Н.П. Дементьев, Ю.А. Петров
Институт Экономики и организации
промышленного производства СО РАН
пр. акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: dement@ieie.nsc.ru

МНОГОМЕРНЫЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ И ПРОГНОЗИРОВАНИИ

В настоящей работе развивается предложенная Ю.А. Петровым концепция многомерных экономических индексов, по определению циркулярных для заданного динамического ряда; предложена новая индексная формула – многомерный агрегативный индекс, пригодный в ситуации несопоставимости номенклатуры продукции, выпускаемой в разных объектах совокупности и учитывающий разный вес объектов.

В статье исследованы теоретические и методические вопросы построения системы взаимосвязанных и непротиворечивых индексов физического объема выпуска промышленной продукции и индексов цен (дефляторов) для заданного множества объектов - стран (регионов) и/или для одной страны (региона) в разные периоды времени, для которого отсутствуют единые денежные единицы измерения различных видов продукции (предполагается, что натуральные единицы измерения данного вида продукции одинаковы для разных стран и периодов времени, однако соизмерение разных видов продукции в натуральном выражении между собой в натуральной единице, вообще говоря, невозможно).

На основе предложенного Ю.А. Петровым методологического подхода к построению многомерных экономических индексов цен и количеств, а также аксиом[1], которым они должны удовлетворять [Петров Ю.А., 1987, 1999], им была сконструирована новая индексная формула - многомерный симметричный индекс, пригодный в ситуации несопоставимости номенклатуры продукции, выпускаемой в разных объектах совокупности. Для построения многомерного симметричного индекса нужно решить систему уравнений, в которой неизвестным являются вектор индексов физического объема выпуска продукции в разные годы. Соответствующая теорема о существовании и единственности решения такой системы уравнений была сформулирована и доказана Ю. Петровым для случая сравнения двух объектов, а для случая сравнения более чем двух объектов теорема была доказана Н.П. Дементьевым [Дементьев Н.П., Петров Ю.А., 1994].

Симметричный индекс, как и все известные нам индексы основан на предположении, что любые два объекта в совокупности равны по своему значению. Это допущение естественно для сравнения выпуска продукции в одной стране за несколько соседних лет. Однако в международных сопоставлениях это допущение не всегда реалистично. Например, считать равнозначными США и какую-либо малую страну некорректно. Тем не менее, в международных сопоставлениях используется принцип равнозначности [Кевеш П., 1990]. Тем самым включение в некоторую совокупность стран группы стран, чей вес в мировом промышленном производстве незначителен, может существенно изменить соотношения производства продукции между основными странами.

В настоящей статье Ю.А. Петровым предложен многомерный агрегативный индекс физического объема выпуска продукции и индексов цен (дефляторов) для заданного множества объектов - стран (регионов) и/или для одной страны (региона) в разные периоды

[1] В последние десятилетия в теории экономических индексов используется аксиоматический подход к анализу индексных формул [Eichhorn W., Voeller J., 1976b; Eichhorn W., 1978; Иванов Н., 1995]. Однако замена тестов на аксиомы [Eichhorn W., 1976a] не привела к построению новых индексных формул, обсуждаются лишь давно предложенные и проанализированные индексы (см. [Фишер И., 1928; Петров Ю.А., 1999]).

времени, в котором влияние крупных стран сильнее, чем малых (или, например, в России, влияние 1990 г. больше, чем 1940 или 1999 года).

Многомерный агрегативный индекс можно интерпретировать как динами-ческий ряд парных индексов в усредненных ценах за некоторый базовый объект, причем усредненные цены определяются с учетом относительных величин выпуска продукции в натуральном выражении в разных объектах и с элиминированием инфляции или неаддитивности разных денежных единиц.

Разработанный методический инструментарий может быть использован в технологии экономических измерений и прогнозировании социально-экономи-ческого развития страны. Использование в прогнозировании многомерных экономических индексов основано на принципе единства измерителей, используемых в процессе разработки планов (прогнозов, индикативных планов, государственных программ и т.п.) и их исполнения. Благодаря этому система фактических и плановых (прогнозных) индексов изменения векторных показателей и индексов выполнения планов циркулярна, что позволяет обеспечить согласо-ванность экономических показателей.

1. Многомерные экономические индексы, экономические измерения и прогнозирование социально-экономического развития

Показатели динамики и структуры общественного производства, динамики цен и покупательной способности денег являются традиционными инструментами экономического анализа. Они применяются и в анализе макроэкономической ситуации, и при оценке изменений в затратах и результатах производства на микроуровне. Особое значение имеет точное и оперативное измерение инфляции, динамики производства и инвестиций, доходов и расходов населения. Эти показатели используются при индексации цен, зарплаты и различных пособий, определении нормативов бюджетных расходов. Завышение или занижение скорости инфляции может привести либо к неоправданным бюджетным расходам либо, наоборот, к снижению реальных величин пенсий.

К сожалению, до настоящего времени проблема точного определения вышеуказанных показателей не решена по различным причинам. Наряду с такими причинами, как нехватка средств, экономическая неэффективность создания системы тотальной статистической отчетности, незаинтересованность властей в точном отражении экономической реальности, остается и такая серьезная причина, как неединственность индексных формул (или, что во многих случаях то же самое, цен-измерителей или весов).

При сравнении двух объектов[2] по уровню производства можно выбрать в качестве цен-измерителей цены либо первого, либо второго. В первом случае получается арифметический индекс, во втором - гармонический. Расхождение между ними отсутствует лишь при выполнении одного из двух условий: неизменности соотношений 1) цен или 2) выпусков. Если и те, и другие изменяются, то арифметический и гармонический индексы, как правило, принимают разные значения. В этом суть так называемой “index number problem”.

При работе с динамическими рядами ситуация еще сложнее. Выбирая разные цены-измерители, получим разные сводные индексы. Например, для динамических рядов данных за 1977-2003 гг. можно рассчитать 27 индекс (в ценах 1977, 1978,..., 2003 годов).

Поскольку исчерпывающего решения данной проблемы (ее называют также *index number problem*) не предложено уже более столетия, можно интерпретировать ее как некий принцип неопределенности экономических измерений. Поскольку расхождение между значениями двух основных индексных формул (арифмети-ческого и гармонического индекса) увеличивается при усилении различий между объектами как в структуре цен, так и в структуре выпусков, данный принцип конструктивен, т.е. позволяет количественно оценить погрешности измерения темпов экономического роста и инфляции (подробнее см. [Петров Ю.А., 1999]).

[2] Под *объектами* понимается одна и та же экономическая система в разные периоды (моменты) времени, либо разные экономические системы (страны и регионы).

В статистической практике выбор одного или нескольких индексов для практического использования осуществляется в целом произвольно, хотя и с учетом различного рода теоретических и эвристических соображений (см., например, работы [Аллен Р., 1980; Зоркальцев В.И., 1996; Кевеш П., 1990]).

Наиболее простое правило – выбирать индексы в ценах последнего года – предполагает ежегодный пересчет всех предшествующих индексных чисел. Если учесть то обстоятельство, что статистические данные после первой публикации, как правило, неоднократно уточняются, то непригодность “цен последнего года” для экономического анализа очевидна.

Другой подход основан на использовании цепных индексов (погодовых индексов с переменными весами или ценами-измерителями). Расхождение между арифметическим и гармоническим цепными индексами при этом сохраняется, т.к. соотношение арифметического и гармонического цепных индексов, по определению, равно произведению соотношений соответствующих погодовых индексов. Однако возникает еще одна проблема – нециркулярности временного ряда индексов физического объема продукции (а также индексов цен).

Если погодовые индексы перемножить, то их произведение (цепной индекс) должно быть, вообще говоря, равно индексу, связывающему первый и последний объекты в цепочке. Это требование (тест циркулярности – от слова “circle”) некоторые авторы называют свойством транзитивности (см., например, [Аллен Р., 1980).

Для всех известных индексов (кроме невзвешенного геометрического) тест циркулярности не выполняется. Поэтому значения цепных и прямых индексов могут существенно различаться.

В настоящей работе развивается предложенная Ю.А. Петровым концепция многомерных экономических индексов, по определению циркулярных для заданного динамического ряда; предложена новая индексная формула – многомерный агрегативный индекс, пригодный в ситуации несопоставимости номенклатуры продукции, выпускаемой в разных объектах совокупности и учитывающий разный вес объектов.

Многомерный агрегативный индекс (его вывод и математический анализ свойств излагаются ниже в п.п. 3, 4) можно интерпретировать как динамических ряд парных индексов в усредненных ценах за некоторый базовый период, причем усредненные цены определяются с учетом относительных величин выпуска продукции в натуральном выражении в разных объектах и с элиминированием инфляции или неаддитивности разных денежных единиц.

Долгосрочное прогнозирование, программирование и планирование предпо-лагает достижение стратегических целей экономического развития и осуществление сильных структурных сдвигов в экономике в течение планового периода. А такие сдвиги в структуре общественного производства связаны с коренными изменениями в ценовых пропорциях. Тем самым проблема неединственности индексных чисел является весьма актуальной с точки зрения точности измерения плановых (прогнозных) и фактических результатов развития экономики. Эта проблема имеет три аспекта.

1. Долгосрочное прогнозирование, программирование и планирование основывается на тщательном изучении предшествующего развития, особенно с точки зрения факторов, скорости и направления структурных сдвигов в экономике. Полезность такого анализа лимитируется точностью экономических измерений. Последняя же крайне невысока в условиях российской экономики последних лет. Достаточно отметить изменение темпа прироста ВВП в 2000 г. на несколько процентных пунктов в результате перехода Госкомстата на более современные цены (т.е. смены системы цен-измерителей).

2. Как и при ретроспективном анализе экономического развития, прогнози-рование темпов и пропорций экономического развития формально может осуществляться в ценах будущих периодов. Однако практическая ценность такого рода прогнозов невелика, так как сопоставление, например, фактических индексов роста промышленной продукции в фактических ценах 2002 г. относительно 2001 г. и прогнозных индексов роста

промышленной продукции в прогнозных ценах 2002 г. относительно 2001 г. не имеет смысла. На первый взгляд, эта проблема надуманна, так как в качестве сопоставимых цен можно использовать цены 2001 г. Однако это решение также не идеально.

В момент принятия прогноза социально-экономического развития на 2002 г. (лето 2001 г.) среднегодовые цены 2001 г. еще неизвестны. Неизвестна и величина выпуска продукции за 2001 г. В практике бюджетного процесса используются оценки (т.е. суммы фактических величин за первую половину года и ожидаемых значений этих величин до конца года). Ошибки в базе для сравнения при таком подходе неизбежны, так же как постоянные корректировки прогнозов, усложняющие прогнозирование и затрудняющие проверку выполнения прогнозов.

Использование в качестве базы экономических характеристик последнего года, за который уже имеется достоверная информации, позволяет получить более стабильную и объективную систему индикаторов социально-экономического развития. Тем не менее, такое решение приемлемо только для конъюнктурной формы планирования (на один год). При прогнозировании, программировании и планировании на несколько лет ежегодная смена сопоставимых цен приводит к полной несопоставимости рядов прогнозных и фактических индексов экономических величин. Поэтому можно было бы при принятии очередного плана вводить новые сопоставимые цены, одновременно сохраняя при этом систему индексов в сопоставимых ценах, принятых при утверждении действующего плана. Одновременный расчет нескольких (как минимум двух) систем экономических индексов (соответственно, в разных сопоставимых ценах) позволяет обеспечить соответствие методологии измерения экономических величин, принятой при утверждении плана (прогноза) и при оценке его выполнения.

3. Особо важна точность измерения экономических величин при измерении степени выполнения плана (прогноза). Наличие политических интересов делает процедуры экономических измерений крайне уязвимыми к субъективным и волюнтаристским деформациям. Единственным надежным средством, предохраняю-щих от таких дополнительных деформаций является строгая общепринятая методика оценки исполнения прогнозов и, в первую очередь, определения сопоставимых цен. Эти процедуры должны быть проверяемыми для независимых исследователей на основе детальных статистических данных, публикуемых Госкомстатом России.

Таким образом, система индикаторов развития экономики и финансов, используемых в бюджетном планировании и социально-экономическом прогнозировании, не удовлетворяет аксиомам теории экономических индексов, так как: 1) динамические ряды индексов не удовлетворяют аксиоме циркулярности; 2) в качестве базы используются часто корректируемые величины (оценки ожидаемых значений величин и тому подобные гибриды фактических и прогнозных величин).

На основе высказанных выше соображений можно предложить подход, основанный на принципе единства измерителей, используемых в процессе разработки планов (прогнозов, индикативных планов, государственных программ и т.п.) и их исполнения. Благодаря этому система фактических и плановых индексов изменения векторных показателей и индексов выполнения планов циркулярна, что позволяет обеспечить согласованность показателей, используемых при стратеги-ческом планировании.

Для этого целесообразно также унифицировать системы статистических показателей и процедуры разработки, принятия и оценки исполнения прогнозов социально-экономического развития и бюджетных планов.

Во-первых, набор индексов и процедуры их расчета, принятые в плане (прогнозе) и при оценке его исполнения, должны быть одинаковы. Следовательно, для каждого года система показателей фактического развития экономики должна иметь столько вариантов расчета, исполнение скольких планов (прогнозов) оценивается применительно к данному году (периоду, объекту).

Во-вторых, в ретроспективном анализе планов (прогнозов) возможно применение обратной методики, а именно, пересчета всех показателей предшествующих планов развития, относящихся к данному году, в цены данного года или данного периода. Это позволит оценить исполнение плана (прогноза), элиминированное от ошибки в прогнозе цен.

2. Многомерные экономические индексы: определения, аксиомы

Традиционная постановка задачи построенbя экономических индексов такова.

Рассматривается множество объектов L, каждый из которых характеризуется векторами $q_t, c_t, p_t, x_t \in R^n, \quad t \in L$.

Под объектами понимаются различные экономические системы (страны, регионы) и/или одна и та же экономическая система в разные моменты (периоды) времени. В первом случае речь идет о межстрановых и межрегиональных сопоставлениях и построении территориальных индексов. Во втором - об анализе динамических рядов статистических данных о развитии экономической системы и построении индексов изменения уровня (индексов роста или изменения во времени).

Здесь и далее:

$J = \{1, 2,..., n\}$ – множество видов продукции (отраслей), где $n > 1$ – натуральное число;

$L = \{1, 2,..., T\}$ – множество объектов (моментов, периодов, стран, регионов), где $T > 1$ – натуральное число;

R^n_+ – неотрицательный ортант пространства вещественных чисел R^n размерности n;

$q_t = (q_{t1}, q_{t2},..., q_{tn})$ – вектор-строка выпуска продукции в натуральном выражении по объекту $t \in L$;

Q – матрица размерности $T \times n$, t-ая строка которой равна q_t;

$q_0 = (q_{01}, q_{02},..., q_{0n})$ – вектор-строка суммарных выпусков продукции в натуральном выражении по всей совокупности L, т.е.

$$q_{0j} = \sum_{t \in L} q_{tj}, \qquad j \in J;$$

$c_t = (c_{t1}, c_{t2},..., c_{tn})$, – вектор-строка выпуска продукции в однородных единицах измерения (например, в текущих, действующих, фактических ценах) по объекту $t \in L$;

C – матрица размерности $T \times n$, t-ая строка которой равна c_t;

$c_0 = (c_{01}, c_{02},..., c_{0n})$ – вектор-строка суммарных выпусков продукции в текущих ценах по всей совокупности L, т.е.

$$c_{0j} = \sum_{t \in L} c_{tj}, \qquad j \in J;$$

$c^0 = (c_{10}, c_{20},..., c_{n0})$ – вектор-столбец суммарных выпусков продукции в текущих ценах по всем отраслям $j \in J$, т.е.

$$c_{t0} = \sum_{j \in J} c_{tj}, \quad t \in L;$$

c_{00} – суммарный выпуск продукции в текущих ценах;

$p_t = (p_{t1}, p_{t2},..., p_{tn})$ – вектор-строка цен по объекту $t \in L$, а p_{tj} удовлетворяет уравнению $p_{tj}q_{tj} = c_{tj}$ ($p_{tj} = c_{tj}/q_{tj}$ при положительности q_{tj} и $p_{tj} = 0$ при $q_{tj} = 0$);

P – матрица цен размерности $T \times n$, t-ая строка которой равна p_t.

На основе матрицы C рассчитывается матрица W долей различных отраслей j в суммарном выпуске продукции по объекту $t \in L$:

$$w_{tj} = (c_{tj}/c_{t0}), \qquad t \in L, \; j \in J,$$

а также определяются средние доли отраслей по всем объектам

$w_0 = (w_{01}, w_{02}, \ldots, w_{0n})$, где $w_{0j} = \sum_{t \in L} w_{tj}/T, \quad j \in J$.

Введем следующие обозначения для операций с матрицами, векторами и скалярами:

1. Покомпонентное умножение $A \times B$;
2. Покомпонентное деление A / B;
3. Матричное умножение (скалярное умножение векторов) AB;
4. Скалярное произведение векторов (a, b);
5. Матричные операции имеют приоритет перед покомпонентными;
6. Умножение имеет приоритет перед делением среди операций одного типа.

Требуется построить систему попарных сводных индексов (средних темпов изменения):

- физического объема (ИФО) выпуска продукции или индексов количеств (quantity indices) $IQ_{tl}, \quad t, l \in L$;
- цен (price indices) $IP_{tl}, \quad t, l \in L$.

Сделаем предположения относительно свойств матриц Q, C **:**
Полуположительность строк и столбцов:
Q, C неотрицательны, причем $q_{tj} = 0$ тогда и только тогда,
когда $c_{tj} = 0, \quad j \in J, \; t \in L$; (П1)

$$\sum_{t \in L} q_{tj} > 0, \qquad j \in J; \tag{П2}$$

$$\sum_{j \in J} q_{tj} > 0, \qquad t \in L. \tag{П3}$$

Отсутствие сильной разложимости:
Не существует непустых множеств $J_1 \subset J, L \subset L_1$ таких, что
а) $q_{tj} = 0$, если $j \in J_1, \; t \in L_1$,

б) $q_{tj} = 0$, если $j \notin J_1, \; t \notin L_1$. (П4)

Очевидно, что:

из П1 - П2 следует $\sum_{t \in L} c_{tj} > 0, \quad j \in J$;

из П1, П3 следует $\sum_{j \in J} c_{tj} > 0, \quad t \in L$;

из П1, П4 следует отсутствие сильной разложимости C.

Определение 2.1. Многомерным индексом физического объема (МИФО) называется T-мерная вектор-функция

$$IQ = (IQ(Q, C)),$$

удовлетворяющая для всех Q, C системе аксиом $A1^Q$- $A10^Q$.

Замечание 2.1. На самом деле эта система аксиом не независима, поэтому достаточно выполнения некоторой подгруппы аксиом, например, монотонности, линейной однородности в сильной форме, независимости от масштаба, независимости от единиц измерения, произведения индексов цен и количеств, определенности. В целях ясности изложения мы сохранили все традиционные аксиомы, поскольку аксиома агрегативности, из которой следуют аксиомы монотонности в слабой форме, линейной однородности в слабой форме, идентичности, пропорциональности, циркулярности, определенности, предложена нами.

Определение 2.2. Многомерным индексом цен (МИЦ) называется T-мерная вектор-функция

$$IP = (IP(Q, C)),$$

удовлетворяющая для всех Q, C системе аксиом $A1^P$-$A10^P$.

Определение 2.3. Многомерным индексом стоимостного объема (МИСО) называется T-мерный вектор IC, где $IC_t = c_{t0} / c_{00}$.

Определение 2.4. Матрицы попарных индексов (IQ_{tl}) и (IP_{tl}) есть матрицы соотношений компонент МИФО (либо МИЦ) для всех пар объектов $t, l \in L$:

$IQ_{tl} = IQ_t / IQ_l$;

$IP_{tl} = IP_t / IP_l$.

Аксиома монотонности (слабая форма)[3]: для всех Q, C, $t,l \in L$, $t \neq l$

$A1c^Q$) $IQ_t(Q, C) > IQ_l(Q, C)$, если $Q_t \geq Q_l$.

Интерпретация $A1c^Q$ очевидна: функции IQ_{t0} является монотонно возрастающей Q_t.

По аналогии с аксиомой монотонности для парных индексов можно сформулировать аксиому монотонности для МИФО и МИЦ в сильной форме.

Аксиома монотонности (сильная форма): для всех Q, C, Q', C', $t,l \in L$

$A1^Q$) $IQ_{tl}(Q, C) > IQ_{tl}(Q', C)$, если $q_l = q'_l$, $q_t \geq q'_t$,

$A1^P$) $IP_{tl}(Q, C) > IP_{tl}(Q, C')$, если $c_l = c'_l$, $c_t \geq c'_t$, а следовательно, $p_l = p'_l$, $p_t \geq p'_t$

Аксиома линейной однородности (слабая форма): для всех Q, C, $t,l,g \in L$

$A2c^Q$) $IQ_{tl} = hIQ_{gl}$, если $q_t = hq_g$, $\forall h > 0$;

$A2c^P$) $IP_{tl} = hIP_{gl}$, если $p_t = hp_g$, $\forall h > 0$.

Аксиома линейной однородности (сильная форма): для всех Q, C, Q', C', $t,l,g \in L$

$A2^Q$) $IQ_{tl}(Q', C) = hIQ_{tl}(Q, C)$, если $q'_t = hq_t$, $q'_l = q_l$, $h>0$;

$A2^P$) $IP_{tl}(Q, C') = hIP_{tl}(Q, C)$, если $c'_t = hc_t$, $c_l = c'_l$, $h>0$, а следовательно, $p'_t = hP_t$, $p'_l = p_l$.

Аксиома идентичности: для всех Q, C, $t,l \in L$

$A3^Q$) если $q_t = q_l$, то $IQ_t(Q,C) = IQ_l(Q,C)$;

$A3^P$) если $p_t = p_l$, то $IP_t(Q,C) = IP_l(Q,C)$.

Аксиома А3, очевидно, есть следствие аксиомы линейной однородности в слабой форме А2с.

Аксиома независимости значений ИФО от масштаба выпусков и ИЦ от масштаба цен: для всех Q, C, $t,l \in L$

$A4^Q$) $IQ_{tl}(hQ, C) = IQ_{tl}(Q, C)$, $\forall h > 0$;

$A4^P$) $IP_{tl}(Q, hC) = IP_{tl}(Q, C)$, $\forall h > 0$;

Аксиома независимости значений индексов физического объема и цен от единиц измерения выпусков q_t, q_l и цен p_t, p_l: $\forall$ Q, C, $t,l \in L$, $u_i > 0$

$A5^Q$) $IQ_{tl}(Q, C) = IQ_{tl}(\bar{Q}, C)$,

$A5^P$) $IP_{tl}(Q, C) = IP_{tl}(\bar{Q}, C)$,

[3] Здесь и далее под слабой формой аксиомы подразумевается формулировка для случая фиксированной пары матриц Q, C. Под сильной формой аксиомы подразумевается формулировка для случая фиксированного множества L и любых пар матриц Q, C, удовлетворяющих некоторым условиям. Иногда это различие несущественно.

где $\bar{q}_{ti} = u_i\, q_{ti}$, $\forall\ i \in J$.

Аксиома пропорциональности: для всех $t,l \in L$

A6^Q) $IQ_{tl} = h$, если $q_t = hq_l$, $\forall\ h > 0$;

A6^P) $IP_{tl} = h$, если $p_t = hp_l$, $\forall\ h > 0$.

Тест пропорциональности является следствием из аксиомы линейной однородности в слабой форме и аксиомы идентичности. Покажем это.

По условию аксиомы пропорциональности $q_t = hq_l$. Положим $q_g = q_l$. Тогда $q_t = hq_g$. Из A2c^Q следует, что $IQ_{tl} = hIQ_{gl}$, если $q_t = hq_g$. Поскольку, $q_t = hq_g$, то $IQq_{tl} = hIQ_{gl}$.

Согласно аксиоме идентичности $IQ_{gl} = 1$, а следовательно, $IQ_{tl} = h$, что и требовалось доказать.

Для индекса цен доказательство аналогично.

Аксиома обратимости во времени в данной постановке выполняется по определению. Вместо нее принимается

Тест и Аксиома циркулярности: $\forall\ t,l \in L$

A7^Q) $IQ_{tl}(Q, C) \times IQ_{lg}(Q, C) = IQ_{tg}(Q, C)$;

A7^P) $IP_{tl}(Q, C) \times IP_{lg}(Q, C) = IP_{tg}(Q, C)$.

Тест и Аксиома произведения индексов цен и количеств: $\forall$ t,l $\in$L

A8) $IQ_{tl}(Q, C) \times IP_{tl}(Q, C) = IC_{tl}(Q, C)$,

где $IC_{tl}(Q, C) = (p_t, q_t)/(p_l, q_l) = c_{t0}/c_{l0}$.

Аксиома определенности:

A9^Q) Для всех Q, C, удовлетворяющих предположениям П1-П4, существует единственное значение $IQ(Q, C)$, причем оно положительно;

A9^P) Для всех Q, C, удовлетворяющих предположениям П1-П4, существует единственное значение $IP(Q, C)$, причем оно положительно.

Аксиома агрегативности: для всех Q, C, удовлетворяющих предположениям П1-П4,

A10^Q) существует S>0 такой, что

$$\min_{t \in L}\{p_{tj}/p_{tg}\} \le s_j/s_g \le \max_{t \in L}\{p_{tj}/p_{tg}\}$$

для всех положительных P и

$$IQ_{tl} = (S, q_t)/(S, q_l)\ ,\quad \forall\ t,l \in L\ .$$

Если многомерный индекс IQ_{tl} удовлетворяет аксиоме агрегативности, то он удовлетворяет и

- аксиоме монотонности в слабой форме A1c;
- аксиоме линейной однородности в слабой форме A2c;
- аксиоме идентичности A3c;
- аксиоме пропорциональности A6;
- аксиоме циркулярности A7;
- аксиоме определенности A8.

Соответственно, остаются аксиомы A1, A2, A4, A5, A10. Независимость этой системы аксиом нами пока не доказана. Ее непротиворечивость следует из факта существования многомерного агрегативного индекса (см. пункты. 3, 4), удовлетво-ряющего всем этим аксиомам.

3. Построение многомерного агрегативного индекса

Запишем задачу построения многомерных индексов физических объемов и цен.

$$IC_t = c_{t0}/c_{00}\,,\qquad t \in L \tag{1}$$

$$IQ_l = (S, q_l)/(S, q_0), S>0,\ \ l \in L \tag{2}$$

Просуммировав по l левые и правые части уравнений системы, получим Следствие 3.1.

$$\sum_{t \in L} IQ_t = 1. \tag{3}$$

Итак, *многомерный индекс имеет следующую интерпретацию:* IQ_l *- это доля объекта* l *в совокупном выпуске продукции по всем объектам* $t \in L$ *, измеренном в ценах-измерителях* S .

Определим цены-измерители S как средние за период дефлятированные цены:

$$s_j = \sum_{t \in L} c_{tj} / IP_t / q_{0j}, \qquad j \in J. \tag{4}$$

где

$$IP_t = IC_t / IQ_t = (c_{t0} / c_{00}) / IQ_t, \quad t \in L; \tag{5}$$

Из (4)-(5) следует, что

$$s_j = \sum_{t \in L} (c_{tj} / c_{t0}) \times c_{00} \times IQ_t / q_{0j}, \qquad j \in J, \tag{6}$$

или

$$s_j = c_{00} \times \sum_{t \in L} w_{tj} \times IQ_t / q_{0j}, \quad j \in J. \tag{7}$$

Из (2) и (7) получаем систему уравнений

$$IQ_l = \left[c_{00} \times \sum_{j \in J} q_{lj} \times \sum_{t \in L} w_{tj} \times IQ_t / q_{0j} \right] /$$

$$\left[c_{00} \times \sum_{j \in J} q_{0j} \times \sum_{t \in L} w_{tj} \times IQ_t / q_{0j} \right], \qquad l \in L. \tag{8}$$

Поделив знаменатель и числитель на положительную величину c_{00} и сделав замену переменных $\tilde{q}_{lj} = q_{lj} / q_{0j}$, $l \in L$, $j \in J$, получим

$$IQ_l = \left[\sum_{j \in J} \tilde{q}_{lj} \times \sum_{t \in L} w_{tj} \times IQ_t \right] / \left[\sum_{j \in J} \sum_{t \in L} w_{tj} \times IQ_t \right], \quad l \in L. \tag{9}$$

Перегруппировав выражения под знаками сумм, имеем

$$IQ_l = \left[\sum_{t \in L} IQ_t \times \sum_{j \in J} w_{tj} \tilde{q}_{lj} \right] / \left[\sum_{t \in L} IQ_t \times \sum_{j \in J} w_{tj} \right], \qquad l \in L, \tag{10}$$

что эквивалентно, учитывая тождество $\sum_{j \in J} w_{tj} = 1$,

$$IQ_l = \sum_{t \in L} Q_t \times \sum_{j \in J} w_{tj} \tilde{q}_{lj} / \sum_{t \in L} IQ_{t0}, \qquad l \in L. \tag{11}$$

Запишем теперь (11) с учетом (2), (3) в виде системы (12)-(13):

$$IQ_l = \sum_{t \in L} IQ_t \times \sum_{j \in J} w_{tj} \tilde{q}_{lj}, \qquad l \in L, \tag{12}$$

$$\sum_{t \in L} IQ_t = 1. \qquad (13)$$

В общем случае систему (12) можно представить в матричном виде

$$I = BI,$$

где

$$b_{lt} = \sum_{j \in J} w_{tj} \tilde{q}_{lj}. \qquad (14)$$

Замечание 3.1. Очевидно, что, вообще говоря, S определен с точностью до положительного множителя.

Замечание 3.2. Если не делать перестановки знаков сумм в числителе правой части уравнения (9), получим более экономически осмысленную формулу, математически эквивалентную (11):

$$IQ_l = \sum_{j \in J} \tilde{q}_{lj} \times \sum_{t \in L} w_{tj} \times IQ_t, \quad l \in L. \qquad (15)$$

Агрегативный индекс физического объема в году $l \in L$, таким образом есть средняя из долей выпусков продуктов $j \in J$ в году l в суммарном выпуске за период $q_{0j} = \sum_{t \in L} q_{tj}$, взвешенных по суммарным за период долям продуктов $j \in J$ в выпусках продукции в ценностном выражении, опять же взвешенным по значения агрегативного индекса в соответствующих годах.

Очевидно, что если все удельные веса $w_{tj} = 1/n$, то система уравнений (12) сводится к системе

$$IQ_l = \sum_{j \in J} \tilde{q}_{lj} \times \sum_{t \in L} IQ_t = \sum_{j \in J} \tilde{q}_{lj}, \qquad l \in L. \qquad (16)$$

Существование и единственность решения системы уравнений, задающей многомерный агрегативный индекс, доказывает

Теорема. Пусть выполнены предположения (П1)-(П4). Тогда система уравнений (12)-(13) разрешима и имеет единственное решение

$$IQ^* = (IQ_1^*, ..., IQ_T^*) > 0,$$

а, следовательно, единственным образом (с точностью до положительного множителя) определяется и вектор S.

Таким образом, для заданной пары Q, C многомерный агрегативный индекс физического объема определен однозначно, а следовательно, определен однозначно и производный индекс цен. На основе многомерных индексов цен и количеств можно рассчитать матрицы попарных индексов цен и количеств, по определению циркулярных.

Расчет многомерных агрегативных индексов цен и физического объема выпуска продукции осуществлялся нами итеративно с помощью математической программы MS EXCEL за несколько итераций. Его численные значения не слишком сильно отличаются от значений многомерного симметричного индекса и идеального индекса Фишера [Петров Ю.А., 1999], если сравниваются объекты с близкими весами, но разной структурой. И, наоборот, при сравнении объектов с весами, отличными во много раз, агрегативный индекс может давать существенно отличные от других индексов значения.

4. Доказательство теоремы

Пусть выполнены предположения теоремы.

Покажем сначала, что B - неразложимая матрица. Предположим от противного, что B разложима. В соответствии с определением разложимости, найдется непустое множество L' такое, что $b_{lt} = 0$ для всех $t \in L'$, $l \notin L'$.

1. Обозначим через J' множество номеров j таких, что $c_{tj} = 0$ для всех $t \in L'$. Покажем, что $J' \neq \emptyset$. Предположим противное. Зафиксируем произвольный $l_0 \notin L'$. Из (П1), (П3) следует, что $q_{t_0 j_0} > 0$, $c_{l_0 j_0} > 0$ для некоторого j_0. Так как по допущению $J' = \emptyset$, то найдется $t_0 \in L'$ такой, что $c_{t_0 j_0} > 0$. Ясно, что $\tilde{q}_{l_0 j_0} > 0$, $w_{t_0 j_0} > 0$. Тогда

$$b_{l_0 t_0} = \sum_{j \in J} w_{t_0 j}\, \tilde{q}_{l_0 j} \geq w_{t_0 j_0} \tilde{q}_{l_0 j_0} > 0 .$$

Это противоречит определению множества L'. Итак, $J' \neq \emptyset$.

Ясно, что $J' \neq J$ (иначе строки c_t, $t \in L'$, были бы нулевыми, что противоречило бы (П1), (П3)).

Итак, существуют непустые множества $L' \subset L$, $J' \subset J$ такие, что $c_{tj} = 0$ для всех $t \in L'$, $j \in J'$. Покажем, что $c_{tj} = 0$ для всех $t \notin L'$, $j \notin J'$ (что означало бы, что матрица C сильно разложима). Предположим от противного, что $c_{l_0 j_0} > 0$ для некоторых $l_0 \notin L'$, $j_0 \notin J'$. Пусть $t_0 \in L'$ такой, что $c_{t_0 j_0} > 0$. Очевидно, $\tilde{q}_{l_0 j_0} > 0$, $w_{t_0 j_0} > 0$ и, следовательно, $b_{l_0 t_0} = \sum_{j \in J} w_{t_0 j}\, \tilde{q}_{l_0 j} > 0$. Это противоречит определению множества L'. Тем самым показано, что C – сильно разложимая матрица. Но это противоречит предположениям (П1), (П4). Из полученного противоречия следует, что B - неразложимая матрица.

Как хорошо известно, неразложимая матрица имеет единственный неотрицательный собственный вектор, причем этот вектор строго положителен. Кроме того, характеристическое число, соответствующее этому вектору, - строго положительное число. Итак, уравнение

$$x = \mu \boldsymbol{B}\, x$$

имеет единственное решение $x \geq 0$, $\mu \geq 0$ причем, на деле, $x > 0$, $\mu > 0$.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что $\mu = 1$. Заметим, что B' – стохастическая матрица, то есть выполнено уравнение $1^T = B' 1^T$. Действительно,

$$\sum_{l \in L} b_{lt} = \sum_{l \in L} \sum_{j \in J} w_{tj}\, \tilde{q}_{lj} = \sum_{j \in J} \Big(w_{tj} \sum_{l \in L} \tilde{q}_{lj} \Big) = \sum_{j \in J} w_{tj} = 1$$

Очевидно, 1 – характеристическое число, соответствующее собственному вектору $\boldsymbol{1^T}$. Как известно, характеристические числа неразложимой матрицы и сопряженной ей матрицы, соответствующие положительным собственным векторам, совпадают. Поэтому $\mu = 1$. Теорема доказана.

Замечание 4.1. Решение системы (12) - (13) может быть легко рассчитано, поскольку к нему сходится по структуре последовательность $B^{\boldsymbol{r}} x_0$, $r = 1,2,...$, где $x_0 \geq 0$ - произвольный вектор. Для доказательства сходимости заметим, что матрица B не имеет нулевых диагональных элементов. Из этого следует, что B не допускает циклического разложения, то есть нельзя разбить L на $m \geq 2$ непустых непересекающихся множеств $L_1, L_2, ..., L_m$ таким образом, чтобы:

если $b_{lt} > 0$ и $t \in L_i$, то $l \in L_{i+1}$ (здесь принято $L_{m+1} = L_1$).

Как хорошо известно (см., например, [Никайдо Х., 1972]], для неразложимых матриц A, не допускающих циклического разложения, последовательность $(\mu A)^r x_0$ $r = 1, 2,...$, сходится по структуре к положительному собственному вектору матрицы A, где μ - характеристическое число, отвечающее положительному собственному вектору, а $x_0 \geq 0$ -

произвольный вектор. Для справедливости замечания остается вспомнить, что $\mu = 1$ для матрицы *B*.

Литература

1. Eichhorn W., Voeller J. Theory of the Price Index: (Fisher's Test Approach and Generalisations). - Berlin: Springer Verl., 1976b.
2. Eichhorn W. Fisher's Tests Revisited // Econometrica. - 1976a. - V. 44, N 2.
3. Theory and Applications of Economic Indices. - Wurzburg: Physica Verl., 1978. - 788 p.
4. Аллен Р. Экономические индексы. – М.: Статистика, 1980.
5. Дементьев Н.П., Петров Ю.А. Построение и анализ свойств многомерных экономических индексов / Препринт № 132. - Новосибирск: ИЭиОПП СО РАН, 1994.
6. Зоркальцев В.И. Индексы цен и инфляционные процессы. – Новосибирск: Наука, 1996.
7. Иванов Н. Обзор аксиоматической теории индексов // Вопросы статистики, № 10, 1995.
8. Кевеш П. Теория индексов и практика экономического анализа. – М.: Финансы и статистика, 1990.
9. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972.
10. Петров Ю.А. Измерение экономического роста и динамики структуры производства (на примере экономики США) // Технический прогресс и структурные сдвиги в экономике. – Новосибирск: ИЭиОПП СО АН СССР. – 1987.
11. Петров Ю.А. Многомерные экономические индексы: аксиомы, построение и использование для измерения динамики промышленного производства в России в 1977-1997 годах. / Препринт # WP/99/068/ - М.: ЦЭМИ РАН, 1999.
12. Фишер И. Построение индексов: Учение об их разновидностях, тестах и достоверности. - М.: ЦСУ СССР, 1928.