УДК 517.9

*Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин*

# КОРРЕКТНОСТЬ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

В работе исследуется корректность первой краевой задачи для системы уравнений с частными производными, описывающих стационарное движение двухкомпонентных смесей вязких сжимаемых жидкостей.

*Ключевые слова:* краевая задача, динамика смесей, решение уравнений Навье–Стокса.

## Введение

Кроме классических уравнений гидродинамики при решении многих современных задач механики используются более сложные модели, точнее учитывающие неоднородный характер состава реальных жидкостей. В настоящее время имеется большое количество различных моделей для описания многокомпонентных смесей, все они являются весьма сложными как с теоретической точки зрения, так и в отношении их использования для решения конкретных задач. По этим причинам ни одна из них не стала общепринятой. В данной работе рассматривается модель механики сплошной среды, описывающая движение смесей $N$ вязких сжимаемых жидкостей с постоянной температурой, в предположении, что в каждой точке объема $\Omega \in \mathbb{R}^3$ занятого смесью, присутствуют частицы, принадлежащие каждой ее компоненте. В соответствии с теорией, представленной в [1; 2], состояние $i$-й компоненты такой смеси полностью характеризуется скалярным полем плотности $\rho_i(x)$ и векторным полем скоростей $\overrightarrow{u}^{(i)}(x)$, $i = 1, \ldots, N$. В стационарном случае, они удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\operatorname{div}(\rho_i \overrightarrow{u}^{(i)}) = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \overrightarrow{u}^{(i)} \otimes \overrightarrow{u}^{(i)}) - \operatorname{div} P^{(i)} = \overrightarrow{J}^{(i)} + \rho_i \overrightarrow{f}^{(i)} \ \text{ в } \Omega, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Здесь, $P^{(i)}$ — тензор напряжений $i$-й компоненты смеси, $\overrightarrow{J}^{(i)}$ — слагаемое, учитывающее обмен импульсом между различными составляющими для $i$-й компоненты смеси, $\overrightarrow{f}^{(i)}$ — вектор массовых сил для $i$-й составляющей смеси.

Для простоты мы будем рассматривать двухкомпонентные смеси, т. е. $N = 2$. В качестве $P^{(i)}$ примем

$$P^{(i)} = -p_i I + \sum_{j=1}^{2} \left( \mu_{ij} D(\overrightarrow{u}^{(j)}) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \overrightarrow{u}^{(j)} I \right), \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

где $\lambda_{ij}$, $\mu_{ij}$ — коэффициенты вязкости, $p_i$ — давление $i$-й составляющей смеси, $D$ — тензор скоростей деформаций ($D(\overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}(\nabla \overrightarrow{w} + (\nabla \overrightarrow{w})^T)$). Мы будем предпола-

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 33–53

гать, что давление

$$p_i(\rho_i) = \rho_i^\gamma, \quad i = 1, 2, \tag{4}$$

где $\gamma > 1$ — показатель адиабаты, а интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси

$$\overrightarrow{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} a(\overrightarrow{u}^{(2)} - \overrightarrow{u}^{(1)}), \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

где $a > 0$ — заданная постоянная. Массовые силы $\overrightarrow{f}^{(1)}$ и $\overrightarrow{f}^{(2)}$ считаются непрерывными векторными полями.

В многомерном случае изучению краевых задач для уравнений вида (1)–(2) посвящены работы [3–6], в которых получены результаты о существовании слабых обобщенных решений в предположении отсутствия конвективного переноса и уравнениях состояния $p_i = p_i(\rho_1, \rho_2)$. В случае одномерного движения, модели смесей с уравнениями состояния $p_i = p_i(\rho_i)$ рассматривались в [7; 8].

В данной статье мы представим доказательство теоремы существования слабого обобщенного решения первой краевой для системы уравнений (1)–(2) при всех значениях показателя адиабаты из интервала $(3, +\infty)$.

Учитывая (3), перепишем уравнения (1)–(2) в следующем виде:

$$\operatorname{div}(\rho_i \overrightarrow{u}^{(i)}) = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij} \overrightarrow{u}^{(j)} + \operatorname{div}(\rho_i \overrightarrow{u}^{(i)} \otimes \overrightarrow{u}^{(i)}) + \bigtriangledown p_i = \overrightarrow{J}^{(i)} + \rho_i \overrightarrow{f}^{(i)} \ \text{ в } \Omega, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Здесь операторы

$$L_{ij} = -\mu_{ij} \triangle - (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \nabla \operatorname{div}, \quad i, j = 1, 2$$

определены так, что для некоторой постоянной $C_0 > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} L_{ij} \overrightarrow{u}^{(j)} \cdot \overrightarrow{u}^{(i)} \, dx \geqslant C_0 \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla \overrightarrow{u}^{(i)}|^2 \, dx. \tag{8}$$

Неравенство (8), в терминах коэффициентов вязкости $\lambda_{ij}$ и $\mu_{ij}$, эквивалентно следующим условиям:

$$\mu_{11} > 0, \quad \mu_{22} > 0, \quad \lambda_{11} + 2\mu_{11} > 0, \quad \lambda_{22} + 2\mu_{22} > 0,$$
$$4\mu_{11}\mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{21})^2 > 0,$$
$$4(\lambda_{11} + 2\mu_{11})(\lambda_{22} + 2\mu_{22}) - (\lambda_{12} + 2\mu_{12} + \lambda_{21} + 2\mu_{21})^2 > 0.$$

Уравнения (6)–(7) должны быть дополнены краевыми условиями. Наиболее распространенными являются условия прилипания

$$\overrightarrow{u}^{(i)} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

которые означают, что граница $\partial\Omega$ области течения $\Omega$ является неподвижной твердой стенкой. В стационарном случае уравнения и краевые условия не определяют течение единственным образом. Поэтому к уравнениям и граничным условиям необходимо добавить условия нормировки. Мы будем искать решение, удовлетворяющее дополнительным соотношениям

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i \, dx = M > 0, \quad i = 1, 2, \tag{10}$$

где $M$ — заданная постоянная. Они означают, что общая часть массы каждой из компонент смеси фиксирована. Условимся в дальнейшем для краткости задачи (6), (7), (9), (10) называть задачей $P$.

Отметим, что условие (8) обеспечивает выполнение основной энергетической оценки для системы уравнений (6)–(7). Действительно, умножая обе части (7) скалярно на $\overrightarrow{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$, и интегрируя (с учетом уравнений (6) и граничных условий (9)) результат по области $\Omega$, приходим к энергетическому неравенству

$$C_0 \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left|\nabla \overrightarrow{u}^{(i)}\right|^2 dx + a \int\limits_{\Omega} \left| \overrightarrow{u}^{(1)} - \overrightarrow{u}^{(2)}\right|^2 dx \le \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i \overrightarrow{f}^{(i)} \cdot \overrightarrow{u}^{(i)} \, dx, \tag{11}$$

которое обеспечивает термомеханическую непротиворечивость системы уравнений (6)–(7).

Определение слабого решения уравнений (6)–(7) несколько отличается от стандартного определения обобщенного решения для уравнений математической физики, что обусловлено спецификой уравнений (6) [9; 10]. Прежде всего заметим, что для любых непрерывно дифференцируемых функций $G_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, гладкие решения $\rho_i$, $i = 1, 2$, уравнений (6) удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{div} (G_i(\rho_i) \overrightarrow{u}^{(i)}) + \left(G_i{}'(\rho_i)\rho_i - G_i(\rho_i)\right) \operatorname{div} \overrightarrow{u}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{12}$$

которые называются ренормализованной формой уравнений (6), а процедура перехода от (6) к бесконечной системе уравнений вида (12) называется ренормализацией. Функции $\rho_i$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие этой системе, называются ренормализованными решениями уравнений (6).

**Определение 1.** Обобщенным решением краевой задачи $P$ называются неотрицательные функции $\rho_i \in L^1(\Omega)$, $i = 1, 2$ и векторные поля $\overrightarrow{u}^{(i)} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие следующим условиям:

(**A1**)

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i \, dx = M, \;\; \rho_i \overrightarrow{u}^{(i)} \in L^1(\Omega), \;\; p_i(\rho_i) \in L^1_{loc}(\Omega), \;\; \rho_i |\overrightarrow{u}^{(i)}|^2 \in L^1_{loc}(\Omega), \;\; i = 1, 2;$$

(**A2**) для любых дифференцируемых функций $G_i$ с ограниченными производными $G_i' \in C(R)$, $i = 1, 2$, и произвольных функций $\psi_i \in C^1(\Omega)$, $i = 1, 2$, выполняются интегральные тождества

$$\int\limits_{\Omega} \Big( G_i(\rho_i) \overrightarrow{u}^{(i)} \cdot \nabla \psi_i + \left(G_i(\rho_i) - G_i'(\rho_i)\rho_i\right) \psi_i \operatorname{div} \overrightarrow{u}^{(i)} \Big) \, dx = 0, \quad i = 1, 2;$$

(**А3**) для любых векторных полей $\overrightarrow{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$, выполняются интегральные тождества

$$\sum_{j=1}^{2}\Big(\mu_{ij}\int\limits_{\Omega}\nabla\overrightarrow{u}^{(j)} : \nabla\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx + (\lambda_{ij}+\mu_{ij})\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}\overrightarrow{u}^{(j)}\operatorname{div}\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx\Big) -$$
$$-\int\limits_{\Omega}\rho_i\overrightarrow{u}^{(i)}\otimes\overrightarrow{u}^{(i)} : \nabla\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx = \int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\operatorname{div}\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx + \int\limits_{\Omega}(\overrightarrow{J}^{(i)} + \rho_i\overrightarrow{f}^{(i)})\cdot\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx, \quad i = 1, 2.$$

Теперь мы можем сформулировать основную теорему о разрешимости задачи $P$, которая является главным результатом этой работы.

**Теорема 1.** *Для любых $\overrightarrow{f}^{(i)} \in C(\Omega)$, $i = 1, 2$, $\gamma > 3$ краевая задача $P$ имеет, по крайней мере, одно обобщенное решение.*

Доказательству этого утверждения посвящена оставшаяся часть статьи. Кратко охарактеризуем основные этапы доказательства. Обобщенное решение задачи $P$ будет получено как предел решений следующей регуляризованной краевой задачи:

$$-\varepsilon\Delta\rho_i^{\varepsilon} + \operatorname{div}(\rho_i^{\varepsilon}\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}) + \varepsilon\rho_i^{\varepsilon} = \varepsilon\frac{M}{|\Omega|} \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{2}L_{ij}\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(j)} + \operatorname{div}(\rho_i^{\varepsilon}\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}\otimes\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}) + \varepsilon\rho_i^{\varepsilon}\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)} - \frac{\varepsilon}{2}\triangle\rho_i^{\varepsilon}\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)} + \nabla p_i^{\varepsilon} =$$
$$= \overrightarrow{J}_{\varepsilon}^{(i)} + \rho_i^{\varepsilon}\overrightarrow{f}^{(i)} \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

$$\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)} = 0, \quad \nabla\rho_i^{\varepsilon}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

$$\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}\,dx = M, \quad i = 1, 2, \tag{16}$$

которую условимся называть задачей $P_\varepsilon$. Здесь $p_i^{\varepsilon} = (\rho_i^{\varepsilon})^{\gamma}$, $\overrightarrow{J}_{\varepsilon}^{(i)} = (-1)^{i+1}a(\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(2)} - \overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(1)})$, $i = 1, 2$, $|\Omega| = \operatorname{meas}(\Omega)$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $\overrightarrow{n}$ — вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$. Энергетическое неравенство для краевой задачи $P_\varepsilon$ имеет вид

$$C_0\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}|^2\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}|\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}|^2\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\frac{M}{|\Omega|}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}|\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}|^2\,dx +$$
$$+\varepsilon\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}(\rho_i^{\varepsilon})^{\gamma}\,dx + \varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}(\rho_i^{\varepsilon})^{\gamma-2}|\nabla\rho_i^{\varepsilon}|^2\,dx + a\int\limits_{\Omega}|\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(1)} - \overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(2)}|^2\,dx \le$$
$$\le \varepsilon\frac{M}{|\Omega|}\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}(\rho_i^{\varepsilon})^{\gamma-1}\,dx + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}\overrightarrow{f}^{(i)}\cdot\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}\,dx. \tag{17}$$

Мы докажем существование сильного обобщенного решения регуляризованной задачи $P_\varepsilon$. Затем мы совершим предельный переход в слабом смысле в уравнениях (13), (14), (16) при $\varepsilon \to 0$. Основная проблема здесь связана с предельным переходом в последовательности функций давления $p_i^{\varepsilon} = (\rho_i^{\varepsilon})^{\gamma}$, $i = 1, 2$ при $\varepsilon \to 0$. Можно показать, что $\rho_i^{\varepsilon} \to \rho_i$ слабо в $L^{2\gamma}(\Omega)$, $p_i^{\varepsilon} \to \overline{p_i}$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, $i = 1, 2$, $\gamma > 3$.

Так как априори известно, что последовательности $\rho_i^\varepsilon$, $i=1,2$, только интегрируемы, равенства $\overline{p_i}=(\rho_i)^\gamma$, $i=1,2$, далеко не очевидны. Для доказательства данных равенств мы обобщаем технику, развитую в [9; 10] для классической модели Навье–Стокса, связанную с регулярностью так называемых эффективных вязких потоков компонент смеси.

## § 1. Существование сильного обобщенного решения задачи $P_\varepsilon$

В этом разделе мы установим существование сильного обобщенного решения регуляризованной задачи $P_\varepsilon$.

**Определение 2.** Сильным обобщенным решением краевой задачи $P_\varepsilon$ называются неотрицательные функции $\rho_i^\varepsilon\in W^{2,q}(\Omega)$, $q<\infty$, $i=1,2$, удовлетворяющие (16), и векторные поля $\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\in W^{2,q}(\Omega)$, $q<\infty$, $i=1,2$, такие, что уравнения (13)–(14) выполнены почти всюду в $\Omega$ и почти всюду на $\partial\Omega$ — краевые условия (15).

**Теорема 2.** *Для любых $\overrightarrow{f}^{(i)}\in C(\Omega)$, $i=1,2$, $\gamma>3$ краевая задача $P_\varepsilon$ имеет, по крайней мере, одно сильное обобщенное решение, которое удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{2}\Big(\|\rho_i^\varepsilon\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}+\|\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\Big)\le C, \tag{18}$$

*где постоянная $C>0$ зависит только от $\|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}$, $\lambda_{ij}$, $\mu_{ij}$, $\gamma$, $|\Omega|$, $M$ и не зависит от параметра $\varepsilon$.*

Решение задачи $P_\varepsilon$ мы построим, применяя принцип неподвижной точки Лере–Шаудера. С этой целью рассмотрим следующее семейство краевых задач, зависящих от параметра $t\in[0,1]$:

$$\varepsilon\Delta\rho_i=\operatorname{div}(\rho_i\overrightarrow{u}^{(i)})+\varepsilon\rho_i-t\varepsilon\frac{M}{|\Omega|}\ \text{в}\ \Omega,\ \nabla\rho_i\cdot\overrightarrow{n}=0\quad\text{на}\ \partial\Omega,\quad i=1,2, \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2}L_{ij}\overrightarrow{u}^{(j)}=-\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\overrightarrow{u}^{(i)}-\varepsilon\frac{tM}{2|\Omega|}\overrightarrow{u}^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_i(\overrightarrow{u}^{(i)}\cdot\nabla)\overrightarrow{u}^{(i)}-\nabla p_i-\\-\frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i\overrightarrow{u}^{(i)}\otimes\overrightarrow{u}^{(i)})+t\overrightarrow{J}^{(i)}+t\rho_i\overrightarrow{f}^{(i)}\ \text{в}\ \Omega,\ \overrightarrow{u}^{(i)}=0\ \text{на}\ \partial\Omega,\quad i=1,2,\end{gathered} \tag{20}$$

$$\int_\Omega\rho_i\,dx=tM,\quad i=1,2. \tag{21}$$

Предположим, что $\rho_i$, $\overrightarrow{u}^{(i)}$, $i=1,2$, принадлежащие $W^{2,q}(\Omega)$, $q<\infty$ удовлетворяют (19)–(21). Докажем, что при этом имеет место неравенство (18), не зависящее также от параметра $t$. Умножая обе части уравнений (20) скалярно на $\overrightarrow{u}^{(i)}$, $i=1,2$, интегрируя результат по области $\Omega$ и суммируя по $i=1,2$, получим

$$\begin{gathered}C_0\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega|\nabla\overrightarrow{u}^{(i)}|^2\,dx+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\rho_i|\overrightarrow{u}^{(i)}|^2\,dx+\varepsilon\frac{tM}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega|\overrightarrow{u}^{(i)}|^2\,dx+\\+\varepsilon\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\rho_i^\gamma\,dx+\varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\rho_i^{\gamma-2}|\nabla\rho_i|^2\,dx+ta\int_\Omega|\overrightarrow{u}^{(1)}-\overrightarrow{u}^{(2)}|^2\,dx\le\end{gathered}$$

$$\leq t\varepsilon\frac{M}{|\Omega|}\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}(\rho_i)^{\gamma-1}\,dx+t\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i\overrightarrow{f}^{(i)}\cdot\overrightarrow{u}^{(i)}\,dx. \quad (22)$$

В силу ограниченности вложения $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^6(\Omega)$ из (22) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{2}\|\overrightarrow{u}^{(i)}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}\leq C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^2_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)}+C, \quad (23)$$

с постоянной $C$, зависящей только от $\|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}$, $\lambda_{ij}$, $\mu_{ij}$, $\gamma$, $|\Omega|$ и $M$, но не зависящей от параметров $\varepsilon$ и $t$.

Для вывода других априорных оценок задач (19)–(21), будем использовать линейный оператор

$$B:\Big\{g\in L^p(\Omega)|\ \int\limits_{\Omega}g\,dx=0\Big\}\to W_0^{1,p}(\Omega)$$

обладающий следующими свойствами [14]:

a) функция $\overrightarrow{v}=B[g]$ — решение задачи div $\overrightarrow{v}=g$ в $\Omega$, $\overrightarrow{v}=0$ на $\partial\Omega$;

b) $\|B[g]\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\leq C(p)\,\|g\|_{L^p(\Omega)}\ \forall\ 1<p<\infty$.

Заметим, далее, что из уравнений (20) следуют интегральные соотношения

$$\sum_{j=1}^{2}\Big(\mu_{ij}\int\limits_{\Omega}\nabla\overrightarrow{u}^{(j)}:\nabla\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx+(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}\overrightarrow{u}^{(j)}\operatorname{div}\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx\Big)+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i\overrightarrow{u}^{(i)}\cdot\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx+\Big(1-\frac{t}{2}\Big)\varepsilon\frac{M}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\overrightarrow{u}^{(i)}\cdot\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i(\overrightarrow{u}^{(i)}\cdot\nabla)\overrightarrow{u}^{(i)}\cdot\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i\overrightarrow{u}^{(i)}\otimes\overrightarrow{u}^{(i)}:\nabla\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx-$$
$$-\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\operatorname{div}\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx=\int\limits_{\Omega}\big(\overrightarrow{J}^{(i)}+t\rho_i\overrightarrow{f}^{(i)}\big)\cdot\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx, \quad (24)$$

справедливые для любых векторных полей $\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\in C_0^{\infty}(\Omega)$, $i=1,2$. Возьмем в качестве пробных функций $\overrightarrow{\varphi}^{(i)}$ в тождестве (24) такие, что $\overrightarrow{\varphi}^{(i)}=B[g_i]$, где $g_i=\rho_i^{\gamma}-\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\,dx$, другими словами

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\varphi}^{(i)}=\rho_i^{\gamma}-\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\,dx \text{ в } \Omega,\quad \overrightarrow{\varphi}^{(i)}=0 \text{ на } \partial\Omega,\quad i=1,2.$$

В результате получаем соотношения

$$\int\limits_{\Omega}\rho_i^{2\gamma}\,dx=\frac{1}{|\Omega|}\Big(\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\,dx\Big)^2+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i\overrightarrow{u}^{(i)}\cdot\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx+\varepsilon\frac{tM}{2|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\overrightarrow{u}^{(i)}\cdot\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\Big(\mu_{ij}\int\limits_{\Omega}\nabla\overrightarrow{u}^{(j)}:\nabla\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx+(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}\overrightarrow{u}^{(j)}\operatorname{div}\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i(\overrightarrow{u}^{(i)}\cdot\nabla)\overrightarrow{u}^{(i)}\cdot\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i\overrightarrow{u}^{(i)}\otimes\overrightarrow{u}^{(i)}:\nabla\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx-t\int\limits_{\Omega}\overrightarrow{J}^{(i)}\cdot\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\,dx-$$

$$- t \int\limits_{\Omega} \rho_i \overrightarrow{f}^{(i)} \cdot \overrightarrow{\varphi}^{(i)}\, dx, \quad i = 1, 2. \quad (25)$$

В силу неравенства $\|\overrightarrow{\varphi}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le C\|\rho_i\|^{\gamma}_{L^{2\gamma}(\Omega)}$ из (25) следует, что при $\gamma > 3$

$$\|\rho_i\|^{2\gamma}_{L^{2\gamma}(\Omega)} \le C\|\rho_i\|^{4\gamma\frac{\gamma-1}{2\gamma-1}}_{L^{2\gamma}(\Omega)} + C(\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}\|\overrightarrow{u}^{(i)}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|\overrightarrow{u}^{(1)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \\ + \|\overrightarrow{u}^{(2)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)})\|\rho_i\|^{\gamma}_{L^{2\gamma}(\Omega)}, \quad i = 1, 2, \quad (26)$$

где постоянная $C$ не зависит от параметров $\varepsilon$ и $t$. Из (26), в свою очередь получаем, что

$$\|\rho_i\|^{\gamma}_{L^{2\gamma}(\Omega)} \le C\big\|\rho_i\big\|^{\gamma\frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}}_{L^{2\gamma}(\Omega)} + C\|\overrightarrow{u}^{(i)}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + \\ + C\sum_{j=1}^{2}\|\overrightarrow{u}^{(j)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + C, \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

Используя неравенства

$$\|\rho_i\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} \le C(M)\big\|\rho_i\big\|^{\frac{\gamma}{3(2\gamma-1)}}_{L^{2\gamma}(\Omega)}, \quad i = 1, 2,$$

получаем теперь из (23) и (27) оценку

$$\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\gamma}_{L^{2\gamma}(\Omega)} \le C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\gamma\frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}}_{L^{2\gamma}(\Omega)} + C\Big[\sum_{j=1}^{2}\|\rho_j\|^{\frac{2\gamma}{3(2\gamma-1)}}_{L^{2\gamma}(\Omega)}\Big]\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + \\ + C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + C\sum_{j=1}^{2}\|\rho_j\|^{\frac{\gamma}{3(2\gamma-1)}}_{L^{2\gamma}(\Omega)} + C, \quad (28)$$

где постоянная $C$ зависит только от $\|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}$, $\lambda_{ij}$, $\mu_{ij}$, $\gamma$, $|\Omega|$ и $M$. Из (28) следует оценка

$$[R(\overrightarrow{\rho})]^{\gamma} \le C[R(\overrightarrow{\rho})]^{\gamma\frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}} + CR(\overrightarrow{\rho}) + C[R(\overrightarrow{\rho})]^{\frac{\gamma}{3(2\gamma-1)}} + C[R(\overrightarrow{\rho})]^{\frac{2\gamma}{3(2\gamma-1)}+1} + C, \quad (29)$$

где $R(\overrightarrow{\rho}) = \sum\limits_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}$. Далее, так как при $\gamma > \frac{3}{2}$ верно неравенство

$$\gamma > \max\Big\{1, \gamma\frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}, \frac{\gamma}{3(2\gamma-1)}, 1 + \frac{2\gamma}{3(2\gamma-1)}\Big\},$$

то из (29) мы получаем, что

$$R(\overrightarrow{\rho}) = \sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} \le C\left(\|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\Omega|, M\right). \quad (30)$$

Осталось заметить, что из оценок (23) и (30) следует неравенство (18) с постоянной $C$, не зависящей от параметров $\varepsilon$ и $t$.

Цель дальнейших шагов — получение других априорных оценок, зависящих, вообще говоря, от параметра $\varepsilon$. В силу ограниченности вложения $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ имеем

$$\|\overrightarrow{u}^{(i)}\|_{L^6(\Omega)} \le C\left(\|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\Omega|, M\right), \quad i = 1, 2.$$

Из этих неравенств и априорных оценок для решений задачи (19) мы получаем, что

$$\|\rho_i\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M\right), \quad i=1,2.$$

Таким образом,

$$\|\rho_i \overrightarrow{u}^{(i)}\|_{L^6(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M\right), \quad i=1,2.$$

Рассмотрим функции $v^{(i)}$, $i=1,2$ такие, что

$$\operatorname{div}\, v^{(i)} = \frac{1}{2}\rho_i(\overrightarrow{u}^{(i)}\cdot\nabla)\overrightarrow{u}^{(i)} - \frac{\overrightarrow{\alpha}}{|\Omega|} \text{ в } \Omega,\ \ v^{(i)}=0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i=1,2, \tag{31}$$

где $\overrightarrow{\alpha} = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \rho_i(\overrightarrow{u}^{(i)}\cdot\nabla)\overrightarrow{u}^{(i)}\,dx,\ i=1,2$. Так как правые части уравнений (31) допускают оценку по норме пространства $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, то для $v^{(i)}$, $i=1,2$ справедливы неравенства

$$\|v^{(i)}\|_{W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M\right), \quad i=1,2.$$

Таким образом, правые части (20) имеют вид $\overrightarrow{H}^{(i)} + \operatorname{div}\, G^{(i)}$, где

$$\overrightarrow{H}^{(i)} = -\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\overrightarrow{u}^{(i)} - \varepsilon\frac{tM}{2|\Omega|}\overrightarrow{u}^{(i)} + t\overrightarrow{J}^{(i)} + t\rho_i\overrightarrow{f}^{(i)} - \frac{\overrightarrow{\alpha}}{|\Omega|}, \quad i=1,2,$$

$$G^{(i)} = -p_i I - \frac{1}{2}\rho_i\overrightarrow{u}^{(i)}\otimes\overrightarrow{u}^{(i)} - v^{(i)}, \quad i=1,2.$$

В силу вышесказанного справедливы неравенства

$$\|\overrightarrow{H}^{(i)}\|_{L^6(\Omega)} \le C\Big(\varepsilon, \|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M\Big), \quad i=1,2,$$

$$\|G^{(i)}\|_{L^3(\Omega)} \le C\Big(\varepsilon, \|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M\Big), \quad i=1,2.$$

Из оценок для решений эллиптических систем уравнений теперь следует, что

$$\|\overrightarrow{u}^{(i)}\|_{W^{1,3}(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M\right), \quad i=1,2, \tag{32}$$

и, в силу ограниченности вложения $W^{1,3}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$,

$$\|\overrightarrow{u}^{(i)}\|_{L^q(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M\right) \quad \forall\, q<\infty,\ i=1,2. \tag{33}$$

Тогда, из оценки (32) и результатов о регулярности решений эллиптических уравнений мы получаем из (19), что

$$\|\rho_i\|_{W^{2,3}(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M\right), \quad i=1,2. \tag{34}$$

Отсюда, в силу ограниченности вложения $W^{2,3}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega)$ следуют неравенства

$$\|\rho_i\|_{W^{1,q}(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M\right) \quad \forall\, q<\infty,\ i=1,2. \tag{35}$$

Таким образом, из (33) и (35) мы получаем для правых частей системы (20) оценки

$$\|\overrightarrow{H}^{(i)}\|_{L^q(\Omega)} \le C\left(\varepsilon, \|\overrightarrow{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M\right) \quad \forall\, q<\infty,\ i=1,2,$$

$$\| \operatorname{div} G^{(i)} \|_{L^p(\Omega)} \le C \left( \varepsilon, \| \overrightarrow{f}^{(i)} \|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M \right) \quad \forall\, p < 3, \; i = 1, 2.$$

Далее, из оценок для решений эллиптических систем уравнений мы получаем неравенства

$$\| \overrightarrow{u}^{(i)} \|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C \left( \varepsilon, \| \overrightarrow{f}^{(i)} \|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M \right) \quad \forall\, p < 3, \; i = 1, 2$$

и, в силу ограниченности вложения $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega)$,

$$\| \overrightarrow{u}^{(i)} \|_{W^{1,q}(\Omega)} \le C \left( \varepsilon, \| \overrightarrow{f}^{(i)} \|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M \right) \forall\, q < \infty, \, i = 1, 2.$$

Наконец, из этих неравенств и априорных оценок для решений задачи (19) следует, что

$$\| \rho_i \|_{W^{2,q}(\Omega)} \le C \left( \varepsilon, \| \overrightarrow{f}^{(i)} \|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M \right) \quad \forall\, q < \infty, \; i = 1, 2.$$

Для правых частей системы (20) теперь справедливы следующие неравенства:

$$\| \overrightarrow{H}^{(i)} \|_{L^q(\Omega)} \le C \left( \varepsilon, \| \overrightarrow{f}^{(i)} \|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M \right) \quad \forall\, q < \infty, \; i = 1, 2,$$

$$\| \operatorname{div} G^{(i)} \|_{L^q(\Omega)} \le C \left( \varepsilon, \| \overrightarrow{f}^{(i)} \|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M \right) \; \forall\, q < \infty, \; i = 1, 2.$$

Отсюда и из оценок для решений эллиптических систем уравнений следует, что

$$\| \overrightarrow{u}^{(i)} \|_{W^{2,q}(\Omega)} \le C \left( \varepsilon, \| \overrightarrow{f}^{(i)} \|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M \right) \quad \forall\, q < \infty, \, i = 1, 2.$$

Рассмотрим семейство отображений $(u, \rho) = \Psi(t, u^*, \rho^*)$, $u = (\overrightarrow{u}^{(1)}, \overrightarrow{u}^{(2)})$, $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, $u^* = (\overrightarrow{u}_*^{(1)}, \overrightarrow{u}_*^{(2)})$, $\rho^* = (\rho_1^*, \rho_2^*)$, определенных как решение краевых задач:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \Delta \rho_i = \operatorname{div}(\rho_i \overrightarrow{u}_*^{(i)}) + \varepsilon \rho_i - t\varepsilon \frac{M}{|\,\Omega|} \text{ в } \Omega, \; \nabla \rho_i \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ &\int\limits_\Omega \rho_i \, dx = tM, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2} L_{ij} \overrightarrow{u}^{(j)} = -\frac{\varepsilon}{2} \rho_i \overrightarrow{u}_*^{(i)} - \varepsilon \frac{tM}{2|\Omega|} \overrightarrow{u}_*^{(i)} - \frac{1}{2} \rho_i (\overrightarrow{u}_*^{(i)} \cdot \nabla) \overrightarrow{u}_*^{(i)} - \triangledown p_i - \\ - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho_i \overrightarrow{u}_*^{(i)} \otimes \overrightarrow{u}_*^{(i)}) + t \overrightarrow{J}_*^{(i)} + t \rho_i \overrightarrow{f}^{(i)} \text{ в } \Omega, \; \overrightarrow{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{37}$$

где $\overrightarrow{J}_*^{(i)} = (-1)^{i+1} a (\overrightarrow{u}_*^{(2)} - \overrightarrow{u}_*^{(1)})$, $i = 1, 2$, $u^*, \rho^* \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Существование решений задач (36) таких, что $\rho_i \in W^{2,q}(\Omega)$, $q < \infty$, $\rho_i > 0$, $i = 1, 2$, следует из результатов работы [16], а решения $\overrightarrow{u}^{(i)} \in W^{2,q}(\Omega)$, $q < \infty$, $i = 1, 2$, задачи (37) — из работы [17].

Выберем число $q$ так, чтобы имело место вложение $W^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{2} \Big( \| \rho_i \|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \| \overrightarrow{u}^{(i)} \|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \Big) < C \Big( \varepsilon, \| \overrightarrow{f}^{(i)} \|_{C(\Omega)}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \gamma, |\,\Omega|, M \Big). \tag{38}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ подмножество в $W^{1,\infty}(\Omega)$, определенное неравенством (38). Ясно, что отображение $\Psi : [0,1] \times \mathfrak{M} \to W^{2,q}(\Omega)$ непрерывно. Следовательно, оператор $\Psi : [0,1] \times \mathfrak{M} \to W^{1,\infty}(\Omega)$ непрерывен и компактен. Легко видеть, что $\Psi(0, \cdot) \equiv 0$. Неравенство (38) означает, что отображение $\Psi(t, \cdot)$ не имеет неподвижных точек на границе множества $\mathfrak{M}$ для любого $t \in [0,1]$. В силу теоремы Лере–Шаудера можно утверждать, что уравнение $(u, \rho) = \Psi(1, u, \rho)$ имеет решение $\rho, u \in \mathfrak{M} \cap W^{2,q}(\Omega)$, $q < \infty$. Осталось заметить, что это решение удовлетворяет неравенству (18).

## § 2. Предельный переход

Наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы перейти к пределу (в слабом смысле) в уравнениях (13), (14), (16) при $\varepsilon \to 0$. Благодаря априорным оценкам (18), мы можем извлечь подпоследовательности, снова обозначенные как $\rho_i^\varepsilon$, $\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$, такие, что при $\varepsilon \to 0$

$$\rho_i^\varepsilon \to \rho_i \qquad \text{слабо в } L^{2\gamma}(\Omega), \quad i = 1, 2, \tag{39}$$

$$\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)} \to \overrightarrow{u}^{(i)} \quad \text{слабо в } W_0^{1,2}(\Omega), \quad i = 1, 2, \tag{40}$$

и, по теореме вложения,

$$\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)} \to \overrightarrow{u}^{(i)} \ \text{ сильно в } L^q(\Omega),\ q \in [1; 6),\ i = 1, 2. \tag{41}$$

Кроме того, из (18) и (22) с $t = 1$ следует, что (см. [16])

$$\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon \to 0 \ \text{ сильно в } \ L^2(\Omega) \ \text{ при } \varepsilon \to 0,\ \ i = 1, 2. \tag{42}$$

Переходя к пределу по выбранным подпоследовательностям в уравнениях (13), (14), (16), при $\varepsilon \to 0$ получим, что предельные функции $\rho_i \in L^{2\gamma}(\Omega)$, $\rho_i \geq 0$, $\overrightarrow{u}^{(i)} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $i = 1, 2$ при $\gamma > 3$ удовлетворяют в слабом смысле следующей системе уравнений:

$$\operatorname{div}(\rho_i \overrightarrow{u}^{(i)}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \int_\Omega \rho_i dx = M, \quad i = 1, 2, \tag{43}$$

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij} \overrightarrow{u}^{(j)} + \operatorname{div}(\rho_i \overrightarrow{u}^{(i)} \otimes \overrightarrow{u}^{(i)}) + \bigtriangledown \overline{p}_i = \overrightarrow{J}^{(i)} + \rho_i \overrightarrow{f}^{(i)} \text{ в } \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{44}$$

где

$$(\rho_i^\varepsilon)^\gamma \to \overline{p_i} \ \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0,\ \ i = 1, 2. \tag{45}$$

Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы 1, мы должны показать, что

$$\overline{p_i} = \rho_i^\gamma, \quad i = 1, 2. \tag{46}$$

Для этого мы будем использовать технику, развитую в [9; 10] для классической модели Навье–Стокса. Введем в рассмотрение величины $p_i - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1}) \operatorname{div} \overrightarrow{u}^{(1)} - (\lambda_{i2} + {} + 2\mu_{i2}) \operatorname{div} \overrightarrow{u}^{(2)}$, $i = 1, 2$, которые по аналогии с моделью вязкой сжимаемой жидкости будем называть эффективными вязкимим потоками компонент смеси. Справедливо следующее утверждение:

**Лемма 1.** *Пусть $\rho_i^\varepsilon$, $\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$ — последовательности решений задачи $P_\varepsilon$, существование которых гарантируется теоремой 2, и пусть $\rho_i$, $\overrightarrow{u}^{(i)}$ и $\overline{p_i}$, $i = 1, 2$ — пределы, определенные в* (39), (40) и (45) *соответственно.*

*Тогда, при $\varepsilon \to 0$*

$$\int_\Omega \rho_j^\varepsilon [(\rho_i^\varepsilon)^\gamma - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i2}) \operatorname{div} \overrightarrow{u}_\varepsilon^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2}) \operatorname{div} \overrightarrow{u}_\varepsilon^{(2)}] \tau^2 \, dx \to$$

$$\to \int_\Omega \rho_j [\overline{p_i} - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1}) \operatorname{div} \overrightarrow{u}^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2}) \operatorname{div} \overrightarrow{u}^{(2)}] \tau^2 \, dx$$

$$\forall \, \tau \in C_0^\infty(\Omega), \quad i, j = 1, 2. \tag{47}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейные ограниченные операторы

$$A_k : L^p(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega), \quad 1 < p < \infty, \quad A_k = \frac{\partial}{\partial x_k}\triangle^{-1}, \quad k = 1,2,3, \tag{48}$$

$$A_{ks} : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega), \quad 1 < p < \infty, \quad A_{ks} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_s}\triangle^{-1}, \quad k,s = 1,2,3, \tag{49}$$

где для произвольной функции $v \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$, продолженной нулем в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, оператор $\triangle^{-1}(v) = -\frac{1}{3\omega_3}\int\limits_{R^3} \frac{v(y)}{|x-y|}\,dy$, $\omega_3 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{3\Gamma(\frac{3}{2})} > 0$ при $p > \frac{3}{2}$ является вполне непрерывным оператором из $L^p(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ [18]. Заметим, что

$$\triangle(\triangle^{-1}(v)) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} A_k[v] = v. \tag{50}$$

Пусть $\overrightarrow{\varphi}^{(j)} = \nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau))$, $j = 1,2$, где $\tau$ — произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$, и все рассматриваемые функции считаем продолженными нулем в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Взяв данные вектор-функций $\overrightarrow{\varphi}^{(j)}$ в качестве тестовых, из уравнений (14) получаем соотношения

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \rho_j^\varepsilon[(\rho_i^\varepsilon)^\gamma - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1})\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2})\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(2)}]\tau^2\,dx = \\
&= \int\limits_\Omega \rho_j[(\rho_i^\varepsilon)^\gamma - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1})\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2})\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(2)}]\tau^2\,dx - \\
&- \int\limits_\Omega (\rho_i^\varepsilon)^\gamma\triangle(\tau)\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\,dx - 2\int\limits_\Omega (\rho_i^\varepsilon)^\gamma\,\nabla\tau\cdot\nabla\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\,dx + \\
&+ (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1})\int\limits_\Omega \mathrm{div}\,\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(1)}\triangle(\tau)\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\,dx + \\
&+ (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2})\int\limits_\Omega \mathrm{div}\,\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(2)}\triangle(\tau)\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\,dx + \\
&+ 2(\lambda_{i1} + 2\mu_{i1})\int\limits_\Omega \mathrm{div}\,\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(1)}\nabla\tau\cdot\nabla\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\,dx + \\
&+ 2(\lambda_{i2} + 2\mu_{i2})\int\limits_\Omega \mathrm{div}\,\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(2)}\nabla\tau\cdot\nabla\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\,dx - \\
&- \int\limits_\Omega \rho_i^\varepsilon\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\otimes\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)} : \nabla(\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)))\,dx + \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla)\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau))\,dx + \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\otimes\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)} : \nabla(\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)))\,dx - \\
&- \int\limits_\Omega [-\varepsilon\rho_i^\varepsilon\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)} + \overrightarrow{J}_\varepsilon^{(i)} + \rho_i^\varepsilon\overrightarrow{f}^{(i)}]\cdot\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau))\,dx, \quad i,j = 1,2.
\end{aligned} \tag{51}$$

**I. Исследование интегралов, порожденных конвективными слагаемыми.**

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \rho_i^\varepsilon\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\otimes\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)} : \nabla(\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)))\,dx = \\
&= \sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_\Omega \rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_k\partial x_s}\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\,dx +
\end{aligned}$$

$$+\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_k}A_s[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\,dx+$$
$$+\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}A_k[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\,dx+$$
$$+\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau A_{k\,s}[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\,dx,\quad i,j=1,2. \tag{52}$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части (52). Так как оператор $\triangle^{-1}$ является вполне непрерывным из $L^p(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ при $p>\frac{3}{2}$, то в силу (18) выполняются соотношения

$$\Big|\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_k\partial x_s}\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau)\,dx\Big|\le C\|\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})}\to 0$$
$$\text{при } \varepsilon\to 0,\quad i,j=1,2. \tag{53}$$

Далее, поскольку оператор $A_k : L^{2\gamma}(\Omega)\to W^{1,2\gamma}(\Omega)$ линеен и ограничен, а вложение $W^{1,2\gamma}(\Omega)\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ $(\gamma>\frac{3}{2})$ компактно, тогда

$$\Big|\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_k}A_s[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\,dx\Big|\le C\sum_{s=1}^{3}\|A_s[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})}\to 0$$
$$\text{при } \varepsilon\to 0,\quad i,j=1,2. \tag{54}$$

Аналогично, рассмотрим третий интеграл в правой части (52):

$$\Big|\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}A_k[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\,dx\Big|\le C\sum_{k=1}^{3}\|A_k[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})}\to 0$$
$$\text{при } \varepsilon\to 0,\ i,j=1,2. \tag{55}$$

Сходимость к нулю последнего интеграла в правой части (52) далеко не очевидна. Для доказательства этого факта воспользуемся следующим утверждением, доказанным в работе [9]:

**Предложение 1.** *Предположим, что*

$$v_\varepsilon\to v\ \text{ слабо в }\ L^p(\Omega)\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0,$$

$$w_\varepsilon\to w\ \text{ слабо в }\ L^q(\Omega)\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0.$$

*Тогда*

$$v_\varepsilon A_{k\,s}[w_\varepsilon]-w_\varepsilon A_{k\,s}[v_\varepsilon]\to vA_{k\,s}[w]-wA_{k\,s}[v]\ \text{ слабо в }\ L^r(\Omega)\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0,$$

$$k,s=1,2,3,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}<1.$$

Умножая обе части уравнений (13) на функцию $\tau \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем

$$\operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon \overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\tau) = \varepsilon\frac{M}{|\Omega|}\tau + \rho_i^\varepsilon \overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\nabla\tau - \varepsilon\rho_i^\varepsilon\tau + \varepsilon\triangle(\rho_i^\varepsilon\tau) - \varepsilon\rho_i^\varepsilon\triangle\tau - 2\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla\tau, \quad i=1,2.$$

Применим к обеим частям этих уравнений оператор $\nabla\triangle^{-1}$, считая рассматриваемые функции продолженными нулем в $\mathbb{R}^3\setminus\Omega$:

$$\nabla\triangle^{-1}(\operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon \overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\tau)) = \varepsilon\frac{M}{|\Omega|}\nabla\triangle^{-1}(\tau) + \nabla\triangle^{-1}(\rho_i^\varepsilon \overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\nabla\tau) - \varepsilon\nabla\triangle^{-1}(\rho_i^\varepsilon\tau) +$$
$$+\varepsilon\nabla(\rho_i^\varepsilon\tau) - \varepsilon\nabla\triangle^{-1}(\rho_i^\varepsilon\triangle\tau) - 2\varepsilon\nabla\triangle^{-1}(\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla\tau), \quad i=1,2.$$

Далее, умножим последние уравнения на $(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}$ и проинтегрируем результат по области $\Omega$:

$$\sum_{k,s=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_{k\,s}[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau]\,dx = \varepsilon\frac{M}{|\Omega|}\sum_{k=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\tau]\,dx +$$
$$+\sum_{k,s=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k\left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]dx - \varepsilon\sum_{k=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\rho_i^\varepsilon\tau]\,dx +$$
$$+\varepsilon\sum_{k=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_i^\varepsilon\tau)\,dx - \varepsilon\sum_{k=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\rho_i^\varepsilon\triangle\tau]\,dx -$$
$$-2\varepsilon\sum_{k=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla\tau]\,dx \quad i,j=1,2. \qquad (56)$$

В силу формулы (56) мы имеем

$$\sum_{k,s=1}^3\int\limits_\Omega\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau A_{k\,s}[(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau]\,dx =$$
$$=\sum_{k,s=1}^3\int\limits_\Omega u_{\varepsilon_k}^{(i)}\left(\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau A_{k\,s}[(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau] - (\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau A_{k\,s}[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau]\right)dx +$$
$$+\varepsilon\frac{M}{|\Omega|}\sum_{k=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\tau]\,dx + \sum_{k,s=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k\left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]dx -$$
$$-\varepsilon\sum_{k=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\rho_i^\varepsilon\tau]\,dx + \varepsilon\sum_{k=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_i^\varepsilon\tau)\,dx -$$
$$-\varepsilon\sum_{k=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\rho_i^\varepsilon\triangle\tau]\,dx -$$
$$-2\varepsilon\sum_{k=1}^3\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla\tau]\,dx, i,j=1,2. \qquad (57)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части (57). Так как

$$(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau\to 0 \text{ слабо } L^{2\gamma}(R^3) \text{ при } \varepsilon\to 0, \quad j=1,2,$$

$$\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau \to \rho_i u_s^{(i)}\tau \ \text{ слабо } \ L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(R^3) \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0, \quad i=1,2, \quad s=1,2,3,$$

то согласно предложению 1

$$\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau A_{k\,s}[(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau] - (\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau A_{k\,s}[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau] \to 0 \text{ слабо в } L^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}(\Omega)$$
$$\text{при } \varepsilon \to 0, \quad i,j=1,2. \quad (58)$$

В силу (41) отсюда следует, что

$$\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_\Omega u_{\varepsilon_k}^{(i)}\left(\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau A_{k\,s}[(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau] - (\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau A_{k\,s}[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau]\right)dx \to 0$$
$$\text{при } \varepsilon \to 0, \quad i,j=1,2. \quad (59)$$

Используя неравенство (18), получим, что

$$\varepsilon\frac{M}{|\Omega|}\left|\sum_{k=1}^{3}\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\tau]\,dx\right| \le \varepsilon C(\|\rho_j^\varepsilon\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} +$$
$$+\|\rho_j\|_{L^{2\gamma}(\Omega)})\sum_{k=1}^{3}\|u_{\varepsilon_k}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le \varepsilon C \to 0 \quad \text{при } \varepsilon\to 0, \quad i,j=1,2.$$

Далее, рассмотрим третье слагаемое в правой части (57):

$$\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k\left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]dx =$$
$$=\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)(u_{\varepsilon_k}^{(i)}-u_k^{(i)})\tau A_k\left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]dx +$$
$$+\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_k^{(i)}\tau\left(A_k\left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]-A_k\left[\rho_i u_s^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]\right)dx +$$
$$+\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_k^{(i)}\tau A_k\left[\rho_i u_s^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]dx, \quad i,j=1,2. \quad (60)$$

Отсюда, учитывая (18), (48) и компактность вложения $W^{1,2}(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-6}}(\Omega)$ при $\gamma>\frac{3}{2}$, получим

$$\left|\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_\Omega(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)(u_{\varepsilon_k}^{(i)}-u_k^{(i)})\tau A_k\Big[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\Big]dx\right| \le$$
$$\le C\sum_{k,s=1}^{3}\|\rho_j^\varepsilon-\rho_j\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}\|\rho_i^\varepsilon\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}\|u_{\varepsilon_s}^{(i)}\|_{L^2(\Omega)}\|u_{\varepsilon_k}^{(i)}-u_k^{(i)}\|_{L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-6}}(\Omega)} \le$$
$$\le C\sum_{k=1}^{3}\|u_{\varepsilon_k}^{(i)}-u_k^{(i)}\|_{L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-6}}(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0, \quad i,j=1,2. \quad (61)$$

Поскольку $\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)} \to \rho_i u_s^{(i)}$ слабо в $L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$ и оператор $A_k : L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega) \to$ $\to W^{1,\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$ ограничен, а вложение $W^{1,\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-3}}(\Omega)$ компактно, то

$$\Big|\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_k^{(i)}\tau\left(A_k\left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]-A_k\left[\rho_i u_s^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]\right)dx\Big|\le$$

$$\le C\sum_{k,s=1}^{3}\left\|A_k\left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]-A_k\left[\rho_i u_s^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]\right\|_{L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-3}}(\Omega)}\to 0$$

$$\text{при}\quad \varepsilon\to 0,\quad i,j=1,2. \qquad (62)$$

Так как $\rho_j^\varepsilon-\rho_j\to 0$ слабо в $L^{2\gamma}(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$, а функция $\tau u_k^{(i)}A_k\left[\rho_i u_s^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]$ принадлежит сопряженному пространству $L^{\frac{2\gamma}{2\gamma-1}}(\Omega)$, то последнее слагаемое в правой части (60) стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Таким образом, доказано, что при $\varepsilon\to 0$

$$\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k\left[\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_s}^{(i)}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}\right]dx\to 0,\ \ i,j=1,2. \qquad (63)$$

Далее, в силу (18) и (48), интегралы $\sum\limits_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau\,A_k[\rho_i^\varepsilon\tau]\,dx$ и $\sum\limits_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\rho_i^\varepsilon\triangle\tau]\,dx$ равномерно (от $\varepsilon$) ограниченны, следовательно четвертое и шестое слагаемые в правой части (57) стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$. Пятое и седьмое слагаемые в (57) стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$ в силу (42) и оценок

$$\varepsilon\Big|\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_i^\varepsilon\tau)\,dx\Big|\le C\|\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}+\varepsilon C,\quad i,j=1,2, \qquad (64)$$

$$\varepsilon\Big|\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Omega}(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)u_{\varepsilon_k}^{(i)}\tau A_k[\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla\tau]\,dx\Big|\le C\|\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)},\quad i,j=1,2. \qquad (65)$$

В итоге, доказаны соотношения

$$\sum_{k,s=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\rho_i^\varepsilon u_{\varepsilon_k}^{(i)}u_{\varepsilon_s}^{(i)}\tau A_{k\,s}[(\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau]\,dx\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0,\quad i,j=1,2 \qquad (66)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\Omega}\rho_i^\varepsilon\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\otimes\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}:\nabla(\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau)))\,dx\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0,\quad i,j=1,2. \qquad (67)$$

**II. Исследование интегралов, содержащих** $\operatorname{div}\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}$**.** Так как оператор $\triangle^{-1}$ является вполне непрерывным из $L^p(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ при $p>\frac{3}{2}$, то в силу (18) выполняются соотношения

$$\Big|\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\triangle(\tau)\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau)\,dx\Big|\le C\|\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon-\rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})}\to 0$$

$$\text{при}\quad\varepsilon\to 0,\quad i,j=1,2. \qquad (68)$$

Далее, поскольку оператор $A_k:L^{2\gamma}(\Omega)\to W^{1,2\gamma}(\Omega)$ линеен и ограничен, а вложение $W^{1,2\gamma}(\Omega)\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ $(\gamma>\frac{3}{2})$ компактно, то

$$\Big|\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)} \nabla(\tau)\cdot\nabla\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau)\,dx\Big| \le C\sum_{k=1}^{3}\|A_k[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})}\to 0$$

$$\text{при}\quad \varepsilon\to 0,\quad i,j=1,2. \quad (69)$$

Кроме того, в силу (18), (40) имеем

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}\rho_j\tau^2\,dx \to \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \overrightarrow{u}^{(i)}\rho_j\tau^2\,dx \quad \text{при}\quad \varepsilon\to 0,\ i,j=1,2. \quad (70)$$

**III. Исследование интегралов, содержащих $(\rho_i^{\varepsilon})^{\gamma}$.** В силу (18) и (45) получим

$$\int\limits_{\Omega} (\rho_i^{\varepsilon})^{\gamma}\rho_j\tau^2\,dx \to \int\limits_{\Omega} \overline{p_i}\rho_j\tau^2\,dx \quad \text{при}\quad \varepsilon\to 0,\ i,j=1,2. \quad (71)$$

Так как оператор $\triangle^{-1}$ является вполне непрерывным из $L^p(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ при $p>\frac{3}{2}$, то в силу (18) мы имеем

$$\Big|\int\limits_{\Omega} (\rho_i^{\varepsilon})^{\gamma}\triangle(\tau)\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau)\,dx\Big| \le C\|\rho_i^{\varepsilon}\|^{\gamma}_{L^{2\gamma}(\Omega)}\|\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})}\le$$

$$\le C\|\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})}\to 0 \quad \text{при}\quad \varepsilon\to 0,\quad i,j=1,2. \quad (72)$$

Из оценки

$$\Big|\int\limits_{\Omega} (\rho_i^{\varepsilon})^{\gamma}\nabla(\tau)\cdot\nabla\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau)\,dx\Big| \le C\|\rho_i^{\varepsilon}\|^{\gamma}_{L^{2\gamma}(\Omega)}\sum_{k=1}^{3}\|A_k[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})}\le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{3}\|A_k(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})},\quad i,j=1,2, \quad (73)$$

как и при выводе формулы (69), получим, что данный интеграл стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$.

**IV. Три последних интеграла в правой части (51) стремятся к нулю при** $\varepsilon\to 0$. Это вытекает из следующих оценок:

$$\Big|\int\limits_{\Omega} (\varepsilon\nabla\rho_i^{\varepsilon}\cdot\nabla)\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}\cdot\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau))\,dx\Big|\le$$

$$\le C\|\varepsilon\nabla\rho_i^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{L^2(\Omega)}\|\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})}+$$

$$+C\|\varepsilon\nabla\rho_i^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{L^2(\Omega)}\sum_{k=1}^{3}\|A_k[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})},\quad i,j=1,2; \quad (74)$$

$$\Big|\int\limits_{\Omega} \varepsilon\nabla\rho_i^{\varepsilon}\otimes\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}:\nabla(\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau)))\,dx\Big|\le C\|\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})}+$$

$$+C\sum_{k=1}^{3}\|A_k[(\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})}+C\|\varepsilon\nabla\rho_i^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)},\quad i,j=1,2; \quad (75)$$

$$\Big|\int\limits_{\Omega} [-\varepsilon\rho_i^{\varepsilon}\overrightarrow{u}_{\varepsilon}^{(i)}+\overrightarrow{J}_{\varepsilon}^{(i)}+\rho_i^{\varepsilon}\overrightarrow{f}^{(i)}]\cdot\nabla(\tau\triangle^{-1}((\rho_j^{\varepsilon}-\rho_j)\tau))\,dx\Big|\le$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int\limits_{\Omega} \Big[\rho_i^\varepsilon|\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}| + |\overrightarrow{J}_\varepsilon^{(i)}| + \rho_i^\varepsilon|\overrightarrow{f}^{(i)}|\Big] |\nabla\tau||\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)|\, dx + \\
&+ \int\limits_{\Omega} |\tau| \Big[\rho_i^\varepsilon|\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}| + |\overrightarrow{J}_\varepsilon^{(i)}| + \rho_i^\varepsilon|\overrightarrow{f}^{(i)}|\Big] |\nabla\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)|\, dx \leq \\
&\leq C\Big(\|\rho_i^\varepsilon\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}\|\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(1)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(2)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + 1\Big) \times \\
&\times \Big(\|\triangle^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau)\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{k=1}^{3} \|A_k[(\rho_j^\varepsilon - \rho_j)\tau]\|_{C(\overline{\Omega})}\Big), \quad i,j = 1,2. \qquad (76)
\end{aligned}
$$

Объединяя результаты, полученные в разделах I–IV, мы завершаем доказательство леммы 1.

Заметим далее, что из леммы 1 вытекает следующее утверждение:

**Лемма 2.** *Пусть $\rho_i^\varepsilon$, $\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1,2$ — последовательности решений задачи $P_\varepsilon$, существование которых гарантируется теоремой 2, и пусть $\rho_i$, $\overrightarrow{u}^{(i)}$ и $\overline{p_i}$, $i = 1,2$ — пределы, определенные в* (39), (40) и (45) *соответственно.*

*Тогда, при $\varepsilon \to 0$*

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} [\widetilde{A}\overrightarrow{p}^\varepsilon \cdot \overrightarrow{\rho}^\varepsilon - \operatorname{div}\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(1)}\rho_1^\varepsilon - \operatorname{div}\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(2)}\rho_2^\varepsilon]\tau^2\, dx \to \\
&\qquad \to \int\limits_{\Omega} [\widetilde{A}\overrightarrow{\overline{p}} \cdot \overrightarrow{\rho} - \operatorname{div}\overrightarrow{u}^{(1)}\rho_1 - \operatorname{div}\overrightarrow{u}^{(2)}\rho_2]\tau^2\, dx \quad \forall\tau \in C_0^\infty(\Omega), \qquad (77)
\end{aligned}
$$

*где*

$$
\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} + 2\mu_{11} & \lambda_{12} + 2\mu_{12} \\ \lambda_{21} + 2\mu_{21} & \lambda_{22} + 2\mu_{22} \end{pmatrix}^{-1}, \quad \overrightarrow{\overline{p}} = \begin{pmatrix} \overline{p}_1 \\ \overline{p}_2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\rho} = (\rho_1, \rho_2),
$$

$$
\overrightarrow{p}^\varepsilon = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{\rho}^\varepsilon) = \begin{pmatrix} (\rho_1^\varepsilon)^\gamma \\ (\rho_2^\varepsilon)^\gamma \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\rho}^\varepsilon = (\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon).
$$

Докажем теперь равенства (46), завершая тем самым доказательство теоремы 1. Отметим сначала следующее утверждение [9].

**Предложение 2.** *Пусть $\rho$, $\overrightarrow{u}$ — решение уравнения $\operatorname{div}(\rho\overrightarrow{u}) = 0$ в $D'(\Omega)$ такое, что $\rho \in L^2(\Omega)$, $\overrightarrow{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Тогда, продолжая $\rho$ и $\overrightarrow{u}$ нулем в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, получим, что продолженные функции являются решением данного уравнения в $D'(\mathbb{R}^3)$, т. е. $\forall\ \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ выполнено тождество*

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho\overrightarrow{u} \cdot \nabla\psi\, dx = 0. \qquad (78)
$$

В силу предложения 2 из уравнений (43) следует (считая $\rho_i$ и $\overrightarrow{u}^{(i)}$, $i = 1,2$, продолженными нулем в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$), что $\forall\ \psi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $i = 1,2$, выполняются равенства

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho_i\overrightarrow{u}^{(i)} \cdot \nabla\psi_i\, dx = 0, \quad i = 1,2. \qquad (79)
$$

Для дальнейшего доказательства воспользуемся оператором усреднения

$$
S_h[v] = \frac{1}{h^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta\Big(\frac{|x-y|}{h}\Big)v(y)\, dy
$$

(где $\frac{1}{h^3}\theta\Big(\frac{|x-y|}{h}\Big)$ — стандартное ядро усреднения) для которого справедливы свойства [15; 19]:

a) если $v \in L^p(\Omega)$, $\quad 1 < p < \infty$ и $v = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, то

$$\|S_h[v]\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \le C\|v\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{и} \quad \|S_h[v] - v\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0;$$

b) если $\rho \in L^p(\Omega)$, $\overrightarrow{u} \in W_0^{1,q}(\Omega)$, $\rho$, $\overrightarrow{u} = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\delta} < 1$, $1 < p$, $q < \infty$, то

$$\|\operatorname{div}(S_h[\rho\overrightarrow{u}]) - \operatorname{div}(S_h[\rho]\overrightarrow{u})\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \le C\|\rho\|_{L^p(\Omega)}\|\overrightarrow{u}\|_{W_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)},$$

$$\|\operatorname{div}(S_h[\rho\overrightarrow{u}]) - \operatorname{div}(S_h[\rho]\overrightarrow{u})\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Приняв в качестве тестовых функций в (79) $\psi_i = \frac{1}{h^3}\,\theta\Big(\frac{|x-y|}{h}\Big)$, $\quad i = 1, 2$, получаем равенства

$$\operatorname{div}(S_h[\rho_i]\overrightarrow{u}^{(i)}) = r_i^h, \tag{80}$$

где $r_i^h = \operatorname{div}(S_h[\rho_i]\overrightarrow{u}^{(i)}) - \operatorname{div}(S_h[\rho_i\overrightarrow{u}^{(i)}]) \to 0 \quad$ при $\quad h \to 0$ в $L^1(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2$, согласно свойству b. Теперь, умножая уравнения (80) на $G_i'(S_h[\rho_i])$ ($G_i(\rho_i) \in C'(\mathbb{R})$ — произвольная функция как в условии (**A2**)), $i = 1, 2$, получаем

$$\operatorname{div}(G_i(S_h[\rho_i])\overrightarrow{u}^{(i)}) + (G_i'(S_h[\rho_i])S_h[\rho_i] - G_i(S_h[\rho_i]))\operatorname{div}(\overrightarrow{u}^{(i)}) = r_i^h G_i'(S_h[\rho_i]), \quad i = 1, 2. \tag{81}$$

Из (81) следует, что для произвольных функций $\psi_i \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2$, имеют место тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} G_i(S_h[\rho_i])\overrightarrow{u}^{(i)} \cdot \nabla\psi_i\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^3} (G_i(S_h[\rho_i]) - G_i'(S_h[\rho_i])S_h[\rho_i])\operatorname{div}(\overrightarrow{u}^{(i)})\psi_i\,dx + {}$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^3} r_i^h G_i'(S_h[\rho_i])\psi_i\,dx = 0, \quad i = 1, 2. \tag{82}$$

Совершая в тождествах (82) предельный переход при $h \to 0$, приходим к равенствам

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} G_i(\rho_i)\overrightarrow{u}^{(i)} \cdot \nabla\psi_i\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^3} (G_i(\rho_i) - G_i'(\rho_i)\rho_i)\operatorname{div}(\overrightarrow{u}^{(i)})\psi_i\,dx = 0, \quad i = 1, 2. \tag{83}$$

Этот факт справедлив в силу следующих оценок для отдельных слагаемых в (82):

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^3} (G_i(S_h[\rho_i]) - G_i(\rho_i))\overrightarrow{u}^{(i)} \cdot \nabla\psi_i\,dx\Big| \le$$
$$\le C\|S_h[\rho_i] - \rho_i\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0, \quad i = 1, 2; \tag{84}$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^3} ((G_i'(S_h[\rho_i])S_h[\rho_i] - G_i(S_h[\rho_i])) - (G_i'(\rho_i)\rho_i - G_i(\rho_i)))\operatorname{div}\overrightarrow{u}^{(i)}\psi_i\,dx\Big| \le$$
$$\le C\|(G_i'(S_h[\rho_i])S_h[\rho_i] - G_i(S_h[\rho_i])) -$$
$$- (G_i'(\rho_i)\rho_i - G_i(\rho_i))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0, \quad i = 1, 2; \tag{85}$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^3} r_i^h G_i'(S_h[\rho_i])\psi_i\,dx\Big| \le \int\limits_{\Omega} |r_i^h||G_i'(S_h[\rho_i])||\psi_i|\,dx \le$$
$$\le C\|r_i^h\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0, \quad i=1,2. \tag{86}$$

Таким образом, предельные функции $\rho_i$, $\;i=1,2$, являются ренормализованными решениями уравнений (6).

Можно убедится, что оценки (84)–(86) справедливы также в том случае, если принять в качестве $G_i(z)=z\ln z$, $i=1,2$. Следовательно, из (83) вытекают равенства

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i \operatorname{div}\overrightarrow{u}^{(i)}\,dx = 0, \quad i=1,2. \tag{87}$$

С другой стороны, из (13) следуют оценки

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i^\varepsilon \operatorname{div}\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(i)}\,dx \le \varepsilon\frac{M^2+M|\Omega|+|\Omega|^2}{|\Omega|} = \varepsilon C, \quad i=1,2. \tag{88}$$

Возьмем теперь неубывающую последовательность функций $\tau_n$ такую, что $\tau_n\in C_0^\infty(\Omega)$, $\tau_n\to 1$ при $n\to\infty$, $0\le\tau_n\le 1$. Объединяя лемму 2, (87) и (88), мы получаем

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Omega} \widetilde{A}\overrightarrow{p}^\varepsilon\cdot\overrightarrow{\rho}^\varepsilon\,dx \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Omega} \widetilde{A}\overrightarrow{p}^\varepsilon\cdot\overrightarrow{\rho}^\varepsilon\tau_n^2\,dx \le$$
$$\le \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Omega} \tau_n^2(\widetilde{A}\overrightarrow{p}^\varepsilon\cdot\overrightarrow{\rho}^\varepsilon - \operatorname{div}\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(1)}\rho_1^\varepsilon - \operatorname{div}\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(2)}\rho_2^\varepsilon)\,dx +$$
$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Omega} \tau_n^2\rho_1^\varepsilon \operatorname{div}\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(1)}\,dx + \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Omega} \tau_n^2\rho_2^\varepsilon \operatorname{div}\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(2)}\,dx \le$$
$$\le \overline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_{\Omega} \tau_n^2(\widetilde{A}\overline{\overrightarrow{p}}\cdot\overrightarrow{\rho} - \operatorname{div}\overrightarrow{u}^{(1)}\rho_1 - \operatorname{div}\overrightarrow{u}^{(2)}\rho_2)\,dx +$$
$$+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Omega} \rho_1^\varepsilon \operatorname{div}\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(1)}\,dx + \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Omega} \rho_2^\varepsilon \operatorname{div}\overrightarrow{u}_\varepsilon^{(2)}\,dx \le \int\limits_{\Omega} \widetilde{A}\overline{\overrightarrow{p}}\cdot\overrightarrow{\rho}\,dx -$$
$$-\int\limits_{\Omega} \rho_1 \operatorname{div}\overrightarrow{u}^{(1)}\,dx - \int\limits_{\Omega} \rho_2 \operatorname{div}\overrightarrow{u}^{(2)}\,dx = \int\limits_{\Omega} \widetilde{A}\overline{\overrightarrow{p}}\cdot\overrightarrow{\rho}\,dx.$$

Таким образом, доказано, что

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Omega} \widetilde{A}\overrightarrow{p}^\varepsilon\cdot\overrightarrow{\rho}^\varepsilon\,dx \le \int\limits_{\Omega} \widetilde{A}\overline{\overrightarrow{p}}\cdot\overrightarrow{\rho}\,dx. \tag{89}$$

В силу монотонности оператора $\overrightarrow{\rho}\to\widetilde{A}\overrightarrow{p}(\overrightarrow{\rho})$ мы имеем

$$\int\limits_{\Omega} (\widetilde{A}\overrightarrow{p}(\overrightarrow{\rho}^\varepsilon) - \widetilde{A}\overrightarrow{p}(\overrightarrow{\widetilde{\rho}}))(\overrightarrow{\rho}^\varepsilon - \overrightarrow{\widetilde{\rho}})\,dx \ge 0,$$

откуда в силу (89) следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega} (\widetilde{A}\overline{\overrightarrow{p}} - \widetilde{A}\overrightarrow{p}(\overrightarrow{\widetilde{\rho}}))(\overrightarrow{\rho} - \overrightarrow{\widetilde{\rho}})\,dx \ge 0.$$

Выбирая $\widetilde{\rho}_i = \rho_i + \eta\psi$, $i = 1, 2$, где $\eta \to 0$, а $\psi \in L^{2\gamma}(\Omega)$ — произвольная функция, приходим к желаемым равенствам (46).

**Список литературы**


1. *Rajagopal K. R., Tao L.* Mechanics of Mixtures. London: World Scientific, 1995.

2. *Haupt P.* Continuum Mechanics and Theory of Materials. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

3. *Frehse J., Goj S., Malek J.* On a Stokes-like System for Mixtures of Fluids // SIAM J. Math. Anal. 2005. Vol. 36. No. 4. P. 1259–1281.

4. *Frehse J., Goj S., Malek J.* A Uniqueness Result for a Model for Mixtures in the Absence of External Forces and Interaction Momentum // Appl. Math. 2005. Vol. 50. No. 6. P. 527–541.

5. *Goj S.* Analysis for Mixtures of Fluids. Dissertation. Universitat Bonn. Math. Inst. 2005. http://bib.math.uni-bonn.de/pdf2/BMS-375.pdf.

6. *Frehse J., Weigant W.* On Quasi-Stationary Compressible Miscible Mixtures. Manuscript, 2004.

7. *Кажихов А. В., Петров А. Н.* Корректность начально-краевой задачи для модельной системы уравнений многокомпонентной смеси // Динамика сплошной среды. 1978. Вып. 35. С. 61–73.

8. *Злотник А. А.* Равномерные оценки и стабилизация решений системы уравнений одномерного движения многокомпонентной баротропной смеси // Математические заметки. 1995. Т. 58, № 2. С. 307–312.

9. *Feireisl E., Novotny A., Petzeltova H.* On the Existence of Globally Defined Weak Solutions to the Navier-Stokes Equations // Math. Fluid Mech. 2001. Vol. 3. No. 4. P. 358–392.

10. *Плотников П. И., Соколовски Ж.* Стационарные решения уравнений Навье–Стокса для двухатомных газов // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, вып. 3 (375). С. 117–148.

11. *Plotnikov P. I., Sokolowski J.* On Compactness, Domain Dependence and Existence of Steady State Solutions to Compressible Isothermal Navier–Stokes Equations // Math. Fluid Mech. 2005. Vol. 7. P. 529–573.

12. *Plotnikov P. I., Sokolowski J.* Stationary Boundary Value Problems for Navier-Stokes Equations with Adiabatic Index $\nu < 3/2$ // Dokl. Math. 2004. Vol. 70. P. 535–538. Translated from Doklady Akademii Nauk. 2004. Vol. 397. P. 1–6.

13. *Plotnikov P. I., Sokolowski J.* Concentrations of Solutions to Time-Discretized Compressible Navier-Stokes Equations // Comm. Math. Phys. 2005. Vol. 258. P. 567–608.

14. *Боговский М. Е.* О решении некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad // Труды семинара С. Л. Соболева. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1980. Т. 1. С. 5–40.

15. *Lions P.-L.* Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Oxford University Press. N.Y., 1996. Vol. 1: Incompressible Models.

16. *Lions P.-L.* Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Oxford University Press. N.Y., 1998. Vol. 2: Compressible Models.

17. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем эллиптических уравнений в смысле А. Дуглиса-Л. Ниренберга. II. // Тр. математического ин-та им. В. А. Стеклова. 1966. Т. XCII. С. 233–297.

18. *Соболев С. Л.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989.

19. *Никольский С. Л.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.

*Материал поступил в редколлегию 12.02.2009*

**Адреса авторов**

КУЧЕР Николай Алексеевич
РОССИЯ, 650036, Кемерово
ул. Терешковой, 40
тел.: (3842) 54-27-40
e-mail: diffur@kemsu.ru

ПРОКУДИН Дмитрий Алексеевич
РОССИЯ, 650036, Кемерово
ул. Терешковой, 40
тел.: (3842) 54-27-40
e-mail: diffur@kemsu.ru