УДК 512.56

А. Г. Пинус

ОБ АЛГЕБРАХ, ИЗОМОРФНЫХ ЛЮБОЙ СВОЕЙ ПОДАЛГЕБРЕ

Приводится описание типов изоморфизма верхних полурешеток подалгебр алгебр, изоморфных своим подалгебрам.

Ключевые слова: верхние полурешетки подалгебр, идеалы частично упорядоченных множеств.

В вопросах порождения универсальными алгебрами новых алгебр принципиальную роль играют конструкции подалгебры и фактор-алгебры. Однако не всегда при этом мы получаем действительно «новые» (не изоморфные исходной) универсальные алгебры. Так, хорошо известно понятие псевдопростой алгебры: алгебра $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ называется псевдопростой, если любой ее гомоморфный неодноэлементный образ изоморфен ей самой. Подобное требование накладывает на алгебру и ее решетку конгруэнций (см., к примеру: [1–3]) довольно сильные ограничения: решетки конгруэнций псевдопростых алгебр имеют порядковый тип $\omega^\beta + 1$ для некоторого ординала β и, обратное, для любого ординала β существует псевдопростая универсальная алгебра, решетка конгруэнций которой изоморфна ординалу $\omega^\beta + 1$.

Представляет определенный интерес рассмотрение подобной псевдопростоте ситуации для перехода от алгебре к ее подалгебре; т. е. изучение алгебр изоморфных любой своей подалгебре. При этом под подалгеброй алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ мы понимаем непустое подмножество множества A замкнутое относительно сигнатурных функций. В качестве простейшего примера алгебры, изоморфной любой своей подалгебре, укажем на множество натуральных чисел N с унарной операцией $'$, где $n' = n + 1$. Настоящая заметка посвящена описанию верхних полурешеток подалгебр подобных алгебр (абстрактному и конкретному).

Напомним, что частично упорядоченное множество (ч.у.м.) $\langle A; \leq \rangle$ удовлетворяет условию максимальности, если для любого $B \subseteq A$ в $\langle B; \leq \rangle$ существует максимальный элемент. Для любого элемента a из ч.у.м. $\langle B; \leq \rangle$ через A_a обозначим главный идеал $\{b \in A \mid b \leq a\}$ ч.у.м. $\langle A; \leq \rangle$, порожденный элементом a. Мы не будем далее делать формальных различий между верхними полурешетками и соответствующими им частично упорядоченными множествами. Верхнюю полурешетку $\langle A; \leq \rangle$ назовем *однородной*, если для любого $a \in A$ ч.у.м. $\langle A; \leq \rangle$ и $\langle A_a; \leq \rangle$ изоморфны. Очевидно, что если верхняя полурешетка $\langle A; \leq \rangle$ обладает свойством максимальности и некоторая цепь C в $\langle A; \leq \rangle$ имеет нижнюю грань, то эта цепь имеет в $\langle A; \leq \rangle$ инфимум.

Для любой универсальной алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ через $Sub'\mathcal{A}$ обозначим верхнюю полурешетку подалгебр алгебры $\mathcal{A}$. Отметим, что полурешетка $Sub'\mathcal{A}$ удовлетворяет условию максимальности тогда и только тогда, когда каждая подалгебра алгебры $\mathcal{A}$ конечно

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 115–119

порождена. Очевидно, что для любой алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \le \rangle$, все подалгебры которой изоморфны, все ее подалгебры однопорождены, и тем самым верхняя полурешетка $Sub'\mathcal{A}$ обладает свойством максимальности.

Заметим также, что все максимальные по включению цепи в однородной верхней полурешетке $\langle A; \le \rangle$ имеют один и тот же порядковый тип и существует кардинал k такой, что любой элемент a из A имеет в $\langle A; \le \rangle$ ровно k нижних покрытий (элемент b из $\langle A; \le \rangle$ есть нижнее покрытие элемента a, если $b < a$ и между b и a в $\langle A; \le \rangle$ нет никаких элементов). Если $\langle A; \le \rangle$ однородная верхняя полурешетка с условием максимальности, то все максимальные цепи в $\langle A; \le \rangle$ имеют порядковый тип двойственной ординалу ω^β для некоторого ординала β. Подобную верхнюю полурешетку $\langle A; \le \rangle$ назовем (ω^β, k) — *однородным псевдодеревом.*

Укажем на пару примеров $(\omega, 2)$-однородных псевдодеревьев. Пусть T_2 — совокупность всех конечных последовательностей из 0 и 1, при этом для $\overline{a}, \overline{b} \in T_2$ пусть $\overline{a} \le \overline{b}$ тогда и только тогда, когда $\overline{b}$ начальный интервал для $\overline{a}$. Очевидно, что $\langle T_2; \le \rangle$ — $(\omega, 2)$-однородное псевдодерево. Пусть $P_2 = \{\langle m, n \rangle \mid 0 \le m, n\}$. На P_2 определим отношение $\le$ следующим образом: $\langle m_1, n_1 \rangle \le \langle m_2, n_2 \rangle \iff m_2 \le m_1$ и $n_2 \le n_1$. $\langle P_2; \le \rangle$ — также $(\omega, 2)$-однородное псевдодерево.

Имеет место

Теорема 1. *Верхняя полурешетка $\langle B; \le \rangle$ изоморфна полурешетке $Sub'\mathcal{A}$ для некоторой алгебры $\mathcal{A}$, изоморфной любой своей подалгебре, тогда и только тогда, когда $\langle B; \le \rangle$ однородна и удовлетворяет условию максимальности (когда $Sub'\mathcal{A}$ является (ω^β, k)-однородным псевдодеревом для некоторых ординала β и кардинала k).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть алгебра $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ такова, что все ее подалгебры ей изоморфны. Для любого $B \subseteq A$ пусть $\langle B \rangle_\mathcal{A}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{A}$, порожденная множеством B.

На множестве A введем следующее отношение квазипорядка $\le$: для $a, b \in A$ $a \le b \iff \langle a \rangle_\mathcal{A} \subseteq \langle b \rangle_\mathcal{A}$. Через $\equiv$ обозначим отношение эквивалентности, порожденное квазипорядком $\le$: $a \equiv b \iff a \le b$ и $b \le a$, а через $\langle A/\!\equiv; \le \rangle$ — ч.у.м., получаемое из $\langle A; \le \rangle$ факторизацией по $\equiv$. Покажем теперь, что $\langle A/\!\equiv; \le \rangle$ является (ω^β, k)-однородным псевдодеревом для некоторого ординала β и кардинала k.

Прежде всего, так как для любого $a \in A$ $\mathcal{A} \cong \langle a \rangle_\mathcal{A}$, то алгебра $\mathcal{A}$ и все ее непустые подалгебры однопорождены и, значит, ч.у.м. $\langle A/ \equiv; \le \rangle$ имеет наибольший элемент. Точно так же для любого $B \subseteq A$ такого, что $B/ \equiv$ цепь в $\langle A/ \equiv; \le \rangle$ конус $\langle \langle B \rangle_{\mathcal{A}/\equiv}; \le \rangle = \langle \{a \in A \mid a \le b$ для некоторого $b \in B\}/\!\equiv; \le \rangle$, а значит, и множество $\langle B/\!\equiv; \le \rangle$ имеет наибольший элемент. Таким образом, $\langle A/\!\equiv; \le \rangle$ удовлетворяет условию максимальности. Для любых $a_1, a_2 \in A$ пусть $c \in A$ таково, что $\langle c \rangle_\mathcal{A} = \langle \{a_1, a_2\} \rangle_\mathcal{A}$. Очевидно, что $c/ \equiv$ есть $\sup(a_1/ \equiv, a_2/ \equiv)$ в $\langle A/\!\equiv; \le \rangle$, т. е. $\langle A/\!\equiv; \le \rangle$ — верхняя полурешетка. Если $B \subseteq A$ таково, что $B/ \equiv$ цепь в $\langle A/\!\equiv; \le \rangle$, имеющая нижнюю грань, то $\bigcap\limits_{b \in B} \langle b \rangle_\mathcal{A} \ne \varnothing$ пусть $c \in A$ таково, что $\bigcap\limits_{b \in B} \langle b \rangle_\mathcal{A} = \langle c \rangle_\mathcal{A}$ и, значит, $c/ \equiv = \inf\{B/\!\equiv\}$. Тем самым, в силу изоморфности ч.у.м. $\langle A/_\equiv; \le \rangle$ и $\langle \{b \in A \mid b < c\}/_\equiv; \le \rangle$, вытекающей из изоморфизма алгебр $\mathcal{A}$ и $\langle c \rangle_\mathcal{A}$, $\langle A/\!\equiv; \le \rangle$ однородное псевдодерево. Порядковые типы всех максимальных цепей в $\langle A/\!\equiv; \le \rangle$ двойственны некоторому ординалу α. Более того, α — неразложимый ординал, так как из равенства $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ вытекает равенство $\alpha_2 = \alpha$. Как хорошо известно (см., к примеру: [4]), в этом случае $\alpha = \omega^\beta$ для некоторого ординала β. Пусть a — один из порождающих алгебры $\mathcal{A}$ и пусть $\{A_i \mid i \in I\}$ — совокупность максимальных подалгебр алгебры $\mathcal{A}$, не включающих в себя элемент a. Если a_i — порождающий подалгебры A_i (для $i \in I$), то $\{a_i/\!\equiv \mid i \in I\}$ — суть все нижние покрытия элемента $a/\!\equiv$ в $\langle A/\!\equiv; \leq\rangle$ и для любого $c \in A$ элемент $c/\!\equiv$ (в силу изоморфизма $\langle c\rangle_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{A}$) имеет в $\langle A/\!\equiv; \leq\rangle$ ровно k нижних покрытий, где $k = |I|$. Таким образом, частично упорядоченное множество $\langle A/\!\equiv; \leq\rangle$ является (ω^β, k)-однородным псевдодеревом. При этом так как все подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ однопорождены, то ч.у.м. $Sub'\mathcal{A}$ изоморфен частично упорядоченному множеству $\langle A/\!\equiv; \leq\rangle$.

Считая кардинал k начальным ординалом, через $C(\omega^\beta, k)$ обозначим совокупность всех ординальных последовательностей длины, меньшей чем ω^β, состоящих из ординалов, меньших чем k, которые равны нулю на предельных местах. На $C(\omega^\beta, k)$ определим отношение порядка $\leq$: для $\overline{a}, \overline{b} \in C(\omega^\beta, k) : \overline{b} \leq \overline{a} \iff \overline{a}$ является начальным интервалом последовательности $\overline{b}$.

Пусть $\langle T; \leq\rangle$ — некоторое (ω^β, k)-однородное псевдодерево. Построим алгебру, изоморфную любой своей подалгебре $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$, и такую, что $Sub'\mathcal{A}$ изоморфно $\langle T; \leq\rangle$. Для любого $b \in T$ через $\{b_i' \mid i \leq k\}$ занумеруем все нижние покрытия элемента b в псевдодереве $\langle T; \leq\rangle$. Естественным образом определяется монотонное непрерывное отображение φ псевдодерева $\langle C(\omega^\beta, k); \leq\rangle$ на псевдодерево $\langle T; \leq\rangle : \varphi(\Lambda) = a$, где Λ — пустая последовательность, а a — наименьший элемент в $\langle T; \leq\rangle$. Если для $\overline{b} \in C(\omega^\beta, k)$ элемент $\varphi(\overline{b})$ уже определен, то $\varphi(\overline{b}^\wedge(i)) = (\varphi(\overline{b}))_i'$, здесь $b^\wedge(i)$ — результат дописывания (конкатенация) последовательности $\overline{b}$ добавлением к ней на конце ординала i. Наконец, если длина $l(\overline{b})$ последовательности $\overline{b}$ предельна и определены элементы $\varphi(\overline{b} \upharpoonright j)$ для $j < l(\overline{b})$ (где $\overline{b} \upharpoonright j$ — начальный интервал последовательности $\overline{b}$ длинны j), то $\varphi(\overline{b})$ полагаем равным инфимуму цепи $\{\varphi(\overline{b} \upharpoonright j) \mid j < l(\overline{b})\}$ в псевдодереве $\langle T; \leq\rangle$.

Для любой последовательности $\overline{c} \in C(\omega^\beta, k)$ на множестве T определим одноместную функцию $f_{\overline{c}}$ следующим образом: если $b \in T$ и $b = \varphi(\overline{b})$, где $\overline{b} \in C(\omega^\beta, k)$, то полагаем $f_{\overline{c}}(b) = \varphi(\overline{b}^\wedge\overline{c})$, где $\overline{b}^\wedge\overline{c}$ есть продолжение (конкатенация) последовательности $\overline{b}$ с помощью последовательности $\overline{c}$. Без труда замечается корректность определения функции $f_{\overline{c}}$ на T, т. е. то, что если для $\overline{b}, \overline{d} \in C(\omega^\beta, k)$ $\varphi(\overline{b}) = \varphi(\overline{d})$, то имеет место равенство $\varphi(\overline{b}^\wedge\overline{c}) = \varphi(\overline{d}^\wedge\overline{c})$ и то, что φ отображает $C(\omega^\alpha, k)$ на T. Наконец, двухместную операцию $\vee$ на T определим естественным образом через порядок $\leq$: для $b, d \in T : b \vee c = \sup(b, d)$. Через $\mathcal{A}$ обозначим универсальную алгебру с базовым множеством T сигнатуры $\langle f_{\overline{c}}, \vee \mid \overline{c} \in C(\omega^\beta, k)\rangle$ и покажем, что $Sub'\mathcal{A}$ изоморфна ч.у.м. $\langle T; \leq\rangle$. Вхождение в сигнатуру алгебры $\mathcal{A}$ функций $f_{\overline{c}}$ и $\vee$ влечет то, что подалгебры B алгебры $\mathcal{A}$ это идеалы ч.у.м. $\langle T; \leq\rangle$, замкнутые относительно конечных супремумов. В силу того, что $\langle T; \leq\rangle$ однородное псевдодерево, все идеалы для $\langle T; \leq\rangle$ — главные, т. е. если B — идеал в $\langle T; \leq\rangle$, то существует $b \in T$ такой, что $B = \{d \in T \mid d \leq b\}$. Тем самым $B = \langle b\rangle_{\mathcal{A}}$. Однородность псевдодерева $\langle T; \leq\rangle$ влечет, изоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ и ее подалгебры B, а $Sub'\mathcal{A}$ изоморфна ч.у.м. $\langle T; \leq\rangle$. Таким образом, теорема доказана.

Заметим, наконец, что если $\mathcal{A}$ алгебра, изоморфная своим подалгебрам сигнатуры, содержащей лишь унарные функции ($\mathcal{A}$-унар), то параметр k для (ω^β, k)-однородного псевдодерева $Sub'\mathcal{A}$ равен 1. Действительно, для унаров объединение подалгебр является подалгеброй, а, как замечено выше, k — число максимальных подалгебр алгебры $\langle a\rangle_\mathcal{A}$ не содержащих элемента a (где $a \in \mathcal{A}$). Но, $(\omega^\beta, 1)$-однородное псевдодерево, это просто ординал ω^β. Таким образом, имеет место

Следствие 1. *Для любого унара, изоморфного своим подалгебрам, $Sub'\mathcal{A}$ антиизоморфна ординалу ω^β для некоторого ординала β.*

Отметим также, что в силу своей однопорожденности любая алгебра, изоморфная своим подалгебрам, конечной либо счетной сигнатуры, будет счетна, а также что подалгебра такой алгебры и сама является подобной, и, значит, алгебры, изоморфные своим подалгебрам, не содержат конечных собственных подалгебр. Тем самым не существует, к примеру, подобных решеток, подобных булевых алгебр, подобных алгебр, в многообразиях у которых свободная n-порожденная алгебра конечна для некоторого натурального n.

Наряду с абстрактным описанием ч.у.м. $Sub'\mathcal{A}$ для универсальных алгебр, изоморфных своим подалгебрам, приведенным в теореме 1, представляют интерес и конкретные описания систем подмножеств вида $Sub'\mathcal{A}$ для подобных алгебр $\mathcal{A}$. Заметим, что в силу однопорожденности алгебр, изоморфных своим подалгебрам (а, значит, к примеру, и их счетности в случае счетности сигнатуры), подобное описание в виде систем $Sub'\mathcal{B}$ для элементарных классов алгебр $\mathcal{B}$ становится невозможным. Укажем на одно из возможных подобных описаний в виде решеток идеалов группоидов.

Напомним, что подмножество B группоида $\mathcal{G} = \langle G; \cdot\rangle$ называется *правым идеалом*, если для любых $b \in B$ и $a \in G$ имеет место включение $ba \in B$. *Идеал* B называется *главным*, если он порожден некоторым одним элементом из G. *Группоид* $\mathcal{G} = \langle G; \cdot\rangle$ назовем *полурешеточным*, если совокупность $pId\mathcal{G}$ главных его идеалов, упорядоченная отношением теоретико-множественного включения, образует верхнюю полурешетку. Группоид $\mathcal{G} = \langle G; \cdot\rangle$ называется группоидом с левым сокращением, если на нем истинно квазитождество

$$xy = xz \longrightarrow y = z.$$

Элемент e из $\mathcal{G}$ называется левой единицей, если для любого $g \in \mathcal{G}$ $eg = g$.

Теорема 2. *Для алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$, изоморфной любой своей непустой подалгебре, на множестве A определима операция $\cdot$ такая, что группоид $\mathcal{G} = \langle A; \cdot\rangle$ является решеточным с левым сокращением, с левой единицей и имеет место равенство $Sub'\mathcal{A} = pId\mathcal{G}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e \in A$ и таково, что $\mathcal{A} = \langle e\rangle_\mathcal{A}$. Для любого $a \in A$ пусть φ_a — изоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\langle a\rangle_\mathcal{A}$, при этом, φ_e — тождественный автоморфизм алгебры $\mathcal{A}$. Операцию $\cdot$ на A определим следующим образом: для $a, b \in A$ $ab = \varphi_a(b)$. Равенство $Sub'\mathcal{A} = pId\mathcal{G}$ очевидно, в силу определения операции $\cdot$ для группоида $\mathcal{G} = \langle A; \cdot\rangle$. В силу этого равенства $pId\mathcal{G}$ является верхней полурешеткой, а группоид $\mathcal{G}$ — полурешеточным. Более того, равенство $Sub\mathcal{A} = pId\mathcal{G}$ влечет существование для любых элементов $a, g, g_1 \in A$ элемента $g_2 \in A$ такого, что $(ag)g_1 = ag_2$. Элемент e — левая единица группоида $\mathcal{G} = \langle A; \cdot\rangle$ и группоид $\mathcal{G}$ — группоид с левым сокращением, так как имеет место цепочка импликаций:

$$ab = ac \Longrightarrow \varphi_a(b) = \varphi_a(c) \Longrightarrow b = c.$$

Список литературы

1. *Andreka H., Netmeti I.* Symilarity Types, Pseudosimple Algebras and Congruence Representations of Chains // Alg. Univ. 1981. Vol. 13. No. 2. P. 293–306.

2. *Monk D.* On Pseudo-Simple Universal Algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 13. No. 4. P. 543–546.

3. *Пинус А. Г.* Производные структуры универсальных алгебр. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.

4. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.

Материал поступил в редколлегию 15.11.2008

Адрес автора

ПИНУС Александр Георгиевич
РОССИЯ, 630092, Новосибирск
пр. К. Маркса, 20
Новосибирский государственный
технический университет
e-mail: algebra@nstu.ru