ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том VI, 2006 г. Выпуск 2. С. 33–56

УДК 517.982

Шкалы пространств L_p и их связь с пространствами Орлича[1]

А. Е. Мамонтов

Введение

В теоремах вложения, а также в прикладных задачах (см., например, [1–7]), может возникать ситуация, когда норма некоторой измеримой функции u оценивается в целой шкале пространств Лебега L_p:

$$\|u\|_{L_p} \leqslant C_1 \omega(p), \quad p \in (\alpha, \beta) \tag{0.1}$$

(здесь C_1 не зависит от p, и $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$). Ясно, что если мы не хотим терять информацию о функции u, нередко добытую с большим трудом, мы вынуждены далее «носить с собой» целое семейство оценок (0.1), не «загрубляя» функцию ω, так как заранее, вообще говоря, неясно, в каких пределах мы можем ее менять (т. е. заменять на более простую по форме). В некоторых из упомянутых работ (см. [5–7]) отмечено (для конкретных, достаточно простых функций ω, с $\beta = +\infty$), что из (0.1) следует оценка функции u в пространстве Орлича L_Φ:

$$\|u\|_{L_\Phi} \leqslant C_2, \tag{0.2}$$

порождаемом N-функцией Φ, которая может быть подсчитана по ω, в остальных же статьях так и оставлено громоздкое представление в виде (0.1), возможно, потому, что двусторонняя связь (0.1)$\Longleftrightarrow$(0.2) осталась без исследования. Тем самым, для некоторых конкретных ω и $\beta = +\infty$ было показано (0.1)$\Longrightarrow$(0.2), и, кроме того, при простейших ω «вблизи L_∞» (т. е. для ω, растущих достаточно медленно, и $\beta = +\infty$) нетрудно показать обратную связь (0.2)$\Longrightarrow$(0.1), что являлось достоянием «математического фольклора».

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 05–01–00131) и при поддержке гранта НШ-7525.2006.1.

Таким образом, остались без четкого исследования следующие важные для приложений вопросы:

(1) Когда можно утверждать (0.2)$\Longrightarrow$(0.1) (может быть, с другой ω); другими словами, совпадает ли класс функций u, описываемых оценкой (0.1), с некоторым пространством Орлича, а если да, то с каким?

(2) Как описать связь между (0.1) и (0.2) для произвольных ω, Φ, α и β, четко определив классы для ω и Φ и явно указав операторы, сопоставляющие их друг другу?

Частично на эти вопросы были даны ответы в [8]. В настоящей статье мы попытаемся завершить начатую в [8] работу, доведя ее до необходимой полноты; при этом вместо использованных в [8] дискретных представлений N-функций (через ряды), мы будем употреблять интегральные представления, разработанные в [9, 10], что представляется более удобным для приложений.

Для удобства читателя основные результаты схематично (но не полностью) сформулированы в § 8, а использованные в статье нестандартные или требующие пояснений термины и обозначения перечислены в Приложении.

§ 1. Предварительные построения

Мы будем работать с N-функциями и порождаемыми ими пространствами Орлича. Подробно с их теорией можно познакомиться по монографии [11]. Для удобства читателя кратко напомним некоторые понятия этой теории.

Четная возрастающая на $\mathbb{R}^+$ положительная вне 0 выпуклая функция M называется N-функцией (функцией Юнга), если $M(s)/s \to 0$ при $s \to 0$, и $M(s)/s \to +\infty$ при $s \to +\infty$. Будем обозначать множество всех N-функций символом $\mathcal{N}$ (рассматривая их только на $\mathbb{R}^+$), а символом $\overline{\mathcal{N}}$ обозначим множество *обобщенных N-функций* (т. е. допускающих бесконечные значения, в этом случае $\Phi \in \overline{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{N}$ обладают свойством $\Phi(s) \to +\infty$ при $s \to s_* < +\infty$). На $\overline{\mathcal{N}}$ можно ввести отношения $\prec$, $\sim$ и $\prec\!\!\!\prec$ по следующим правилам:

$$
\begin{aligned}
&M \prec N, \quad \text{если} \ \ M(u) \leqslant N(Au) \ \ \text{при} \ u \geqslant B \ \ \text{с некоторыми} \ A, B \in \mathbb{R}^+;\\
&M \prec\!\!\!\prec N, \quad \text{если} \ \ \lim_{u\to\infty} \frac{M(\lambda u)}{N(u)} = 0 \quad \text{при всех} \ \lambda > 0;\\
&M \sim N, \quad \text{если} \ \ M \prec N \ \text{и} \ N \prec M.
\end{aligned}
$$

Эти отношения будут применяться нами и на более широких классах функций. Будем также использовать более слабое, чем $\prec\!\!\!\prec$, отношение $\prec\!\!\!\prec_*$, которое по определению есть «$\prec$, но не $\succ$» («строго меньше»).

Пусть Ω — множество в $\mathbb{R}^n$ с конечной мерой Лебега $\mu(\Omega) < \infty$. С тем же успехом (как и всегда в теории симметричных пространств) могут быть рассмотрены и абстрактные множества и меры, но мы на этом не сосредоточиваемся. Будем рассматривать пространства Лебега, Лоренца, Марцинкевича и Орлича на Ω и там, где это не вызывает недоразумений, опускать символ Ω в обозначениях пространств.

Предположим, что задано число $\beta \in (1, +\infty]$.

Определение 1.1. Символом $\mathcal{M}_*(\beta)$ обозначим множество функций ω, заданных и измеримых на интервале $[\alpha, \beta)$ (где $\alpha = \alpha(\omega) \in [1, \beta)$) и таких, что $\omega \geqslant \omega_*(\omega) = \mathrm{const} > 0$.

Определение 1.2. Пусть $\omega \in \mathcal{M}_*(\beta)$. Определим пространства:

(1) $L_{\omega,\beta}(\Omega) = \{\ u \in L_p(\Omega) \mid \forall p \in [\alpha, \beta)\ \|u\|_{L_p} \leqslant C\omega(p)\ \}$ с нормой

$$\|u\|_{L_{\omega,\beta}} = \sup_{p \in [\alpha,\beta)} \frac{\|u\|_{L_p}}{\omega(p)}. \tag{1.1}$$

(2) $E_{\omega,\beta}(\Omega)$ есть замыкание $L_\infty(\Omega)$ в норме (1.1). □

Для изучения интересующих нас связей между этими пространствами и классическими симметричными пространствами (Орлича, Лоренца и Марцинкевича) удобно использовать следующие понятия и факты (подробно изученные в [9, 10], поэтому здесь соответствующие утверждения приводятся без доказательства):

Определение 1.3. Оператор $\mathbf{In}_\beta$ определяется на $\mathcal{M}_*(\beta)$ по правилу:

$$\mathbf{In}_\beta[\omega](v) = \int\limits_\alpha^\beta \frac{v^p dp}{\omega^p(p)}.$$

Определение 1.4. Пусть $f, g : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — измеримые функции (здесь и далее $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$). Будем говорить, что f растет на $+\infty$ быстрее (или убывает медленнее) функции g, если $g(s)/f(s) \to 0$ при $s \to +\infty$.

Определение 1.5. $\mathcal{D}(\beta)$ есть класс измеримых отображений $f : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}^+}$ таких, что: f конечна в левой окрестности точки 1; $f(s)$ растет на $+\infty$ быстрее чем s^γ с любым $\gamma < \beta$; а если $\beta < +\infty$, то $f(s)$ растет медленнее чем s^β.

Определение 1.6. Пусть $\Phi \in \mathcal{D}(\beta)$. Будем писать для $p \in [\alpha, \beta)$:

$$\mathbf{m}_\Phi(p) = \min_{u \geqslant 1} \frac{\Phi(u)}{u^p}, \qquad \mathbf{Sc}_\beta[\Phi](p) = \mathbf{m}_\Phi^{-1/p}(p) = \max_{u \geqslant 1} \frac{u}{\Phi^{1/p}(u)},$$

$\boldsymbol{\mu}_\Phi(p)$ — любая точка, где достигаются эти min и max.

Определение 1.7. Пусть $\Phi \in \mathcal{D}(\beta)$. Будем писать

$$\mathbf{P}_\beta[\Phi](u) = \int\limits_\alpha^\beta \mathbf{m}_\Phi(p) u^p dp.$$

Определение 1.8. Будем писать, что две измеримые функции $f, g:\ [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^+$ связаны отношением $f \overset{\varphi}{\prec} g$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что $f(\xi) \leqslant Cg(\xi)$ при ξ, близких к β. Также будем обозначать:
$f \overset{\varphi}{\sim} g$, если $f \overset{\varphi}{\prec} g$ и $g \overset{\varphi}{\prec} f$; $f \overset{\varphi}{\lessdot\!\!\!\prec} g$, если $f(\xi)/g(\xi) \to 0$ при $\xi \to \beta$;
$f \overset{\varphi}{\lessdot\!\!\!\prec}_* g$, если $f \overset{\varphi}{\prec} g$, но не $g \overset{\varphi}{\prec} f$ (более слабое свойство чем $f \overset{\varphi}{\lessdot\!\!\!\prec} g$). $\square$

Имеют место следующие свойства введенных величин [9, 10]:

(1) $\mathbf{In}_\beta:\ \mathcal{M}_*(\beta) \to \overline{\mathcal{N}} \cap \mathcal{D}(\beta)$, при этом при изменении α результат $\mathbf{In}_\beta[\omega]$ остается в том же классе в смысле $\sim$.

(2) Если $\omega_1 \overset{\varphi}{\prec} \omega_2$, то $\mathbf{In}_\beta[\omega_1] \succ \mathbf{In}_\beta[\omega_2]$, т. е. , в частности, при изменении ω с точностью до $\overset{\varphi}{\sim}$ результат $\mathbf{In}_\beta[\omega]$ остается в том же классе $\sim$.

(3) $\mathbf{Sc}_\beta:\ \mathcal{D}(\beta) \to \mathcal{M}_*(\beta)$, при этом $\mathbf{Sc}_\beta[\Phi]$ не убывает; если Φ всюду конечна, то $\mathbf{Sc}_\beta[\Phi](\beta) = +\infty$, иначе $\mathbf{Sc}_\beta[\Phi]$ ограничена.

(4) Если $\Phi_1 \prec \Phi_2$, то $\mathbf{Sc}_\beta[\Phi_1] \overset{\varphi}{\succ} \mathbf{Sc}_\beta[\Phi_2]$, т. е. при $\Phi_1 \sim \Phi_2$ верно $\mathbf{Sc}_\beta[\Phi_1] \overset{\varphi}{\sim} \mathbf{Sc}_\beta[\Phi_2]$.

(5) $\mathbf{In}_\beta \circ \mathbf{Sc}_\beta = \mathbf{P}_\beta$; таким образом, $\mathbf{P}_\beta:\ \mathcal{D}(\beta) \to \mathcal{D}(\beta) \cap \overline{\mathcal{N}}$ и сохраняет отношения $\prec$ и $\sim$, при этом из свойства (1) ясно, что $\mathbf{P}_\beta[\Phi]$ не зависит от выбора α (с точностью до $\sim$). Кроме того, всегда $\mathbf{P}_\beta[\Phi] \prec \Phi$.

(6) Если Φ всюду конечна, что $\mathbf{P}_\beta[\Phi] \in \mathcal{N}$.

Кроме того, добавим два не упомянутых в [9, 10] простых свойства:

(7) Если $\Phi_1 \lessdot\!\!\!\prec \Phi_2$, то $\mathbf{Sc}_\beta[\Phi_1] \overset{\varphi}{\succ\!\!\!\gtrdot} \mathbf{Sc}_\beta[\Phi_2]$ (простое следствие определений).

(8) Если $\omega_1 \overset{\varphi}{\lessdot\!\!\!\prec} \omega_2$, то $\mathbf{In}_\beta[\omega_1] \succ\!\!\!\gtrdot \mathbf{In}_\beta[\omega_2]$ (легко следует из определений и свойства (1)).

Нас также будет интересовать возможность обращения операторов $\mathbf{In}_\beta$, $\mathbf{Sc}_\beta$ и $\mathbf{P}_\beta$. В силу свойств (2), (4), (5) можно отождествить эквивалентные Φ и ω и не заботиться о выборе α. В [9, 10] изучались классы $\mathcal{C}(\beta)$, которые, по существу, состоят из таких Φ, что

$$\Phi \sim \mathbf{In}_\beta[\omega], \quad \text{где } \omega > 0 \text{ в левой окрестности точки } \beta \tag{1.2}$$

(точное описание $\mathcal{C}(\beta)$ см. в Определении 7.4). При этом оказалось, что $\mathcal{C}(\beta)$ можно конструктивно описать, особенно в случае $\beta = +\infty$, когда $\mathcal{C}(+\infty) \supset \mathcal{E}$, где

$$\mathcal{E} = \{\, \Phi \in \mathcal{D}(+\infty) \mid \Phi \sim \mathbf{P}_\infty[\Phi] \,\}. \tag{1.3}$$

Поскольку $\mathcal{E}$, как было доказано (в [9], см. также Предложение 4.1), содержит «почти все» элементы $\mathcal{D}(+\infty)$, то в случае $\beta = +\infty$ удается обратить операторы $\mathbf{In}_\infty$ и $\mathbf{P}_\infty$ — а именно, на классе $\mathcal{E}$ верно: $\mathbf{P}_\infty = I$, $\mathbf{P}_\infty^{-1} = I$, $\mathbf{In}_\infty^{-1} = \mathbf{Sc}_\infty$. Отметим также, что класс $\mathcal{E}$ содержит все $\Phi \sim \Phi_0$, если $\Phi_0 \in \mathcal{E}$ (очевидно из свойства (5)). Благодаря этому в классе $\mathcal{E}$ можно утверждать более точные свойства $\mathbf{In}_\infty$ и $\mathbf{Sc}_\infty$, например, следующие дополнения к (2), (4), (7):

(9) Пусть $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{E}$, $\omega_k = \mathbf{Sc}_\infty[\Phi_k]$, $k = 1, 2$. Тогда $\Phi_1 \prec \Phi_2$ эквивалентно $\omega_1 \overset{\varphi}{\succ} \omega_2$. В самом деле, слева направо это есть свойство (4), а справа налево получается из свойств $(2), (6)$ и определения $\mathcal{E}$:

$$\Phi_1 \sim \mathbf{P}_\infty[\Phi_1] = \mathbf{In}_\infty[\omega_1] \prec \mathbf{In}_\infty[\omega_2] = \mathbf{P}_\infty[\Phi_2] \sim \Phi_2.$$

(10) Пусть $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{E}$, $\omega_k = \mathbf{Sc}_\infty[\Phi_k]$, $k = 1, 2$. Тогда $\Phi_1 \prec\!\!\prec_* \Phi_2$ эквивалентно $\omega_1 \overset{\varphi}{\succ\!\!\succ}_* \omega_2$ — это очевидное следствие свойства (9).

(11) Пусть $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{E}$, $\omega_k = \mathbf{Sc}_\infty[\Phi_k]$, $k = 1, 2$. Тогда $\Phi_1 \prec\!\!\prec \Phi_2$ эквивалентно $\omega_1 \overset{\varphi}{\succ\!\!\succ} \omega_2$ — это легко доказать из свойств (6), (7), (8) и определения $\mathcal{E}$, рассуждая аналогично свойству (9).

Для $\mathcal{D}(+\infty)\backslash\mathcal{E}$ (это достаточно узкий класс, которым можно пренебречь) и для $\mathcal{D}(\beta)$, $\beta < +\infty$, будем, вообще говоря, иметь $\mathbf{P}_\beta[\Phi] \prec \Phi$ строго (удается оценить, насколько рост $\mathbf{P}_\beta[\Phi]$ медленнее роста Φ), так что $\mathbf{In}_\beta^{-1}$ уже́ не есть $\mathbf{Sc}_\beta$, но все же может быть построен, как сказано выше, на классе $\mathcal{C}(\beta)$.

Для описания процедуры обращения $\mathbf{Sc}_\beta$ введем вспомогательные обозначения:

Определение 1.9. Будем обозначать (если эти функции определены):
$\mathbf{e}_\omega(s) = \dfrac{s\omega'(s)}{\omega(s)}$; ν_ω — функция, обратная к $(\cdot)\mathbf{e}_\omega(\cdot)$; $N_\omega(\eta) = \displaystyle\int\limits_B^\eta \frac{dz}{\nu_\omega(z)}$.

Определение 1.10. Класс $\Omega(\beta)$ состоит из таких функций ω, заданных и измеримых на $[\alpha, \beta)$, что почти всюду определена $\mathbf{e}_\omega$, и

(1) $\xi\mathbf{e}_\omega(\xi) \nearrow +\infty$ при $\xi \to \beta$ (т. е. ν_ω определена в окрестности $+\infty$ и монотонно стремится к β; также N_ω определена, если $B > \inf \xi\mathbf{e}_\omega(\xi)$);

(2) выполнено соотношение

$$\int^{+\infty} \left(\frac{1}{\nu_\omega(z)} - \frac{1}{\beta}\right) dz = +\infty. \qquad \square$$

Отметим, что в классе $\Omega(\beta)$ имеют место: оценка

$$\int^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\nu_\omega(z)}\right) dz = +\infty \text{ при всех } p < \beta, \tag{1.4}$$

соотношение (в смысле $\mathcal{D}'$)

$$\Big(\nu_\omega(z) - \nu'_\omega(z) - 1 \geqslant 0 \text{ при } z \gg 1\Big) \iff \left(\frac{d}{d\xi}\xi\mathbf{e}_\omega(\xi) \geqslant \frac{1}{\xi - 1} \text{ при } \xi \to \beta\right), \tag{1.5}$$

и монотонное неубывание функции $(\ln\omega + \mathbf{e}_\omega)$ вблизи точки β (очевидно из п. (1) Определения 1.10).

В [9] были доказаны следующие свойства величин $\mathbf{e}_\Phi$, $\mathbf{m}_\Phi$ и $\boldsymbol{\mu}_\Phi$:

Предложение 1.11. *Для любой $\Phi \in \mathcal{D}(\beta)$ справедливы равенства*

$$\mathbf{e}_\Phi(\boldsymbol{\mu}_\Phi(p)) = p; \quad \frac{d}{dp}\ln \mathbf{m}_\Phi(p) + \ln \boldsymbol{\mu}_\Phi(p) = 0; \quad \frac{d}{dp}\frac{\ln \mathbf{m}_\Phi(p)}{p} = -\frac{\ln \Phi(\boldsymbol{\mu}_\Phi(p))}{p^2}; \tag{1.6}$$

причем первое из них — при дополнительном ограничении $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^+)$, а остальные понимаются в смысле $\mathcal{D}'$. □

Задачу об обращении оператора $\mathbf{Sc}_\beta$ ($\mathbf{Sc}_\beta[\Phi] = \omega$) по определению можно записать в виде уравнения

$$\mathbf{m}_\Phi(p) = \omega^{-p}(p). \tag{1.7}$$

Из Предложения 1.11 очевидна единственность решения (1.7) относительно Φ в классе $\mathcal{D}(\beta) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$. Существование решения показано в [10]:

Предложение 1.12. *Пусть $\omega \in \Omega(\beta)$. Тогда существует $\Phi \in \mathcal{N} \cap \mathcal{D}(\beta)$, доставляющая решение уравнению* (1.7). *При этом, с точностью до замены $\Phi(v) := \Phi(C_1 v)$, это решение удовлетворяет соотношениям:*

$$\mathbf{e}_\Phi = \nu_\omega \circ \ln \Phi; \qquad \Phi(v) = \exp(N_\omega^{-1}(\ln v)), \tag{1.8}$$

причем $\mathbf{e}_\Phi$ не убывает. □

Более полно связь между (1.7) и (1.8) раскрывается и дополняется в следующем утверждении:

Предложение 1.13. *Пусть $\omega \in \Omega(\beta)$. Соотношение $(1.8)_1$ определяет Φ единственным образом с точностью до замены $\Phi(v) := \Phi(Cv)$ и эквивалентно каждому из следующих уравнений (представлений):*

$$\mathbf{m}_\Phi(p) = (C\omega(p))^{-p}, \quad C = \text{const} > 0, \tag{1.9}$$

$$N_\omega(\ln \Phi(s)) = \ln s + N_\omega(\ln \Phi(1)), \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} &N_\omega[\ln \Phi\{\omega(p)\exp(\mathbf{e}_\omega(p))\}] = \\ &= N_\omega(p\,\mathbf{e}_\omega(p)) + \Big[\mathbf{e}_\omega(\alpha) + \ln \omega(\alpha) + N_\omega(\ln \Phi(1)) - N_\omega(\alpha \mathbf{e}_\omega(\alpha))\Big]. \end{aligned} \tag{1.11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Однозначность нахождения Φ из $(1.8)_1$ (с точностью до растяжения аргумента) будет следовать из того, что $(1.8)_1 \iff (1.10)$ (надо иметь в виду произвол B в определении N_ω).

$(1.8)_1 \iff (1.9)$: благодаря (1.6) легко показать, что (1.9) эквивалентно соотношению

$$\ln \Phi(\boldsymbol{\mu}_\Phi(p)) = p\,\mathbf{e}_\omega(p). \tag{1.12}$$

В классе $\omega \in \Omega(\beta)$ из $(1.8)_1$ или (1.12) следует монотонность одной из функций $\mathbf{e}_\Phi$ или $\boldsymbol{\mu}_\Phi$, а тогда, в силу Предложения 1.11 — монотонность другой и их взаимообратность, и тогда $(1.8)_1 \iff (1.12)$ очевидно.

$(1.8)_1 \iff (1.10)$: очевидно.

$(1.10) \iff (1.11)$: легко следует из тривиального тождества

$$N_\omega(p\,\mathbf{e}_\omega(p)) = \mathbf{e}_\omega(p) + \ln\omega(p) + N_\omega(\alpha\mathbf{e}_\omega(\alpha)) - \mathbf{e}_\omega(\alpha) - \ln\omega(\alpha). \qquad \Box$$

Замечание 1.14. Растягивая аргумент функции Φ, можно добиться $C = 1$ в (1.9), $\Phi(1) = 1$ в (1.10) (что превращает эти соотношения в (1.7) и $(1.8)_2$ соответственно), и $[\ldots] = 0$ в (1.11), что превращает его в представление

$$\ln\Phi(\omega(p)\exp\{\mathbf{e}_\omega(p)\}) = p\,\mathbf{e}_\omega(p), \tag{1.13}$$

которое также определяет Φ ужé однозначно. Таким образом, (1.7), (1.8) и (1.13) являются представлениями оператора $\mathbf{Sc}_\beta^{-1}$, определенного, тем самым, на множестве $\Omega(\beta)$ и действующего в $\mathcal{D}(\beta) \cap \mathcal{N}$. Фактически, $\mathbf{Sc}_\beta^{-1}$ определен на пополнении класса $\Omega(\beta)$ по отношению $\overset{\mathcal{L}}{\sim}$ (которое несущественно при отыскании Φ с точностью до $\sim$), которое покрывает «почти всё» $\mathcal{M}_*(\beta)$ [10, Замечание 4.6]. $\Box$

Помимо изученных нами отображений и величин, нам также потребуется оператор $\mathcal{M}_\sigma$, вводимый по правилу:

$$\mathcal{M}_\sigma[\psi](p) = \left(\int_\sigma^{+\infty} \psi(s)s^p ds\right)^{1/p}. \tag{1.14}$$

С точностью до степени $1/p$, $\mathcal{M}_\sigma$ есть преобразование Меллина. Мы будем рассматривать его на неотрицательных ψ, выбирая произвольно $\sigma \geqslant 0$.

Определение 1.15. Обозначим символом $\Omega_\sigma(\beta)$ множество таких измеримых на $[\alpha, \beta)$ функций ω, для которых существует неотрицательное решение ψ уравнения

$$\mathcal{M}_\sigma[\psi] \overset{\mathcal{L}}{\sim} \omega. \tag{1.15}$$

В [10] класс $\Omega_\sigma(\beta)$ был подробно описан в терминах асимптотики допустимых функций ω вблизи точки β, был указан алгоритм поиска решений ψ, и показано, что выбор α и σ не играет роли (т. е. решение ψ и множество $\Omega_\sigma(\beta)$ остаются теми же), так что индекс σ в символе $\Omega_\sigma(\beta)$ не означает зависимости от σ, а служит для обозначения. Выбор σ и α производится произвольно с целью более удобных представлений. Отметим, что решение уравнения (1.15) автоматически обладает свойством $\psi \in L_1(\sigma, +\infty)$.

Теперь мы готовы перейти к описанию пространств $L_{\omega,\beta}$ и $E_{\omega,\beta}$.

§ 2. Внутренние отношения между разными $L_{\omega,\beta}$ и $E_{\omega,\beta}$

Предложение 2.1. *Пусть $\omega \in \mathcal{M}_*(\beta)$. Тогда нормы* (1.1) *при разных $\alpha \in [1, \beta)$ эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначив правую часть (1.1) через $B(\alpha)$, получаем, что $B(\alpha_1) \geqslant B(\alpha_2)$ при любых $1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \beta$. С другой стороны, при всех $p \in [\alpha_1, \alpha_2)$ имеем

$$\|u\|_{L_p} \leqslant \|u\|_{L_{\alpha_2}} (\mu(\Omega))^{\frac{\alpha_2 - p}{\alpha_2 p}} \leqslant$$
$$\leqslant B(\alpha_2)\omega(\alpha_2)(1 + \mu(\Omega))^{\frac{\alpha_2 - p}{\alpha_2 p}} \leqslant \frac{\omega(\alpha_2)(1 + \mu(\Omega))^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2}}}{\omega_*(\omega)} \omega(p) B(\alpha_2),$$

откуда следует $B(\alpha_1) \leqslant C \cdot B(\alpha_2)$, что и требовалось. $\square$

Некоторые соотношения пространств $L_{\omega,\beta}$ и $E_{\omega,\beta}$ друг с другом (помимо очевидного $E_{\omega,\beta} \hookrightarrow L_{\omega,\beta}$) даются в следующем утверждении:

Утверждение 2.2. *Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}_*(\beta)$. Тогда:*

(1) *Из $\omega_1 \overset{\varphi}{\precsim} \omega_2$ следует*
$$L_{\omega_1,\beta} \hookrightarrow L_{\omega_2,\beta}, \qquad E_{\omega_1,\beta} \hookrightarrow E_{\omega_2,\beta}. \tag{2.1}$$

(1*) *Из $\omega_1 \overset{\varphi}{\sim} \omega_2$ следуют совпадения $L_{\omega_1,\beta} = L_{\omega_2,\beta}$, $E_{\omega_1,\beta} = E_{\omega_2,\beta}$ как нормированных пространств.*

Далее пусть дополнительно выполнено условие

$$\omega_2 \in \Omega_\sigma(\beta), \tag{2.2}$$

т. е. $\omega_2 \overset{\varphi}{\sim} \omega_3 = \mathcal{M}_\sigma[\psi]$. Тогда:

(2) *Из $\omega_1 \overset{\varphi}{\not\precsim} \omega_2$ следует*
$$L_{\omega_2,\beta} \setminus L_{\omega_1,\beta} \neq \emptyset. \tag{2.3}$$

(3) $L_{\omega_1,\beta} \subset L_{\omega_2,\beta} \iff \omega_1 \overset{\varphi}{\precsim} \omega_2 \iff L_{\omega_1,\beta} \hookrightarrow L_{\omega_2,\beta}$.

(3*) *Если ω_1 также удовлетворяет* (2.2), *то*

$$L_{\omega_1,\beta} = L_{\omega_2,\beta} \text{ как множества} \iff \omega_1 \overset{\varphi}{\sim} \omega_2 \iff L_{\omega_1,\beta} = L_{\omega_2,\beta} \text{ как нормир. пр-ва.}$$

(4) $\omega_1 \overset{\varphi}{\prec\!\!\prec}_* \omega_2$ *эквивалентно*

$$L_{\omega_1,\beta} \hookrightarrow L_{\omega_2,\beta} \text{ со строгим теоретико-множественным включением.} \tag{2.4}$$

(4*) $\omega_1 \overset{\varphi}{\prec\!\!\prec}_* \omega_2$ *влечет*
$$E_{\omega_1,\beta} \hookrightarrow E_{\omega_2,\beta}. \tag{2.5}$$

(4**) $\omega_1 \overset{\varphi}{\prec\!\!\prec} \omega_2$ *влечет* (2.4) *и* (2.5).

Замечание 2.3. В Утверждении 2.2 требуемые связи раскрыты не полностью (особенно это касается пространств $E_{\omega,\beta}$). Ниже для случая $\beta = +\infty$ этот недостаток будет исправлен, и в частности будет снято ограничение (2.2) — см. Утверждение 4.3 и Замечание 4.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Утверждения 2.2).

(1) По условию, $\omega_1(p) \leqslant C\omega_2(p)$ при всех $p \in [\alpha, \beta)$, где α выбрано достаточно близким к β, а $C = \mathrm{const} > 0$. Отсюда очевидно следует неравенство

$$\|u\|_{L_{\omega_2,\beta}} \leqslant C\|u\|_{L_{\omega_1,\beta}} \tag{2.6}$$

для всех u, при которых конечна правая часть (2.6), что и дает $(2.1)_1$. Вложение $(2.1)_2$ получается замыканием неравенства (2.6), примененного к $u \in L_\infty$.

(1*) очевидно следует из (1).

(2) Продолжая, в случае $\sigma > 0$, функцию ψ нулем на $[0, \sigma)$, можно добиться $\psi_3 = \mathcal{M}_0[\psi]$. Поскольку $\psi \in L_1(\mathbb{R}^+)$, то, умножая ψ на подходящую постоянную (при этом ω_3 заменится на $\widetilde{\omega}_3 \overset{\varphi}{\sim} \omega_3$), можно получить $\int\limits_0^{+\infty} \psi(s)\,ds = \mu(\Omega)$. Очевидно, что существует монотонная функция $v_* : (0, \mu(\Omega)) \to \mathbb{R}^+$ такая, что $v_*^{-1}(r) = \int\limits_0^r \psi(s)\,ds$, так что любая функция $v : \Omega \to \mathbb{R}^+$, равноизмеримая с v_*, обладает свойством

$$\|v\|^p_{L_p(\Omega)} = \int\limits_0^{\mu(\Omega)} v_*^p(\xi)\,d\xi = \int\limits_0^{+\infty} s^p \psi(s)\,ds = \omega_3^p(p),$$

т. е. $v \in L_{\omega_3,\beta} = L_{\omega_2,\beta}$. В то же время, по условию $\exists p_N \to \beta$: $\omega_2(p_N) \geqslant N\omega_1(p_N)$, так что $\|v\|_{L_{p_N}(\Omega)} = \omega_3(p_N) \geqslant \varepsilon\omega_2(p_N) \geqslant N\varepsilon\omega_1(p_N)$, и в итоге $v \notin L_{\omega_1,\beta}$, что доказывает (2.3).

(3) $(L_{\omega_1,\beta} \subset L_{\omega_2,\beta}) \implies (\omega_1 \overset{\varphi}{\prec} \omega_2)$ есть перезапись (2).
$(\omega_1 \overset{\varphi}{\prec} \omega_2) \implies (L_{\omega_1,\beta} \hookrightarrow L_{\omega_2,\beta})$ есть (1).
$(L_{\omega_1,\beta} \hookrightarrow L_{\omega_2,\beta}) \implies (L_{\omega_1,\beta} \subset L_{\omega_2,\beta})$ тривиально.

(3*) — очевидное следствие (3).

(4) $(\omega_1 \overset{\varphi}{\prec\!\!\prec}_* \omega_2) \implies$ (2.4) есть комбинация (1) и (2).
(2.4) $\implies (\omega_1 \overset{\varphi}{\prec\!\!\prec}_* \omega_2)$ есть перезапись (2) и (3).

(4*) В силу (2.4) имеет место подчиненность норм, которая влечет вложение для пространств $E_{\omega,\beta}$ как замыканий L_∞ по этим нормам.

(4**) тривиально следует из (4) и (4*) в силу того, что отношение $\overset{\varphi}{\prec\!\!\prec}$ сильнее чем $\overset{\varphi}{\prec\!\!\prec}_*$.

□

§ 3. Отношения между пространствами $L_{\omega,\beta}$, $E_{\omega,\beta}$ и пространствами Лоренца, Марцинкевича и Орлича

Естественно попытаться изучить связь между $L_{\omega,\beta}$, $E_{\omega,\beta}$ и пространствами Орлича при помощи вычисления фундаментальных функций этих пространств. Непосредственный подсчет и [11, с. 97] дают следующие представления для характеристических функций пространств $L_{\omega,\beta}$ и L_Φ (с нормой Люксембурга):

$$\varphi_{L_{\omega,\beta}}(t) = \sup_{p\in[\alpha,\beta)} \frac{t^{1/p}}{\omega(p)}; \qquad \varphi_{L_\Phi}(t) = \frac{1}{\Phi^{-1}(1/t)}. \tag{3.1}$$

В общем случае $\omega \in \mathcal{M}_*(\beta)$ формула $(3.1)_1$ не выражает $\varphi_{L_{\omega,\beta}}$ в достаточно явном виде, однако можно подсчитать, что

$$\text{при } \omega\in\Omega(\beta) \quad \varphi_{L_{\omega,\beta}}(t) = \exp\left(-\frac{s}{\nu_\omega(s)} - \ln\omega(\nu_\omega(s))\right)\Bigg|_{s=\ln(1/t)}; \tag{3.2}$$

а также (в смысле $\mathcal{D}'$)

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\varphi_{L_{\omega,\beta}}(t) = \frac{\varphi_{L_{\omega,\beta}}(t)}{t}\cdot\frac{1-\nu_\omega(s)+\nu_\omega'(s)}{\nu_\omega^2(s)}\Bigg|_{s=\ln(1/t)},$$

т. е. $\varphi_{L_{\omega,\beta}}$ вогнута при условии $(1.5)_1$ (оно же $(1.5)_2$).

Предложение 3.1. *Пусть $\omega\in\Omega(\beta)$. Тогда пространства Орлича E_Φ, L_Φ, порожденные функцией $\Phi = \mathbf{Sc}_\beta^{-1}[\omega]$, имеют ту же фундаментальную функцию, что и пространства $L_{\omega,\beta}$, $E_{\omega,\beta}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство есть тривиальное следствие $(3.1)_2$, (3.2) и представления (1.13) оператора $\mathbf{Sc}_\beta^{-1}$. □

Утверждение 3.2. *Пусть $\omega\in\Omega(\beta)$ и выполнено $(1.5)_2$, а функция φ подсчитана по формуле (3.2). Тогда:*

$$\Lambda(\varphi)\hookrightarrow L_{\omega,\beta}\hookrightarrow M\left(\frac{\cdot}{\varphi(\cdot)}\right), \qquad \Lambda(\varphi)\hookrightarrow E_{\omega,\beta}\hookrightarrow M^0\left(\frac{\cdot}{\varphi(\cdot)}\right), \tag{3.3}$$

$$\Lambda(\varphi)\hookrightarrow L_\Phi\hookrightarrow M\left(\frac{\cdot}{\varphi(\cdot)}\right), \qquad \Lambda(\varphi)\hookrightarrow E_\Phi\hookrightarrow M^0\left(\frac{\cdot}{\varphi(\cdot)}\right), \tag{3.4}$$

где $\Phi = \mathbf{Sc}_\beta^{-1}[\omega]$ (т. е. подсчитана по одной из формул (1.7), (1.8), (1.13)), символы Λ и M обозначают пространства Лоренца и Марцинкевича соответственно, а M^0 есть специальное подпространство в M [12].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространства $E_{\omega,\beta}$, $L_{\omega,\beta}$, E_Φ и L_Φ имеют, в силу (3.2) и Предложения 3.1, общую фундаментальную функцию φ, вогнутую благодаря (1.5). Следовательно, все они «зажаты» между экстремальными пространствами $\Lambda(\varphi)$ и $M(\frac{\cdot}{\varphi(\cdot)})$ с той же фундаментальной функцией [12, с. 148, 155, 160, 162]. Вложения $(3.3)_2$, $(3.4)_2$ следуют из указанной подчиненности норм и того, что $E_{\omega,\beta}$, E_Φ и M^0 являются замыканиями L_∞ в соответствующих нормах [11, с. 98; 12, с. 157]. $\square$

Замечание 3.3. Условие $(1.5)_2$ в Утверждении 3.2 не является существенным ограничением ввиду возможности всегда добиться вогнутости фундаментальной функции [12, с. 164]. $\square$

Таким образом, соотношения (3.3) и (3.4) дают лишь частичный ответ на вопрос о структуре $E_{\omega,\beta}$, $L_{\omega,\beta}$ и их соотношениях с пространствами Орлича. Более точная информация может быть получена при $\beta = +\infty$ (т. е. «вблизи L_∞»), а также применением теоремы из [12, с. 161], позволяющей доказывать вложение симметричного пространства E в Λ. Впрочем, при этом все же сохраняется необходимость в дополнительном ограничении $\omega \in \Omega(\beta)$, которое при непосредственном изучении связи между пространствами $E_{\omega,\beta}$, $L_{\omega,\beta}$ и E_Φ, L_Φ (проводимом «в обход» техники фундаментальных функций) будет в некоторых случаях опускаться. Ниже будет приведена итоговая диаграмма отношений (8.1), дополняющая (3.3) и (3.4). Итак, изучим вложения пространств Орлича и $E_{\omega,\beta}$, $L_{\omega,\beta}$ друг в друга:

Утверждение 3.4. *Пусть* $\omega \in \mathcal{M}_*(\beta)$, $\Phi = \mathbf{In}_\beta[\omega]$. *Тогда:*

$$L_{\omega,\beta} \hookrightarrow L_\Phi, \quad E_{\omega,\beta} \hookrightarrow E_\Phi,$$

причем

$$\|u\|_{L_\Phi} \leqslant e\|u\|_{L_{\omega,\beta}}. \tag{3.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать (3.5) для всех $u \in L_{\omega,\beta}$. По определению (см. (1.1)) имеем $\int\limits_\Omega \left(\frac{u}{e\|u\|_{L_{\omega,\beta}}}\right)^p \frac{d\mu}{\omega^p(p)} \leqslant e^{-p}$, что после операции $\int\limits_\alpha^\beta (\cdot)\,dp$ дает (3.5). $\square$

Утверждение 3.5. *Пусть* $\Phi \in \mathcal{D}(\beta) \cap \overline{\mathcal{N}}$, $\omega = \mathbf{Sc}_\beta[\Phi]$. *Тогда:*

$$L_\Phi \hookrightarrow L_{\omega,\beta}, \qquad E_\Phi \hookrightarrow E_{\omega,\beta},$$

причем

$$\|u\|_{L_{\omega,\beta}} \leqslant \left(1 + \frac{1+\mu(\Omega)}{\omega_*(\omega)}\right)\|u\|_{L_\Phi}. \tag{3.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова достаточно показать (3.6) для всех $u \in L_\Phi$, причем можно считать $\|u\|_{L_\Phi} = 1$. Поскольку при всех $p \in [\alpha,\beta)$ на Ω имеем $u^p\mathbf{m}_\Phi(p) \leqslant \Phi(u) + \mathbf{m}_\Phi(p)$, то $\|u\|_{L_p} \leqslant \omega(p) + (\mu(\Omega))^{1/p}$, что легко дает (3.6). $\square$

Теперь мы готовы сформулировать *основные результаты статьи.*

Теорема 3.6. *Пусть заданы число $\beta \leqslant +\infty$ и функция $\Phi \in \mathcal{C}(\beta) \cap \overline{\mathcal{N}}$, т. е. $\Phi(s) \sim \int\limits_\alpha^\beta \frac{s^p}{\omega_1^p(p)}\,dp$ с некоторой ω_1 (т. е. $\omega_1 = \mathbf{In}_\beta^{-1}[\Phi]$), а также подсчитана $\omega_2 = \mathbf{Sc}_\beta[\Phi]$. Тогда:*

(1) $L_{\omega_1,\beta} \hookrightarrow L_\Phi \hookrightarrow L_{\omega_2,\beta}$; $E_{\omega_1,\beta} \hookrightarrow E_\Phi \hookrightarrow E_{\omega_2,\beta}$;
(2) *если* $\beta = +\infty$, $\Phi \in \mathcal{E}$, *то* $L_{\omega_2,\infty} = L_\Phi$; $E_{\omega_2,\infty} = E_\Phi$.

Теорема 3.7. *Пусть заданы число $\beta \leqslant +\infty$ и функция $\omega \in \Omega(\beta)$; и вычислены $\Phi_1 = \mathbf{Sc}_\beta^{-1}[\omega]$ (например, с помощью (1.7), (1.8) или (1.13)) и $\Phi_2 = \mathbf{In}_\beta[\omega]$. Тогда:*

(1)
$$L_{\Phi_1} \hookrightarrow L_{\omega,\beta} \hookrightarrow L_{\Phi_2}; \quad E_{\Phi_1} \hookrightarrow E_{\omega,\beta} \hookrightarrow E_{\Phi_2}; \tag{3.7}$$

(2) *если $\beta = +\infty$, $\omega \in \mathbf{Sc}_\infty[\mathcal{E}]$ (т. е. $\Phi_1 \in \mathcal{E}$), то $\Phi_1 \sim \Phi_2 = \mathbf{In}_\infty[\omega]$, и*
$$L_{\omega,\infty} = L_{\Phi_2}; \quad E_{\omega,\infty} = E_{\Phi_2}. \tag{3.8}$$

Замечание 3.8. Слабым местом в п. (1) Теоремы 3.6 является недостаточная конструктивность операции $\mathbf{In}_\beta^{-1}$. Однако в [9] были указаны ряд признаков класса $\mathcal{C}(\beta)$ и процедуры восстановления веса в интегральных разложениях его элементов (т. е. конструкция $\mathbf{In}_\beta^{-1}$).

Замечание 3.9. В связи с тем, что в п. (1) Теоремы 3.7 $\Phi_2 = \mathbf{P}_\beta[\Phi_1]$, можно оценить «величину зазора» в (3.7) (т. е. «расстояние» между пространствами L_{Φ_1}, E_{Φ_1} и L_{Φ_2}, E_{Φ_2}) на основе сравнения асимптотики $\mathbf{P}_\beta[\Phi]$ и Φ, проведенного в [10]. Ниже (см. Утверждение 6.1) будет показано, что этот зазор меньше того, который получается из общих соображений теории симметричных пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Теоремы 3.6 легко следует из Утверждений 3.4, 3.5:

(1) очевидно из того, что $\mathbf{In}_\beta[\omega_1] = \Phi \in \mathcal{D}(\beta)$;
(2) имеем $\Phi \sim \mathbf{In}_\infty[\omega_2]$, откуда $L_{\omega_2,\infty} \hookrightarrow L_{\mathbf{In}_\infty[\omega_2],\infty} = L_\Phi \hookrightarrow L_{\omega_2,\infty}$ и аналогично для $E_{\omega_2,\infty}$. □

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Теоремы 3.7).

(1) Согласно Предложению 1.12, $\Phi_1 \in \mathcal{D}(\beta)$ как образ $\mathbf{Sc}_\beta^{-1}$, поэтому (3.7) сразу следует из Утверждений 3.4 и 3.5.
(2) Поскольку $\Phi_2 = \mathbf{P}_\infty[\Phi_1] \sim \Phi_1$, соотношения (3.7) превращаются в (3.8). □

§ 4. Дополнительные свойства, связанные с $\mathbf{Sc}_\infty[\mathcal{E}]$

В свойствах (9)–(11) операторов $\mathbf{In}_\beta$ и $\mathbf{Sc}_\beta$, а также в Теореме 3.7 использовался класс $\mathbf{Sc}_\infty[\mathcal{E}]$. С целью его описания докажем следующее утверждение:

Предложение 4.1. *Пусть $\Phi \in \mathcal{D}(+\infty) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$ имеет неубывающую $\mathbf{e}_\Phi$. Тогда для $\Phi \in \mathcal{E}$ достаточно выполнения соотношения* (*при всех* $v \gg 1$) :

$$\ln(v\mathbf{e}'_\Phi(v)) + \frac{1}{2}\mathbf{e}_\Phi\left(\frac{v}{e}\right) \geqslant \ln\frac{e}{e-2}. \tag{4.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу Утверждения 1.15 из [9] достаточно показать выполнение неравенства

$$\ln(\mathbf{e}_\Phi(u) - \mathbf{e}_\Phi(au)) \geqslant \ln\Phi(\varepsilon u) - \ln\Phi(au) \tag{4.2}$$

при всех $u \gg 1$ с некоторыми постоянными $0 < \varepsilon < a < 1$. Докажем (4.2) с $\varepsilon = e^{-1}$, $a = 2e^{-1}$. В самом деле, имеем:

$$\ln(\mathbf{e}_\Phi(u) - \mathbf{e}_\Phi(au)) = \ln\frac{1-a}{\theta} + \ln(v\mathbf{e}'_\Phi(v)) \geqslant -\ln\frac{e}{e-2} + \ln(v\mathbf{e}'_\Phi(v)),$$
$$\ln\Phi(\varepsilon u) - \ln\Phi(au) = -\frac{a-\varepsilon}{\theta_1}\mathbf{e}_\Phi\left(\frac{\theta_1}{\theta}v\right) \leqslant -\frac{1}{2}\mathbf{e}_\Phi(\varepsilon v),$$

где $\varepsilon \leqslant \theta_1 \leqslant a \leqslant \theta \leqslant 1$, $v = \theta u$. Теперь (4.2) тривиально следует из (4.1). □

Предложение 4.2. *Пусть $\omega \in \Omega(+\infty)$. Тогда для того, чтобы $\omega \in \mathbf{Sc}_\infty[\mathcal{E}]$, достаточно выполнения при всех $s \gg 1$ неравенства*

$$\ln F'_\omega(s) + \frac{1}{2}F_\omega(s-1) \geqslant \ln\frac{e}{e-2}, \tag{4.3}$$

в котором $F_\omega = \nu_\omega \circ N_\omega^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как указано выше (Предложение 1.12 и далее), из $\omega \in \Omega(+\infty)$ следует существование $\Phi = \mathbf{Sc}_\infty^{-1}[\omega]$, причем $\Phi \in \mathcal{D}(+\infty)$, $\mathbf{e}_\Phi$ не убывает и представляется в виде $\mathbf{e}_\Phi(v) = F_\omega(\ln v)$. В силу Предложения 4.1 остается обеспечить неравенство (4.1), которое в данном случае есть то же, что и условие (4.3). □

Теперь структура $\mathbf{Sc}_\infty[\mathcal{E}]$ становится более ясной, в частности, благодаря возможности предъявить «почти точную верхнюю грань» этого класса — функцию

$$\omega_0(p) = C_1\exp\left[\frac{2}{e^2}\cdot\frac{C_2 + 2e^{p/2}}{p}\right].$$

У этой функции, как легко подсчитать, $\exp(\nu_\omega(\xi)/2)\nu_\omega(\xi)\nu'_\omega(\xi) = e^2$, откуда видно, что $F_\omega(s) = 2\ln(e^2 s/2 + C_3)$ доставляет (4.3) «оптимум» (т. е. левая часть (4.3) на $+\infty$ стремится к $2 = \text{const} > \ln\dfrac{e}{e-2}$, рост F_ω на $+\infty$ далее не может быть снижен). Соответствующая $\Phi_0 = \mathbf{Sc}_\infty^{-1}[\omega_0]$ принадлежит $\mathcal{E}$ и является «почти точной нижней гранью» этого класса. Как легко видеть, при $C_3 = 0$ получим $\Phi_0(v) = \exp[2\ln v \cdot (\ln\ln v + (\ln\frac{e^2}{2} - 1))]$ (другая, близкая к Φ_0, граница Φ_1 класса $\mathcal{E}$ найдена в [9]). Если $\omega \in \Omega(+\infty)$ растет медленнее ω_0, т. е. $\omega \overset{\varphi}{\prec} \omega_0$, то будем иметь для $\Phi = \mathbf{Sc}_\infty^{-1}[\omega]$: $\Phi \succ \mathbf{P}_\infty[\Phi] \succ \mathbf{P}_\infty[\Phi_0] \sim \Phi_0 \in \mathcal{E}$, что помещает ω в число «кандидатов в элементы $\mathbf{Sc}_\infty[\mathcal{E}]$», и остается проверять ограничения (4.1) или (4.3) лишь с «технической стороны» (должная асимптотика уже́ обеспечена требованием $\omega \overset{\varphi}{\prec} \omega_0$), при этом фактических ограничений становится еще меньше благодаря аргументам Замечания 1.14.

В классе $\mathbf{Sc}_\infty[\mathcal{E}] \subset \mathcal{M}_*(\beta)$ удается дополнить результаты Утверждения 2.2:

Утверждение 4.3. *Пусть*

$$\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{Sc}_\infty[\mathcal{E}]. \tag{4.4}$$

Тогда:

(1) $\omega_1 \overset{\varphi}{\prec} \omega_2 \iff E_{\omega_1,\infty} \subset E_{\omega_2,\infty} \iff E_{\omega_1,\infty} \hookrightarrow E_{\omega_2,\infty}$;

(1*) $\omega_1 \overset{\varphi}{\prec} \omega_2 \iff L_{\omega_1,\infty} \subset L_{\omega_2,\infty} \iff L_{\omega_1,\infty} \hookrightarrow L_{\omega_2,\infty}$;

(1**) $\omega_1 \overset{\varphi}{\sim} \omega_2$ *эквивалентно каждому из равенств*

$$E_{\omega_1,\infty} = E_{\omega_2,\infty}; \quad L_{\omega_1,\infty} = L_{\omega_2,\infty};$$

понимаемых как равенства множеств или как нормированных пространств;

(2) $\omega_1 \overset{\varphi}{\prec\!\!\prec}_* \omega_2$ *эквивалентно* (2.5) *со строгим теоретико-множественным включением;*

(2*) $\omega_1 \overset{\varphi}{\prec\!\!\prec}_* \omega_2$ *эквивалентно* (2.4);

(3) $\omega_1 \overset{\varphi}{\prec\!\!\prec} \omega_2$ *влечет вложения*

$$E_{\omega_1,\infty} \hookrightarrow L_{\omega_1,\infty} \hookrightarrow E_{\omega_2,\infty}, \quad \text{где первое вложение строгое.} \tag{4.5}$$

Замечание 4.4. Результаты Утверждения 4.3 соотносятся следующим образом с результатами Утверждения 2.2:

- п. (1) Утверждения 4.3 усиливает п. (1) Утверждения 2.2 в условиях (4.4);
- п. (1*) Утверждения 4.3 повторяет п. (3) Утверждения 2.2, но в условиях (4.4) вместо (2.2);
- п. (1**) Утверждения 4.3 дополняет/усиливает пп. (1*), (3*) Утверждения 2.2;
- п. (2) Утверждения 4.3 дважды усиливает п. (4*) Утверждения 2.2 в условиях (4.4) вместо (2.2);
- п. (2*) Утверждения 4.3 повторяет п. (4) Утверждения 2.2, но в условиях (4.4) вместо (2.2);
- п. (3) Утверждения 4.3 (особенно $(4.5)_2$) дополняет пп. (4), (4*), (4**) Утверждения 2.2;

при этом пп. (1), (1**), (2) Утверждения 4.3 и $(4.5)_2$, по всей видимости, имеют место не только в классе (4.4), но вопрос об обосновании этого тезиса остается открытым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Утверждения 4.3). По условию, найдутся $\Phi_k \in \mathcal{E} \subset \mathcal{C}(+\infty)$ такие, что $\omega_k = \mathbf{Sc}_\infty[\Phi_k]$, $k = 1, 2$. В силу Теоремы 3.6 будем иметь равенства $L_{\omega_k,\infty} = L_{\Phi_k}$, $E_{\omega_k,\infty} = E_{\Phi_k}$. Кроме того, из [11, с. 130–134] следует, что (для любых $\Phi_{1,2} \in \mathcal{N}$)

$$\Phi_1 \succ \Phi_2 \iff L_{\Phi_1} \subset L_{\Phi_2} \iff L_{\Phi_1} \hookrightarrow L_{\Phi_2},$$

а поскольку $E_\Phi = \mathrm{cl}_{L_\Phi} L_\infty$, то и

$$\Phi_1 \succ \Phi_2 \iff E_{\Phi_1} \subset E_{\Phi_2} \iff E_{\Phi_1} \hookrightarrow E_{\Phi_2},$$

и, очевидно, имеют место аналоги этих соотношений для случая равенств. Теперь доказательство становится тривиальным:

$(1, 1^*, 1^{**})$ очевидно из свойства (9) оператора $\mathbf{Sc}_\infty$;

$(2, 2^*)$ следуют соответственно из (1), (1*);

(3) поскольку $\mathbf{In}_\infty[\omega_k] = \mathbf{P}_\infty[\Phi_k] \sim \Phi_k$, то в силу свойства (8) оператора $\mathbf{In}_\beta$ получаем $\Phi_1 \mathrel{\succ\!\!\succ} \Phi_2$, откуда в силу [11, с. 135] имеем вложения $E_{\Phi_1} \hookrightarrow L_{\Phi_1} \hookrightarrow E_{\Phi_2}$, из которых первое — строгое ([11, с. 100], так как Φ_1 не удовлетворяет Δ_2-условию). Но это и есть (4.5). $\square$

§ 5. О случае $\omega \overset{\wp}{\sim}$ const

Непосредственный подсчет показывает, что при всех $\beta \in (1, +\infty]$, $\omega \in \mathcal{M}_*(\beta)$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{L_\beta} \leqslant \|u\|_{L_{\omega,\beta}} \varlimsup_{p\to\beta} \omega(p); \quad \|u\|_{L_{\omega,\beta}} \leqslant \|u\|_{L_\beta} \sup_{p\in[1,\beta)} \frac{(\mu(\Omega))^{\frac{\beta-p}{\beta p}}}{\omega(p)},$$

из которых следует совпадение

$$L_{\omega,\beta} = E_{\omega,\beta} = L_\beta \text{ при всех } \omega \overset{\wp}{\sim} \mathrm{const}. \tag{5.1}$$

Таким образом, этот случай тривиален и не требует анализа с помощью Теорем 3.6 и 3.7, хотя и естественно попытаться протестировать эти теоремы на указанном случае. Как мы покажем далее, в случае $\omega \overset{\wp}{\sim} \mathrm{const}$ наша конструкция (Теоремы 3.6, 3.7 и сопутствующие утверждения) работает с трудом (при $\beta = +\infty$) или вовсе неудовлетворительно (при $\beta < +\infty$), что, впрочем, будет объяснено спецификой этого случая и «не бросает тени» на работоспособность нашего построения при $\omega \overset{\varphi}{\mathrel{\succ\!\!\succ}} \mathrm{const}$. Прежде всего отметим, что $\omega \overset{\wp}{\sim} \mathrm{const}$ не попадают в класс $\Omega(\beta)$ и потому Теорема 3.7 в ее нынешней формулировке неприменима, также как и Утверждение 3.2.

1) Случай $\beta = +\infty$ — тогда нужный результат (5.1) получается «косвенно» из Теоремы 3.6 с привлечением дополнительных соображений. В самом деле, выберем $\Phi \in \mathcal{E} \subset \mathcal{C}(+\infty)$ такую, что $\Phi \in \overline{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{N}$ (т. е. $L_\Phi = E_\Phi = L_\infty$). Например, можно взять $\Phi(v) = \frac{1}{\ln A - \ln v}$, $A = \mathrm{const} > 1$. Легко видеть, что $\Phi = \mathbf{In}_\infty[\omega_1]$ с $\omega_1 \equiv A$. Кроме того, в силу п. (8) из [9, Предложение 1.12] имеем $\omega_2 = \mathbf{Sc}_\infty[\Phi] \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathrm{const}$, т. е. $\omega_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \omega_2$, что по свойству (2) оператора $\mathbf{In}_\beta$ дает $\Phi \in \mathcal{E}$. Теперь (5.1) следует из п. (2) Теоремы 3.6 и п. (1*) Утверждения 2.2. Также (5.1) может быть получена с помощью пространств Λ и M: характеристическая функция пространств $L_{\omega_1,\infty}$, $E_{\omega_1,\infty}$ легко находится из (3.1): $\varphi_{L_{\omega_1,\infty}} \equiv 1$ на $[0,1]$, поэтому $L_\infty = \Lambda(1) \hookrightarrow E_{\omega_1,\infty} \hookrightarrow L_{\omega_1,\infty} \hookrightarrow M(\psi) = L_\infty$, где $\psi(s) = s$, и снова п. (1*) Утверждения 2.2 дает (5.1).

2) Случай $\beta < +\infty$ — тогда Теорема 3.6 дает неудовлетворительный результат

$$(E_{\omega,\beta}, L_{\omega,\beta}) \hookrightarrow E_\Phi = L_\Phi \hookrightarrow (E_{\omega_2,\beta}, L_{\omega_2,\beta})$$

с $\Phi = \mathbf{In}_\beta[\omega]$, $\omega_2 = \mathbf{Sc}_\beta[\Phi]$, т. е. $\Phi(s) \sim \dfrac{s^\beta}{\ln s}$; $\omega_2(p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\dfrac{1}{\beta - p}\right)^{1/\beta}$, т. е. даже нет двусторонней оценки для $E_{\omega,\beta}$, $L_{\omega,\beta}$. Однако после соответствующей поправки можно применить обобщение Теоремы 3.7.

Определение 5.1. Класс $\overline{\mathcal{D}}(\beta)$ определяется так же, как и $\mathcal{D}(\beta)$, с тем отличием, что требование $f(s) \lll s^\beta$ заменяется на $f(s) \prec s^\beta$ (т. е. $f(s) \leqslant Cs^\beta$). $\square$

При $\beta < +\infty$ класс $\overline{\mathcal{D}}(\beta)$ шире $\mathcal{D}(\beta)$ — в частности, он содержит функцию $\Phi_0(s) = s^\beta$. В этом классе теряют силу пп. 2,6,7 (а возможно, и п. 5) из [9, Предложение 1.12], в частности, становится возможным отношение $\mathbf{Sc}_\beta[\Phi] \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathrm{const}$, а именно при $\Phi = \Phi_0$. В то же время, легко видеть, что Утверждение 3.5 допускает обобщение на случай $\Phi \in \overline{\mathcal{D}}(\beta)$. Следовательно, в силу п. (1*) Утверждения 2.2 окончательно получаем

$$L_\beta = L_{\Phi_0} \hookrightarrow L_{\mathbf{Sc}_\beta[\Phi_0],\beta} = L_{\omega,\beta}, \quad L_\beta = E_{\Phi_0} \hookrightarrow E_{\mathbf{Sc}_\beta[\Phi_0],\beta} = E_{\omega,\beta},$$

т. е. приходим к следующему обобщению Теоремы 3.7:

$$L_\beta \hookrightarrow (E_{\omega,\beta}, L_{\omega,\beta}) \hookrightarrow E_{\Phi_2} = L_{\Phi_2}, \quad \text{где} \quad \Phi_2(s) = \frac{s^\beta}{\ln s}. \tag{5.2}$$

Отметим также, что из (3.1) следует

$$\varphi_{L_{1,\beta}}(t) = \varphi_{L_{\Phi_3}}(t) = \varphi(t) \equiv \begin{cases} t^{1/\beta}, & t < 1, \\ t^{1/\alpha}, & t \geqslant 1, \end{cases}$$

где $\Phi_3(v) = \begin{cases} v^\alpha, & v \leqslant 1, \\ v^\beta, & v > 1, \end{cases}$ т. е. $\Phi_3 \sim \Phi_0$, $E_{\Phi_3} = L_{\Phi_3} = L_\beta$. Функция φ вогнута, так что

$$\Lambda(\varphi) \hookrightarrow \Big(L_{1,\beta} = L_{\omega,\beta}, E_{1,\beta} = E_{\omega,\beta}, L_\beta\Big) \hookrightarrow M\left(\frac{\cdot}{\varphi(\cdot)}\right). \tag{5.3}$$

Вложения (5.2), (5.3) — это предел возможностей нашего построения при $\beta < +\infty$, который так и не приводит к (5.1). Это объясняется тем, что наши рассуждения в Теоремах 3.6 и 3.7 схематически представляются в виде

$$\int\left(\sup_p g(p,x)\right)d\mu(x) \leqslant C_1 \implies \sup_p \int g(p,x)d\mu(x) \leqslant C_1 \iff \forall p \quad \int g(p,x)d\mu(x) \leqslant C_1$$
$$[\implies] \int\left(\int g(p,x)d\mu(x)\right)dp \leqslant C_2 \iff \int\left(\int g(p,x)dp\right)d\mu(x) \leqslant C_2, \tag{5.4}$$

где $[\implies]$ означает следствие с поправкой g (при $\beta = +\infty$), оставляющей g «в том же классе эквивалентности»; при этом, вообще говоря, обратные следствия «$\Longleftarrow$» в (5.4) не имеют места. Поскольку в наших рассуждениях $g(p,x) = u^p(x)\omega^{-p}(p)$, то (5.4) записывается в виде

$$u \in L_{\Phi_1} \implies u \in L_{\omega,\beta} \implies u \in L_{\Phi_2}, \quad \text{но не «} \Longleftarrow \text{»}, \tag{5.5}$$

где $\Phi_2 = \mathbf{In}_\beta[\omega]$, а $\Phi_1(u) = \sup\limits_p \dfrac{u^p}{\omega^p(p)}$ может в случае $\omega \in \Omega(\beta)$ (когда $(\ln\omega + \mathbf{e}_\omega)$ монотонна) быть вычислена по формуле (1.13), т. е. $\Phi_1 = \mathbf{Sc}_\beta^{-1}[\omega]$ (это дает Теорему 3.7; в частности, при $\omega \in \mathbf{Sc}_\infty[\mathcal{E}]$ получится $\Phi_1 \sim \Phi_2$, т. е. (5.4) и (5.5) все-таки превращаются в эквивалентности), а в случае $\omega \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathrm{const}$ получится $\Phi_1(u) = u^\beta$, т. е. (5.5) дает (5.1) при $\beta = +\infty$ и (5.2) при $\beta < +\infty$, что мы строго показали выше. Неточность же (5.2) объясняется тем, что случай $\omega \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathrm{const}$, когда $L_{\omega,\beta} = L_\beta$, непосредственно анализируется с помощью $\lim\limits_{p\to\beta}$. Попытка применить эту операцию вместо $\int dp$ в (5.4) приводит (с использованием теоремы Фату) к другой форме части (5.4):

$$\forall p \int g(p,x)d\mu(x) \leqslant C_1 \iff \varlimsup_{p\to\beta} \int g(p,x)d\mu(x) \leqslant C_2 \implies$$
$$\implies \int\left(\lim_{p\to\beta} g(p,x)\right)d\mu(x) \leqslant C_2 \tag{5.6}$$

(«$\Longleftarrow$» снова неверно) при условии, что определена $\Phi_3(u) = \lim\limits_{p\to\beta} \dfrac{u^p}{\omega^p(p)}$. Учитывая вид $g(p,x)$, запишем измененную форму (5.4) в виде

$$u \in L_{\Phi_1} \implies u \in L_{\omega,\beta} \implies u \in L_{\Phi_3}, \quad \text{но не «} \Longleftarrow \text{»}.$$

Это и есть идея доказательства (5.1) при всех $\beta \leqslant +\infty$, поскольку при $\omega \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathrm{const}$ получится $\Phi_1(s) = \Phi_3(s) = s^\beta$. Однако при $\omega \overset{\mathcal{L}}{\nsim} \mathrm{const}$ имеем $\Phi_3 \equiv 0$, т. е. замена нашей общей схемы (5.4) на (5.6) ничего не дает, и общая конструкция не допускает улучшений. В случае же $\omega \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathrm{const}$, действительно, путь (5.6) точнее (и при $\beta < +\infty$ дает лучшие результаты), но этот случай тривиален и допускает непосредственное решение (5.1), никакой теории здесь не требуется, а наша конструкция для этого не предназначена.

§ 6. Об оптимальности Теорем 3.6 и 3.7.

Покажем, что Теоремы 3.6 и 3.7 (не считая случая $\beta = +\infty$, когда любой путь приводит к (3.8)) дают более точный результат, чем общие соображения теории симметричных пространств, основанные на анализе фундаментальных функций пространств $E_{\omega,\beta}$ и $L_{\omega,\beta}$. Из этого анализа следуют лишь [12, с. 160, 162] вложения (3.3), (3.4), а также

$$\left((E_{\Phi_1}, L_{\Phi_1}, E_{\omega_1,\beta}, L_{\omega_1,\beta}) \hookrightarrow M\left(\frac{\cdot}{\psi_1(\cdot)}\right)\right) \hookrightarrow \left(\Lambda(\psi_2) \hookrightarrow (E_{\Phi_2}, L_{\Phi_2}, E_{\omega_2,\beta}, L_{\omega_2,\beta})\right), \quad (6.1)$$

где $\omega_k = \mathbf{Sc}_\beta[\Phi_k]$, а $\psi_k(t) = \dfrac{1}{\Phi_k^{-1}(1/t)}$ — фундаментальные функции пространств, стоящих соответственно в левой и правой паре блоков в (6.1), связанные между собой отношением [12, с. 134, 75, 161]:

$$M_{\psi_1}\left(\frac{1}{\cdot}\right) \in \Lambda(\psi_2), \text{ где } M_{\psi_1}(\tau) = \sup_{0<\tau s\leqslant \mu(\Omega)} \frac{\psi_1(\tau s)}{\psi_1(s)}. \quad (6.2)$$

Из наших же Теорем 3.6 и 3.7 следуют вложения

$$\left[(E_{\Phi_1} \hookrightarrow E_{\omega_1,\beta}), (L_{\Phi_1} \hookrightarrow L_{\omega_1,\beta})\right] \hookrightarrow$$
$$\hookrightarrow M\left[\frac{\cdot}{\psi_1(\cdot)}\right] \hookrightarrow \Lambda(\psi_3) \hookrightarrow \left[(E_{\Phi_3} \hookrightarrow E_{\omega_3,\beta}), (L_{\Phi_3} \hookrightarrow L_{\omega_3,\beta})\right]$$

с $\Phi_3 = \mathbf{P}_\beta[\Phi_1]$, $\omega_3 = \mathbf{Sc}_\beta[\Phi_3]$, $\psi_3(t) = \dfrac{1}{\Phi_3^{-1}(1/t)}$. Таким образом, последние вложения точнее чем (6.1), при условии, что Φ_3 растет быстрее Φ_2, что и показано в следующем утверждении (по крайней мере, для достаточно богатого класса функций Φ_1, «плотно распределенного» на шкале симметричных пространств):

Утверждение 6.1. *Пусть $\Phi_1 \in \mathcal{D}(\beta) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$ (с $\beta \in (1, +\infty)$) удовлетворяет условиям Утверждения 4.2 из [10], а именно $\Phi_1(s) = s^\beta \Psi_2(s)$, где*

$$\mathbf{e}_{\Psi_2}(s) \nearrow -0, \quad \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{\mathbf{e}_{\Psi_2}(s)}\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{s}; \quad \boldsymbol{\mu}_{\Psi_2}(s) \nearrow \text{ при } s \to +\infty; \quad (6.3)$$

и, кроме того, функция $\Psi(\xi) = \xi^{-1/\beta}\Phi_1^{-1}(\xi)$ удовлетворяет оценке

$$\mathbf{e}_\Psi(\xi)\xi^{\varepsilon_0} \to +\infty \text{ при } \xi \to +\infty \text{ с некоторой } \varepsilon_0 > 0. \quad (6.4)$$

Тогда функция $\Phi_3 = \mathbf{P}_\beta[\Phi_1]$ растет на $+\infty$ быстрее любой функции Φ_2 (удовлетворяющей (6.2)) в том смысле, что

$$\int^{+\infty} \frac{\Phi_1^{-1}(\Phi_2(s))}{s^2}\, ds < +\infty = \int^{+\infty} \frac{\Phi_1^{-1}(\Phi_3(s))}{s^2}\, ds. \quad (6.5)$$

Замечание 6.2. Условие $\Phi_1 \in \mathcal{D}(\beta)$ означает, что $\Psi_2, \dfrac{1}{\Psi} \in \mathcal{D}(0)$, так что (6.3) и (6.4) не являются существенными ограничениями: первое означает «регулярный» рост $\Phi_1(s)$ на $+\infty$ не медленнее чем $s^\beta \ln^{-\gamma} s$ (с $\gamma > 0$), а второе необременительно в силу того, что $\mathbf{e}_\Psi(s)$ убывает как $1/\ln s$. Существование $\mathbf{P}_\beta[\Phi_1]$ следует из $\Phi_1 \in \mathcal{D}(\beta)$ и свойства (5) оператора $\mathbf{P}_\beta$.

Лемма 6.3. *Пусть задана возрастающая функция $\Phi \in \mathcal{D}(\beta) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$ ($\beta \in [1, +\infty)$) такая, что функция Ψ в представлении $\Phi^{-1}(\xi) = \xi^{1/\beta}\Psi(\xi)$ обладает следующими свойствами:*

(1) $\Psi \circ \exp$ *удовлетворяет Δ_2-условию, т. е.* [11, с. 37] $\mathbf{e}_{\Psi\circ\exp} \leqslant C$*;*

(2) *выполнено* (6.4).

Тогда $J := \displaystyle\int^{+\infty} \frac{\Phi^{-1}\{(\beta - \mathbf{e}_\Phi(s))\Phi(s)\}}{s^2}\, ds = +\infty.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $\Phi \in \mathcal{D}(\beta)$ следует $\Psi \to +\infty$ на $+\infty$; из (6.4) вытекают $\mathbf{e}_\Psi > 0$ и монотонное возрастание Ψ на $+\infty$; Δ_2-условие для $\Psi \circ \exp$ переписывается в виде оценок $\mathbf{e}_\Psi(\xi) \leqslant C/\ln\xi$, $\Psi(\xi^{1-\varepsilon_0}) \geqslant C_1\Psi(\xi)$, откуда, в частности, с помощью представления

$$\frac{1}{\beta} + \mathbf{e}_\Psi(\xi) = \mathbf{e}_{\Phi^{-1}}(\xi) = \frac{1}{\mathbf{e}_\Phi(\Phi^{-1}(\xi))},$$

можно заключить, что $\mathbf{e}_\Phi \to \beta$ на $+\infty$. Делая замену $\Phi(s) = \xi$ и замечая, что

$$\beta - \mathbf{e}_\Phi(s) = \frac{\beta^2\mathbf{e}_\Psi(\xi)}{\beta\mathbf{e}_\Psi(\xi) + 1} \geqslant \frac{\beta^2}{2}\mathbf{e}_\Psi(\xi); \quad \Psi\left(\frac{\beta^2}{2}\xi\mathbf{e}_\Psi(\xi)\right) \geqslant \Psi(\xi^{1-\varepsilon_0}) \geqslant C_1\Psi(\xi);$$

$$\int^{+\infty} \frac{\mathbf{e}_\Psi^{1/\beta}(\xi)}{\xi} d\xi \geqslant \int^{+\infty} \frac{\mathbf{e}_\Psi(\xi)}{\xi} d\xi = \ln\Psi(+\infty) = +\infty;$$

легко получаем

$$J \geqslant \int^{+\infty} \Phi^{-1}\left(\frac{\beta^2}{2}\xi\mathbf{e}_\Psi(\xi)\right) \frac{d\xi}{\xi\Phi^{-1}(\xi)\mathbf{e}_\Phi(\Phi^{-1}(\xi))} =$$

$$= \int^{+\infty} \left(\frac{\beta^2}{2}\right)^{1/\beta} \frac{\Psi(\frac{\beta^2}{2}\mathbf{e}_\Psi(\xi)\xi)}{\Psi(\xi)\mathbf{e}_\Phi(\Phi^{-1}(\xi))} \cdot \frac{\mathbf{e}_\Psi^{1/\beta}(\xi)}{\xi}\, d\xi = +\infty. \qquad \square$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Утверждения 6.1). По условию (6.2) конечен интеграл

$$\int_0^{\mu(\Omega)} M_{\psi_1}\left(\frac{1}{t}\right) d\psi_2(t),$$

т. е.

$$F \equiv M_{\psi_1} \circ \Phi_2 \text{ удовлетворяет } \int^{+\infty} \frac{F(\eta)}{\eta^2}\, d\eta < +\infty, \tag{6.6}$$

причем по определению F имеем

$$F(\Phi_2^{-1}(\tau)) \geqslant \frac{\psi_1(\tau s)}{\psi_1(s)} \quad \text{при} \quad \tau \gg 1, \quad \tau s \in (0, \mu(\Omega)),$$

что легко переписать в виде:

$$\Phi_2(F^{-1}(\lambda)) \leqslant \frac{\Phi_1(\lambda\eta)}{\Phi_1(\eta)} \quad \text{при} \quad \lambda \gg 1, \quad \eta > \varepsilon = \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\right). \tag{6.7}$$

В силу возрастания функции $\mathbf{e}_{\Phi_1} = \beta + \mathbf{e}_{\Psi_2}$ величина $\Phi_1(\lambda\eta)/\Phi_1(\eta)$ возрастает по η при $\lambda \geqslant 1$, так что (6.7) принимает вид $\Phi_2(F^{-1}(\lambda)) \leqslant \Phi_1(\varepsilon\lambda)/\Phi_1(\varepsilon)$ при $\lambda \gg 1$, т. е. $\Phi_1(\varepsilon_1\Phi_2(s)) \leqslant \varepsilon F(s)$, $\varepsilon_1 = \Phi_1(\varepsilon)$, $s \gg 1$, что в силу (6.6) дает $(6.5)_1$ с точностью до замены $\Phi_2 := \varepsilon_1\Phi_2$, не меняющей пространства L_{Φ_2}. С другой стороны, в силу Утверждения 4.2 из [10], $(\beta - \mathbf{e}_{\Phi_1}(s))\Phi_1(s) \leqslant \Phi_3(Cs)$ при $s \gg 1$, и для обоснования $(6.5)_2$ остается показать, что Φ_1 удовлетворяет условиям Леммы 6.3. Нетривиально только Δ_2-условие для $\Psi\circ\exp$. Но его легко проверить (в форме эквивалентной, как указано в доказательстве леммы, оценки $\mathbf{e}_\Psi(\xi) \leqslant C/\ln\xi$), исходя из заданной в условии $(6.3)_2$ оценки $-\dfrac{1}{\mathbf{e}_{\Psi_2}(s)} \geqslant \varepsilon\ln s + C$, очевидного неравенства $\ln\Phi^{-1}(s) \geqslant \dfrac{\ln s}{\beta}$ и тождества $\dfrac{1}{\beta} + \mathbf{e}_\Psi(\xi) = \dfrac{1}{\beta + \mathbf{e}_{\Psi_2}(\Phi^{-1}(\xi))}$. □

§ 7. Дополнительные уточнения

7.1. Об «асимптотическом» описании пространств Орлича. В некоторых случаях удобно изучать пространства Орлича L_M в терминах следующей характеристики порождающей их функции M:

$$\zeta_M := \ln \mathbf{Sc}_\beta[M], \quad \text{т. е.} \quad \zeta_M(p) = -\frac{\ln \mathbf{m}_M(p)}{p}. \tag{7.1}$$

Отметим следующие очевидные свойства этой величины:

(1) Для всех $M \in \mathcal{D}(\beta)$ функция ζ_M определена и конечна на $[\alpha, \beta)$; не убывает; она неограничена при $p \to \beta$ в том и только том случае, когда M всюду конечна (перезапись свойства (3) оператора $\mathbf{Sc}_\beta$).

(2) Для всех $M \in \mathcal{D}(\beta)$ верно (в смысле $\mathcal{D}'$) $\dfrac{d\zeta_M(p)}{dp} = \dfrac{\ln M(\boldsymbol{\mu}_M(p))}{p^2}$ (перезапись $(1.6)_3$).

(3) Если $\omega \in \Omega(\beta)$, то существует (единственное в классе $\mathcal{D}(\beta) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$) решение $M \in \mathcal{D}(\beta) \cap \mathcal{N}$ уравнения $\zeta_M = \ln\omega$, которое может быть вычислено с помощью (1.8) или (1.13) (перезапись Предложения 1.12 и Замечания 1.14).

(4) Если $M_1 \prec M_2$, то $\zeta_{M_1} \geqslant \zeta_{M_2} + \mathrm{const}$, причем в классе $M_k \in \mathcal{E}$ верно и обратное (перезапись свойств (4), (9) оператора $\mathbf{Sc}_\beta$).

(5) Если $\zeta_{M_1} = \zeta_{M_2} + \ln C$, где $C = \mathrm{const} \in \mathbb{R}^+$; $\exp(\zeta_{M_k}) \in \Omega(\beta)$, то $M_2(v) = M_1(Cv)$ (очевидное следствие из (1.13)).

Таким образом, величины M и ζ_M связаны взаимно однозначным соответствием, и при этом их асимптотики взаимозависимы, а именно:

(1) Более быстрой асимптотике $\zeta_M(p)$ при $p \to \beta$ соответствует более медленная асимптотика $M(s)$ при $s \to +\infty$, и наоборот;

(2) Изменение ζ_M в пределах аддитивной постоянной соответствует изменению M в пределах класса функций Юнга.

Связь асимптотик M и ζ_M можно проиллюстрировать следующими примерами:

Пример 7.1. При $\beta < +\infty$ удобно представить M в виде $M(s) = s^\beta \exp(-\varkappa(\ln s))$, где $\varkappa \to +\infty$ на $+\infty$. Пусть $\varkappa$ вогнута. Тогда нетрудно подсчитать, что

$$\zeta_M(p) = \frac{1}{p} \cdot \varkappa(z)\Big(1 - \mathbf{e}_\varkappa(z)\Big)\Big|_{z=\varkappa'^{-1}(\beta-p)}.$$

В частности, при $\varkappa(z) = \alpha \ln z$, $\alpha > 0$, получаем, что функция $M(s) = s^\beta \ln^{-\alpha} s$ имеет $\zeta_M(p) = \dfrac{\alpha}{p} \cdot \left(\ln \dfrac{\alpha}{\beta - p} - 1\right)$.

Пример 7.2. При $\beta = +\infty$ удобно представить M в виде $M(s) = \exp(\varkappa(\ln s))$, где $\varkappa$ растет на $+\infty$ быстрее линейных функций. Пусть $\varkappa$ не убывает. Тогда нетрудно подсчитать, что

$$\zeta_M(p) = z\left(1 - \frac{1}{\mathbf{e}_\varkappa(z)}\right)\Big|_{z=\varkappa'^{-1}(p)}.$$

В частности, это дает следующие примеры:

а) $\varkappa(z) = \dfrac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha > 0$. $M(s) = \exp\left(\dfrac{\ln^{\alpha+1} s}{\alpha+1}\right)$; $\zeta_M(p) = \dfrac{\alpha}{\alpha+1} p^{1/\alpha}$.

б) $\varkappa(z) = \beta e^{\alpha z}$, $\alpha, \beta > 0$. $M(s) = \exp(\beta s^\alpha)$; $\zeta_M(p) = \dfrac{1}{\alpha}\left(\ln \dfrac{p}{\alpha\beta} - 1\right)$.

в) $\varkappa(z) = \mathrm{Ei}(e^z)$. $M(s) = \exp(\mathrm{Ei}(s))$; $\zeta_M(p) = \ln\ln p - \dfrac{\mathrm{Ei}(\ln p)}{p}$ — второе слагаемое несущественно в силу асимптотики $\mathrm{Ei}(\xi) e^{-\xi} \to 0$ при $\xi \to +\infty$.

г) $\varkappa(z) = -\ln(\alpha - z)$, $z < \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $M(s) = (\alpha - \ln s)^{-1}$; $\zeta_M(p) = \alpha - \dfrac{\ln p + 1}{p}$. □

7.2. О классах $\mathcal{C}(\beta)$. В настоящей работе мы имели дело с классом $\mathcal{C}(\beta)$, который был определен выше недостаточно строго. Дадим здесь его четкое определение.

Определение 7.3.

$$\mathcal{A}(\alpha, \beta) = \left\{ u : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}^+} \;\middle|\; u(s) = \int_\alpha^\beta \chi(p) s^p dp;\ \chi \in L_1(\alpha, \beta),\ \beta \in \operatorname{supp}\chi,\ \chi \geqslant 0 \right\}. \quad (7.2)$$

Определение 7.4. $\mathcal{C}(\beta) = \{\, v \mid v(1) < +\infty;\ \exists u \in \mathcal{A}(\alpha, \beta) :\ v \sim u \,\}$. □

Свойства этих классов подробно изучались в [9]. В частности, было показано, что:

(1) Элементы $\mathcal{A}(\alpha,\beta)$ — аналитические функции класса $\mathcal{D}(\beta)\cap\overline{\mathcal{N}}$.
(2) Выбор $\alpha<\beta$ в Определении 7.4 не играет роли, чем оправдано обозначение $\mathcal{C}(\beta)$.
(3) $\mathcal{C}(\beta)\subset\mathcal{D}(\beta)$.

Таким образом, $\mathcal{C}(\beta)\cap\overline{\mathcal{N}}$ есть класс таких обобщенных N-функций, что порождаемые ими пространства Орлича могут быть заданы также аналитическими функциями вида (7.2). В [9] было показано, что в $\mathcal{C}(\beta)$ входят «почти все» элементы $\mathcal{D}(\beta)$ за исключением явных «патологий», не представляющих прикладного интереса, и узких подклассов. При этом вес χ в представлении (7.2) для искомого элемента $N\in\mathcal{A}(\alpha,\beta)$, эквивалентного заданной функции $M\in\mathcal{C}(\beta)$, может быть восстановлен в терминах асимптотики M на $+\infty$. Впрочем, зачастую восстановление χ не представляет интереса, а нужны лишь признаки принадлежности классу $C(\beta)$.

§ 8. Сводка основных результатов

Некоторые из полученных результатов (Утверждения 3.2, 3.4, 3.5, 6.1 и Теоремы 3.6, 3.7) можно представить (схематически и не полностью, точные формулировки см. в указанных утверждениях) в виде следующей диаграммы вложений:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\Lambda(\psi_1) & \hookrightarrow & E_{\Phi_1} & \hookrightarrow & E_{\omega_1,\beta} & \hookrightarrow & E_{\Phi_2} & \hookrightarrow & E_{\omega_2,\beta} & & \dots \\
\| & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Lambda(\psi_1) & \hookrightarrow & L_{\Phi_1} & \hookrightarrow & L_{\omega_1,\beta} & \hookrightarrow & L_{\Phi_2} & \hookrightarrow & L_{\omega_2,\beta} & & \dots
\end{array} \tag{8.1}$$

или

$$\dots\hookrightarrow\ E_{\omega_1,\beta}\ \hookrightarrow\ L_{\omega_1,\beta}\ \hookrightarrow\ M\left(\frac{\cdot}{\psi_1(\cdot)}\right)\ \hookrightarrow\ \Lambda(\psi_3)\ \hookrightarrow\ E_{\Phi_3}\ \hookrightarrow\dots$$

Здесь $\Phi_{1,3}\in\mathcal{D}(\beta)$; $\Phi_2=\mathbf{In}_\beta[\omega_1]=\mathbf{P}_\beta[\Phi_1]$; $\omega_k=\mathbf{Sc}_\beta[\Phi_k]$, $k=1,2,3$; $\psi_{1,3}$ связаны с $\Phi_{1,3}$ и $\omega_{1,3}$ по формулам (3.1), (3.2). В нижней цепочке переход от M к Λ получен из общих соображений теории симметричных пространств, что приводит к худшему результату Φ_3, ω_3 и т. д., чем Φ_2, ω_2 и т. д. Вблизи L_∞ ($\beta=+\infty$, $\Phi_1\in\mathcal{E}$) все цепочки превращаются в равенства. Случай, когда все пространства E, L в точности равны L_β, $\beta\leqslant+\infty$, из схемы (8.1) не получается, но легко анализируется непосредственно из Определения 1.2 и не дискредитирует эту схему в целом (как обосновано в § 5). Дополнительные отношения между пространствами $E_{\omega,\beta}$, $L_{\omega,\beta}$ при разных ω указаны в Утверждениях 2.2 и 4.3. Об оптимальности описанных результатов см. Замечание 3.9 и § 6.

Приложение: список основных терминов и обозначений

$\hookrightarrow$ — непрерывное вложение нормированных пространств.

Литература

[1] *В. А. Вайгант, А. В. Кажихов*, О существовании глобальных решений двумерных уравнений Навье – Стокса сжимаемой вязкой жидкости, Сиб. мат. журнал, **36**, № 6 (1995), 1283–1316.

[2] *A. V. Kazhikhov, V. V. Shelukhin*, The verification compactness method, Актуальные проблемы современной математики, Т. 2, Новосибирск, Новосиб. гос. университет, 1996, 51–60.

[3] *В. И. Юдович*, Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область, Мат. Сб., **64 (106)**, № 4 (1964), 562–588.

[4] *V. I. Yudovich*, Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid, Mathematical Research Letters, V. 2, 1995, 27–38.

[5] *В. И. Юдович*, О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений, ДАН СССР, **138**, № 4 (1961), 805–808.

[6] *С. И. Похожаев*, О теореме вложения С. Л. Соболева в случае $lp = n$, Докл. науч.-техн. конф. МЭИ, М., 1965, 158–170.

[7] *И. Б. Симоненко*, Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлича, Мат. Сб., **63 (105)**, № 4 (1964), 536–553.

[8] *А. Е. Мамонтов*, Экстраполяция линейных операторов из L_p в пространства Орлича, порожденные быстро или медленно растущими N-функциями, Актуальные проблемы современной математики, Т. 2, Новосибирск, Новосиб. гос. университет, 1996, 95–103.

[9] *А. Е. Мамонтов*, Интегральные представления и преобразования N-функций I, Сиб. мат. журнал, **47**, № 1 (2006), 123–145.

[10] *А. Е. Мамонтов*, Интегральные представления и преобразования N-функций II, Сиб. мат. журнал, **47**, № 4 (2006), 811–830.

[11] *М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий*, Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958.

[12] *С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов*, Интерполяция линейных операторов, М., Наука, 1978.