}{2}\|\nabla\bar{p}\|^2 + M_3\|\nabla\bar{\theta}\|^2 + M_4\|\vec{u}_{0x}\|^2.$$

Откуда

$$\frac{\gamma}{2}\|\nabla\bar{p}\|^2 \leq M_3\|\nabla\bar{\theta}\|^2 + M_4\|\vec{u}_{0x}\|^2,$$

следовательно,

$$\|\vec{v}\|^2 \leq M_5(\|\nabla\bar{p}\|^2 + \|\nabla\bar{\theta}\|^2 + \|\vec{u}_{0x}\|^2) \leq M_6(\|\nabla\bar{\theta}\|^2 + \|\vec{u}_{0x}\|^2),$$

где $(\bar{u}, \bar{p}, \bar{\theta}) = (u - u_0, p - p_0, \theta - \theta_0)$.

Используя в полученном неравенстве оценку $\|\nabla\bar{\theta}\|^2 \leq \varepsilon\|\vec{v}\|^2 + M_2\|\nabla\theta_0\|^2$ и, полагая $\varepsilon = (2M_6)^{-1}$, приходим к оценке $\|\vec{v}\|^2 < 2M_6\|\vec{u}_{0x}\|^2$, из которой следуют также неравенства (8) для $\|\nabla p\|$ и $\|\nabla\theta\|$. Из первого соотношения (9) аналогично получаем оценку (8) для $\|\nabla u\|$.

§ 3. Разрешимость задачи (1), (2)

Будем строить обобщенное решение $\vec{u}(x)$, $\vec{\omega} \equiv (\vec{u} - \vec{u}_0) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, уравнений (3) методом Галеркина. Введем в гильбертовом пространстве $H(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ортонормированный базис $\{\varphi_i(x)\}$ и рассмотрим конечномерные подпространства $H^s(\Omega) \subset H(\Omega)$, $s = 1, 2, \ldots$, функций

$$\vec{W}^s = \sum_{i=1}^{s} \vec{A}_i^s \varphi_i(x),$$

$\vec{A}^s = (A_1^s, A_2^s, A_3^s)$, $A_l^s = (A_{l1}^s, A_{l2}^s, \ldots, A_{ls}^s)$, $A_{li}^s = \mathrm{const}$ — коэффициенты разложений вектор-функции $\vec{W}^s(x) = (\bar{u}^s(x), \bar{p}^s(x), \bar{\theta}^s(x))$.

Выберем произвольный элемент $\vec{W}_*^N \in H^N(\Omega)$ и подставим его компоненты $\bar{u}_*^N(x)$ и $\bar{\theta}_*^N(x)$ в вектор $\vec{\Phi}(x, \bar{u} + u_0, \bar{\theta} + \theta_0)$, коэффициентов уравнений (3) вместо $\bar{u}$ и $\bar{\theta}$ (в условии (ii) — $\vec{\Phi}(x, u, \theta) \in C(\bar{R})$), обозначая полученный вектор через $\vec{\Phi}_*^N(x)$. Для определения коэффициентов A_{li}^N ($l = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, \ldots, N$) галеркинских приближений $\vec{u}^N = \vec{W}^N + \vec{u}_0$, $\vec{W}^N = (\bar{u}^N, \bar{p}^N, \bar{\theta}^N)$, где

$$\bar{u}^N = \sum_{i=1}^{N} A_{1i}^N \varphi_i(x), \quad \bar{p}^N = \sum_{i=1}^{N} A_{2i}^N \varphi_i(x), \quad \bar{\theta}^N = \sum_{i=1}^{N} A_{3i}^N \varphi_i(x),$$

рассмотрим следующую линейную алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&L_1^*(\bar{u}^N, \varphi_i) \equiv (K_{1*}^N \nabla \bar{u}^N - \vec{v}^N \bar{u}^N + \vec{F}_{1*}^N, \nabla \varphi_i) = 0, && i = \overline{1, N};\\
&L_2^*(\bar{p}^N, \varphi_i) \equiv (K_{2*}^N \nabla \bar{p}^N + c_*^N \nabla \bar{\theta}^N + \vec{F}_{2*}^N, \nabla \varphi_i) = 0, && i = \overline{1, N};\\
&L_3^*(\bar{\theta}^N, \varphi_i) \equiv (\lambda_*^N \nabla \bar{\theta}^N - \vec{v}^N \bar{\theta}^N + \vec{F}_{3*}^N, \nabla \varphi_i) = 0, && i = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $-\vec{v}^N = K_{2*}^N \nabla \bar{p}^N + c_*^N \nabla \bar{\theta}^N + \vec{F}_{2*}^N$. Умножая каждое из уравнений (10) на a_i^N и суммируя по i, $i = \overline{1, N}$, получим следующий аналог соотношений (3):

$$L_1^*(\bar{u}^N, \varphi^s) = 0; \quad L_2^*(\bar{p}^N, \varphi^s) = 0; \quad L_3^*(\bar{\theta}^N, \varphi^s) = 0, \tag{11}$$

где $\varphi^s = \sum\limits_{i=1}^{s} a_i^s \varphi_i$, $s = 1, 2, \ldots$

Из интегральных тождеств (11) для вектор-функций $\vec{W}^N(x) = (\bar{u}^N, \bar{p}^N, \bar{\theta}^N)$ следует справедливость оценок вида (8):

$$\|\vec{W}_x^N\| \le M(\|\vec{u}_{0x}\|), \quad M(0) = 0. \tag{12}$$

Таким образом, однородная система (10) (при $\vec{u}_{0x} = 0$) имеет только тривиальное решение $\vec{A}_i^N = 0$, $i = \overline{1, N}$, и тем самым галеркинские приближения $\vec{W}^N = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{A}_i^N \varphi_i(x)$ определяются однозначно.

В силу оценки (12) галеркинские приближения $\vec{W}^N = \vec{u}^N - \vec{u}^0$ слабо компактны в $H(\Omega)$. Выделим из $\vec{W}^N = (\bar{u}^N, \bar{p}^N, \bar{\theta}^N)$ слабо сходящуюся в $H(\Omega)$ последовательность (сохраним за ней прежние обозначения) и подставим в коэффициенты соотношений (3) $\vec{\Phi}(x,u,\theta)$ компоненты $u = \bar{u}^N + u_0$, $\theta = \bar{\theta}^N + \theta_0$. Непрерывность $\vec{\Phi}(x,u,\theta)$ позволяет стандартным образом [3, 6] перейти в интегральных тождествах (11) к пределу при $N \to \infty$, в результате чего приходим к соотношениям (3) $\forall\varphi \in H^s(\Omega)$ для предельного вектора $\vec{W} = (\bar{u}, \bar{p}, \bar{\theta})$.

Поскольку $H^s(\Omega)$ всюду плотно в $H(\Omega)$, то предельная функция $\vec{u} = \vec{W} + \vec{u}_0$ является обобщенным решением задачи (1), (2).

Теорема 4 (существования). *При выполнении предположений (i)–(iii) задача* (1), (2), *имеет по крайней мере одно обобщенное решение $\vec{u}(x)$, $(\vec{u} - \vec{u}_0) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, для которого выполняются оценки* (7), (8) *теоремы 3.*

§ 4. Доказательство гладкости регулярных решений задачи (1), (2)

Введем обозначение: $|f|_\Omega^{(l+\alpha)} = \|f\|_{C^{l+\alpha}(\Omega)}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 5. *Пусть выполнены предположения $(i) - (iii)$, причем*

$$|\Phi|_\Omega^{(l)} \le M_3, \quad [l] \le 2, \quad \alpha = l - [l] > 0, \quad |A_1|_\Omega \le \varepsilon, \tag{13}$$

где $\varepsilon > 0$ является малым числом. Тогда существует такое $\alpha_0 > 0$, что

$$|\vec{u}|_\Omega^{(l_0)} \le N(\Omega'), \quad l_0 = [l] + \alpha_0, \quad \bar{\Omega}' \subset \Omega. \tag{14}$$

При этом $\Omega' = \Omega$, если дополнительно имеем

(iv) $\partial\,\Omega \in H^{l+1}[3]$, $|\vec{u_0}|^{l+1} \le M_1$

и выполняются условия согласования до порядка $[l]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по схеме, разработанной в [5] для нестационарных задач. Поэтому здесь сосредоточимся на моментах доказательства, отличающихся от нестационарного случая. Следует отметить, что предположение о малости $|A_1|_\Omega$ в (13) фактически не является ограничительным условием. Как показано Б. В. Боярским [9], если матрица (K_i, A_i, b_i), соответствующая искомому вектору $u = (u_1, u_2, u_3)$ невырождена (условия $((i)$,$(ii))$, то она может быть преобразованием переменных приведена к квазитреугольному виду: $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ii} \ge \alpha > 0$, $|a_{ij}| \le \varepsilon \ll 1$, $i \ne j$ при произвольном $\varepsilon > 0$.

При условиях (iv) используется стандартное продолжение в более широкую область определения $\Omega^* \supset \Omega$. Тогда оценка (14) будет справедлива при $\Omega' = \Omega$. Поэтому ограничимся случаем $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.

В уравнении (1) для $u_1(x,t)$ вместо члена $A_1\nabla\theta$ подставляем $A_1\nabla\theta_h$, где θ_h — усреднение Стеклова, $\theta(x,t)=u_3$.

Выберем $h>0,\ N>0$ и $\varepsilon>0$ так, чтобы

$$\varepsilon\big(\|\theta_h\|_\Omega+\|\theta_{hxxx}\|_{2,\Omega}\big)\le N. \tag{15}$$

Полученное решение задачи, как и ранее, обозначается через $u=(u_1,u_2,u_3)$. В силу ограниченности $A_1\nabla\theta$ из уравнения (1) (при $i=1$) находим $u_1\in C^{\alpha_0}(\Omega')\cap W^1_{q_0}(\Omega')$, $\bar\Omega'\subset\Omega,\ \alpha_0>0,\ q_0\ge 2$. Используя затем уравнение (1) (с $i=3$), получаем $u_3\in C^{\alpha_0}$ [3, Теорема 8.1].

Таким образом, имеем

$$|u_k|^{(\alpha_0)}_{\Omega'}\le N,\quad \alpha_0>0,\quad k=1,3. \tag{16}$$

При выполнении (16) и рассмотрении интегральных тождеств (3), с помощью мультипликативных неравенств из [3] для (u_{1x},u_{3x}) находим

$$J\le C\sum_1^3(\varepsilon_k\delta a^{-1}\rho^{2a}+\delta)\|u_{kxx}\xi^2\|^2_{2,\Omega}+c_0(\rho), \tag{17}$$

где

$$I=\sum_1^3 J_k(u_k),I_k(u_k)=\|u_{kxx}\xi^2\|^2_{2,\Omega}.$$

Выбирая $\rho>0$ и $\delta>0$ и покрывая Ω конечным числом областей, из (17) получаем

$$\|\vec u_{xx}\|_{2,\Omega}\le N(\bar\Omega). \tag{18}$$

Из (18) следует, что (17) является справедливым и для $k=2$. Теперь, рассматривая уравнение (1) при $i=1$, в котором

$$A_1\in C^\alpha(\Omega'),\quad |\vec f_0|\le M,\quad \vec f_0=A_1\nabla\theta_h+\vec f_1,$$

получаем

$$u_{1x}\in L_{q,\infty}(\Omega),\quad \forall q\in(1,\infty),$$

(см. [3, Теорема 4.2]). Тогда, используя (1), находим $(u_1,u_2)\in L_4(\Omega)$ [3, Теорема 5.3], т.е.,

$$\|\vec u_x\|_{q,\Omega}\le N(q,\Omega),\forall q\in(1,\infty). \tag{19}$$

Возвращаясь к уравнениям (1) для u_1,u_2,u_3, из оценок (16)–(19) получаем (14) когда $l_0=2+\alpha_0$, $\alpha_0>0$. Это позволяет совершить предельный переход по параметру усреднения h. Дальнейшее увеличение гладкости ($[l]\ge 2$) устанавливается стандартным методом дифференцирования уравнений (1). Теорема доказана.

§ 5. Итерационный процесс. Скорость сходимости приближений

Рассмотрим следующую итерационную схему решения задачи (1), (2)

$$\nabla \cdot (K_i^m \nabla u_i^{m+1} + \vec{F}_i^m) = 0, \quad (\vec{u}^{m+1} - \vec{u}_0)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{20}$$

Здесь

$$\vec{F}_i^m = A_i^m \nabla \theta^m - b_i^m \vec{v}^m + \vec{f}_i^m,$$

вектор $\vec{\Phi}_i^m = (K_i^m, \vec{F}_i^m)$, $i = 1, 2, 3$, коэффициентов уравнения (20) вычисляется итерационным путем:

$$\Phi_i^m = \Phi_i(x, \vec{u}^m, \vec{u}_x^m),\ m = 0, 1, \ldots$$

Линейные эллиптические уравнения (20) решаются последовательно: в первую очередь для u_1^{m+1}, затем для u_3^{m+1}, и в последнюю очередь для u_2^{m+1}.

Аналогичный метод итераций использовался при доказательстве теоремы 5, поэтому ее результаты справедливы и для итерационной задачи (20) [5].

Теорема 6. *При условиях теоремы 5, для решений $\vec{u}^{m+1}$ итерационной эллиптической системы уравнений* (20) *справедлива оценка вида* (14)*:*

$$|\vec{u}|_{\Omega}^{(l_0)} \le N(\Omega'), \quad l_0 = [l] + \alpha_0, \quad \bar{\Omega}' \subset \Omega. \tag{21}$$

Не повторяя рассуждений работы [5] применительно к нашему стационарному случаю, приведем доказанную в ней оценку скорости сходимости приближенных решений задачи (20).

Теорема 7. *Пусть в* (1) $A_1 = 0$ *и выполнены условия теоремы 5 при* $[l] = 2$. *Тогда при* $m \to \infty$ *приближения* $\vec{u}^{m+1}$ *сходятся к классическому решению* $\vec{u} \in C^{2+\alpha_0}(\Omega)$, $\alpha_0 > 0$, *задачи* (1), (2), *причем для вектора* $\vec{v}^{m+1} = \vec{u}^{m+1} - \vec{u}$ *выполняются оценки*

$$\|(\vec{v}^{m+1}, \vec{v}_x^{m+1})\|_{2,\Omega} \le \varepsilon(m); \quad \|\vec{v}^{m+1}\|_{\infty,\Omega} \le \varepsilon^{\beta}, \quad \beta \in (0, 1), \tag{22}$$

где $\varepsilon = C(m!)^{-1/2}$ *и постоянная* C *зависит только от данных задачи.*

Литература

[1] *О. Б. Бочаров, В. Н. Монахов*, Краевые задачи неизотермической двухфазной фильтрации в пористых средах, Динамика сплошной среды, Новосибирск, Вып. 86, 1988, 47–59.

[2] *О. Б. Бочаров, В. Н. Монахов*, Неизотермическая фильтрация несмешивающихся жидкостей с переменными остаточными насыщенностями, Динамика сплошной среды, Новосибирск, Вып. 88, 1988, 3–12.

[3] *С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов*, Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосибирск, Наука, 1983.

[4] *Э. Б. Чекалюк*, Термодинамика нефтяного пласта, М., Недра, 1965.

[5] *H. E. Ewing, V. N. Monakhov*, Nonisotermal two-phase filtration in porous media, Free Boundery Problems in Continuum Mechanics, International Series of Numerical Mathematics, **106**, 1992, 121–130.

[6] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., Наука, 1973.

[7] *Н. В. Хуснутдинова*, О поведении решений краевых задач нестационарной фильтрации, Автореферат диссертации канд. физ.-мат. наук, Казань, 1961.

[8] *А. В. Кажихов*, Некоторые автомодельные задачи нестационарной фильтрации и их численное решение, Динамика сплошной среды, Новосибирск, № 3, 1969, 33–44.

[9] *Б. В. Боярский*, Теория обобщенного аналитического вектора, Ann. Pol. Math., **16**, 1966, 281–320.